Intensivkurs – Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Wahrscheinlich-keit		

Wahrscheinlichkeit

Ergebnis

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment mit folgenden Eigenschaften:

- Unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar
- Es gibt mindestens zwei mögliche Ergebnisse
- Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar

Werfen eines Würfels

- ist beliebig oft wiederholbar
- Es gibt 6 mögliche Ergebnisse (also mindestens 2)
- Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar

Wird ein Zufallsexperiment einmal ausgeführt, so spricht man von einem **einstufigen Zufallsexperiment**.

Einmaliges werfen eines Würfels.
Einmaliges werfen einer Münze.
Einmalige Wette über den Ausgang eines Fußballspiels.

Der Ausgang des Zufallsexperimentes wird **Ergebnis** genannt.

Die **Ergebnismenge** Ω enthält alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes. Die Ergebnismenge wird auch Stichprobenraum, oder Ereignisraum oder Ergebnisraum genannt.

Zufallsexperiment	Ergebnismenge
Einmaliges werfen eines Würfels	$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$
Einmaliges werfen einer Münze	Ω = { Wappen ; Zahl }
Einmalige Wette über den Ausgang eines Fußballspiels	Ω = { Sieg ; Unentschieden ; Niederlage }

Ereignis

Jede Teilmenge A einer (endlichen) Ergebnismenge Ω heißt **Ereignis A**.

Stellt sich ein Ergebnis e ein und e gehört zur Teilmenge A, sagt man das **Ereignis tritt ein**.

Die Menge aller Teilmengen von Ω nennt man **Ereignisraum** und bezeichnet sie mit 2^{Ω}.

Besitzt Ω genau n Elemente ($|\Omega| = n$), so gibt es 2^{Ω} verschiedene Teilmengen von Ω, dh. 2^n unterschiedliche Ereignisse in 2^{Ω}.

Das **Ereignis A tritt ein**, wenn das betreffende Ergebnis des Zufallsexperiment ein Element der Menge A ist: $e \in A$.

- Einelementige Teilmenge: ***Elementarereignis*** ($|\Omega| = n$; es gibt n Elementarereignisse)
- Leere Teilmenge: ***unmögliches Ereignis*** $A = \emptyset$
- Gesamtmenge Ω : ***sicheres Ereignis*** $A = \Omega$
- $\overline{A} = \Omega \setminus A$: ***Gegenereignis*** von A
- Zwei Ereignisse heißen ***unvereinbar***, wenn gilt $A \cap B = \emptyset$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse addiert. (Summenregel)

Intensivkurs – Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wahrscheinlichkeit

Summenregel

Setzt sich ein Ereignis E aus den Ereignissen A und B zusammen, die sich überschneiden können, d.h. gemeinsame Ergebnisse enthalten können wie bei einer oder - Verknüpfung, dann muss man darauf achten, dass diese gemeinsamen Ereignisse nicht doppelt berücksichtigt werden.

Sind A und B Ereignisse und gilt $E = A \cup B$ (Oder – Ereignis), dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E:

$$\boxed{P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

In Worten:
Die Wahrscheinlichkeit eines Oder - Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse, vermindert um die Wahrscheinlichkeit des Und - Ereignisses.

Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig genau dann, wenn gilt

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Gilt diese Gleichung nicht, heißen die Ereignisse stochastisch abhängig.

- "Unabhängigkeit" ist ein schwieriges Konzept und kann nicht in einem Diagramm dargestellt werden. Unabhängigkeit ist nicht intuitiv und man muss sie für jede Situation überprüfen.
- Das Auftreten des Ereignisses B beeinflußt nicht die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A: $P(A|B) = P(A)$ und $P(B|A) = P(B)$
- Das kann aus der Gleichung $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B|A)$ abgeleitet werden, wobei $P(B|A) = P(B)$, wenn die Ereignisse unabhängig sind.
- Wenn A und B unabhängig sind, dann sind A und $\overline{B}$ auch unabhängig.
- Wenn A unabhängig von B und A unabhängig von C ist, muss A nicht notwendigerweise auch von $(B \cap C)$ unabhängig sein.

Intensivkurs – Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wahrscheinlichkeit

Rechenregel für Wahrscheinlichkeiten

1. Für alle Ereignisse E gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$ wobei $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$. das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Eriegnsses immer zwischen 0 und 1 liegt und nicht negativ sein kann.
2. Ist $E = \{e_1; e_2; e_3; e_4; ...e_n\}$, dann gilt $P(E) = P(e_1)+P(e_2)+P(e_3)+..P(e_n)$
3. Für alle Ereignisse A und B gilt; $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Für das Gegenereignis $\overline{E}$ gilt: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Laplace – Experiment

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die jedem der möglichen Ereignisse $e_1; e_2; ..e_n$ eines Zufallsexperiment die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet heißt **Gleichverteilung**

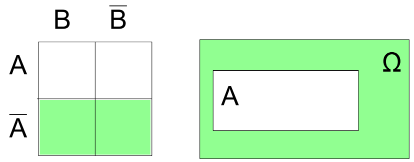
Ist die Wahrscheinlichkeit bei n möglichen Ergebnissen für jedes einzelne Ergebnis 1/n, dann spricht man von einem **Lapalce-Experiment.**

Nach klassischer Definition ist die **Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung** für das Auftreten eines Ereignisses E:

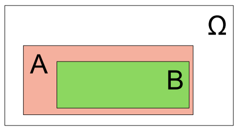
$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der zum Ereignis E gehörenden Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$$

Gegenereignis – Vereinigung – Schnitt

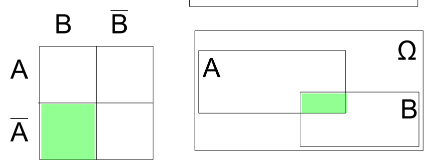
$\overline{A}$ Das **Gegenereignis** $\overline{A}$ tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt.



B ⊆ A Das Ereignis B **zieht** das Ereignis A **nach sich** ; immer, wenn B eintritt, tritt auch A ein.



A ∩B Das Ereignis **A und B** (A geschnitten B) tritt genau dann ein, wenn *sowohl A als auch B eintritt*

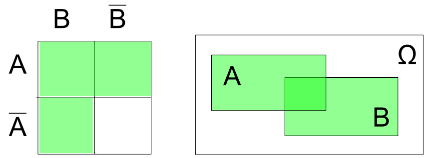


Intensivkurs – Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Wahrscheinlich-keit		

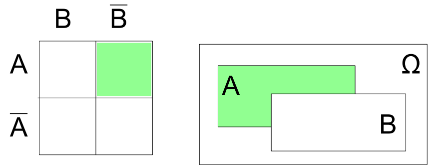
$A \cup B$

Das Ereignis **A oder B** (A vereinigt B) tritt genau dann ein, wenn *mindestens eines* der Ereignisse A, B eintritt.



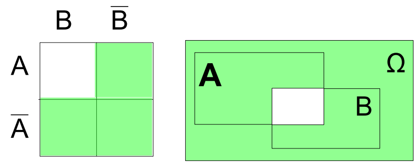
$A \setminus B$

Das Ereignis A und nicht B (A minus B) tritt genau dann ein, wenn A eintritt und B nicht eintritt.
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$



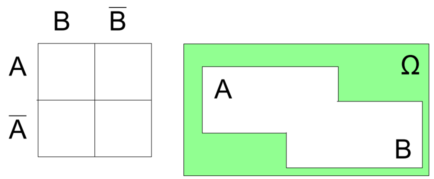
$\overline{A \cap B}$

Höchsten eines der Ereignisse A,B tritt ein, wenn *entweder A oder B* oder *keines von beiden* eintritt.
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



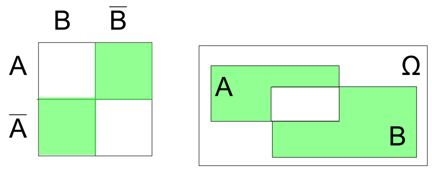
$\overline{A \cup B}$

Das Ereignis **Weder A noch B** tritt genau dann ein, wenn keines der beiden Ereignisse A,B eintritt.
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



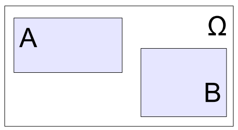
$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

Das Ereignis **Entweder A oder B** tritt genau dann ein, wenn *genau eines* der Ereignisse A,B eintritt.



$A \cap B = \emptyset$

Die Ereignisse A und B sind **unvereinbar**, d.h. sie können nicht gleichzeitig eintreten.



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Vierfeldertafel

Vierfeldertafel

Vierfeldertafeln sind eine spezielle Variante der Kontingenztafeln für je zwei Ausprägungen eines Merkmals.

Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten

In dieser Tafel werden die absoluten Größen erfasst. Die Zeilensummen und Spaltensummen ergeben jeweils die gesamte Merkmalsausprägung für das jeweilige Merkmal. Die untere rechte Ecke enthält die Gesamtsumme, die sich sowohl aus der Addition der Zeilensummen, als auch aus der Addition der Spaltensummen ergeben muss.

			Summe
	a	**b**	**a + b**
	c	**d**	**c + d**
Summe	**a + c**	**b + d**	**a + b +c + d**

Vierfeldertafel der relativen Häufigkeiten

In diesem Zusammenhang eignen sie sich sehr gut, um die Wahrscheinlichkeit von zwei unabhängigen Ereignissen A und B zu beschreiben.

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	**$P(A \cap B)$**	**$P(A \cap \overline{B})$**	**$P(A)$**
$\overline{A}$	**$P(\overline{A} \cap B)$**	**$P(\overline{A} \cap \overline{B})$**	**$P(\overline{A})$**
Spalten-summe	**$P(B)$**	**$P(\overline{B})$**	**1**

In dieser Schreibweise ergeben die Zeilensummen die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Merkmal A und $\overline{A}$ und die Spaltensummen die Gesamtwahrscheinlichkeit des Merkmals B und $\overline{B}$. Die untere rechte Ecke muss als Summe 1 ergeben.

Musterbeispiele

	männlich	weiblich	gesamt
Abschluss (A)	0,42	0,33	0,75
kein Abschluss (kA)	0,16	0,09	0,25
gesamt	0,58	0,42	1,00

Abschluß männlich

kein Abschluß weiblich

Intensivkurs – Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

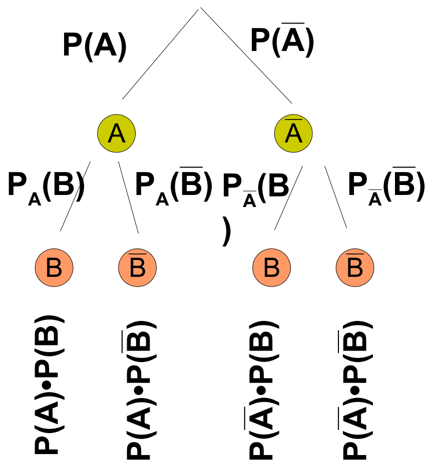
Thema: Bäume

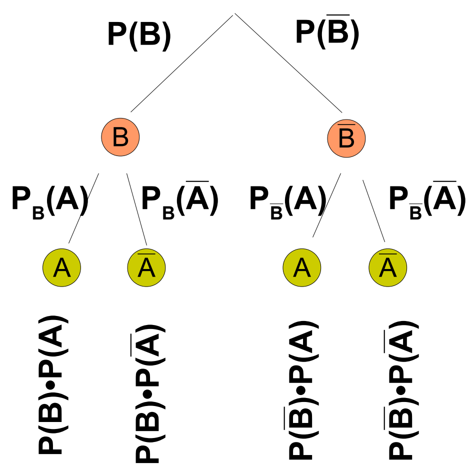
Baumdiagramm

Die Beziehungen von zwei Ereignissen können mit einer Vierfeldertafel ausreichend beschrieben werden. Wenn mehr als zwei Ereignisse miteinander verbunden werden sollen, ist die Vierfeldertafel nicht mehr geeignet. dazu benutzt man dann ein sogenanntes Baumdiagramm. Die Beziehungen der Vierfeldertafel können auf zwei verschiedene Weisen in einem Baumdiagramm dargestellt werden:

Vierfeldertafel als Baumdiagramm

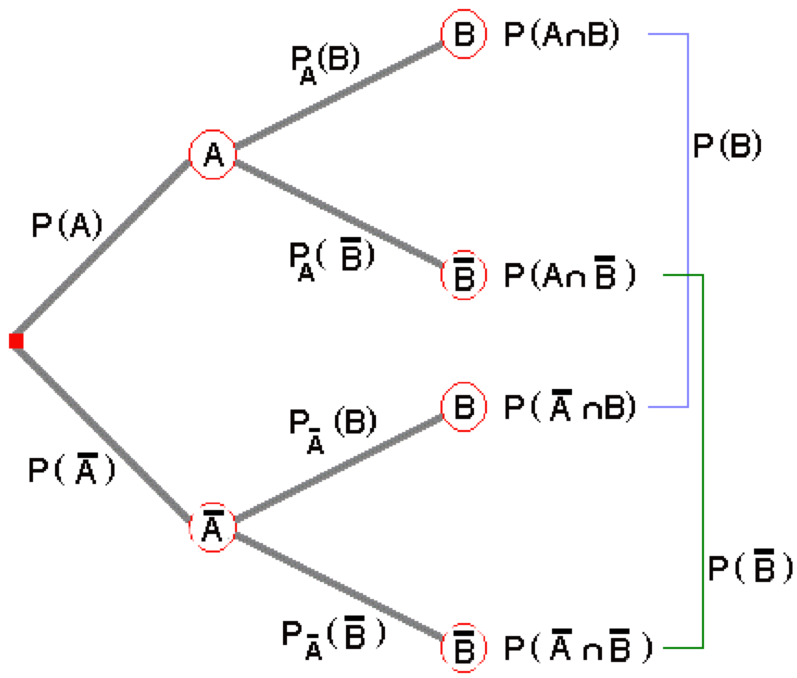
	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Spalten-summe	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1





Musterbeispiele:

Vorteilhaft für die Nutzung weitere Stufen ist die Anordnung in waagerechter Form. Die Darstellung $P_A(B)$ ist eine Schreibweise für die Bedingte Wahrscheinlichkeit, auf die später eingegangen wird,

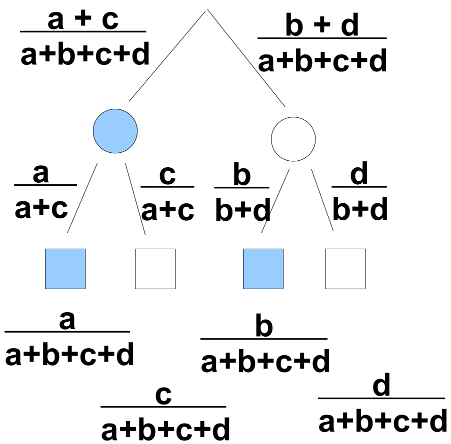


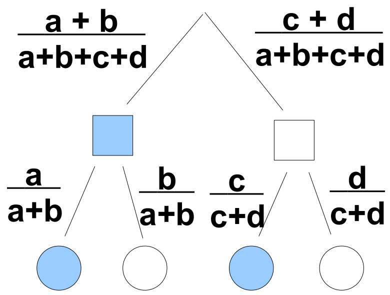
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bäume

Gesetze und Regeln

Die Grundgesamtheit setzt sich aus den Summanden a, b, c und d der Vier-Felder-Tafel zusammen. Bei Prozentangaben ergeben diese Zahlen zusammen 100 %, sie beziehen sich also alle auf die Grundgesamtheit.
Ist man jedoch an Anteilen (relativen Häufigkeiten) bzw. Wahrscheinlichkeiten interessiert, so sind Quotienten zu bilden. Ihre Summe ist für eine Verästelung stets 1.





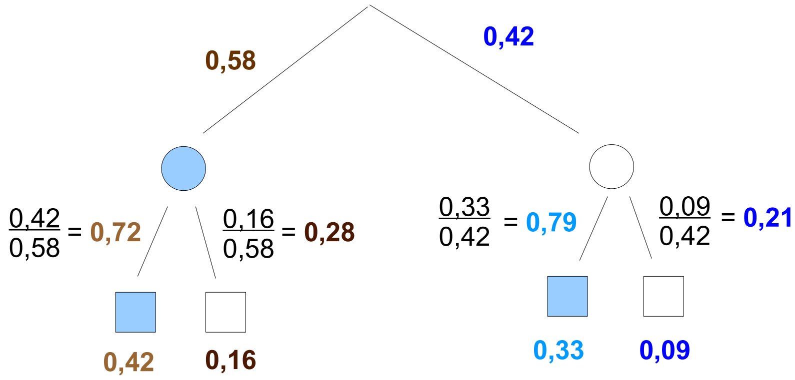
Die Wahrscheinlichkeiten der linken Darstellung auf der ersten Stufe können sofort aus der Vierfeldertafel abgelesen werden (und zwar aus der gesamt Zeile/ Spalte des ersten Merkmals). Die Pfadwahrscheinlichkeiten sind ebenfalls sofort abzulesen ().
Nur die Wahrscheinlichkeiten auf der zweiten Stufe müssen berechnet werden! Etwa mit Hilfe der Pfadregel:

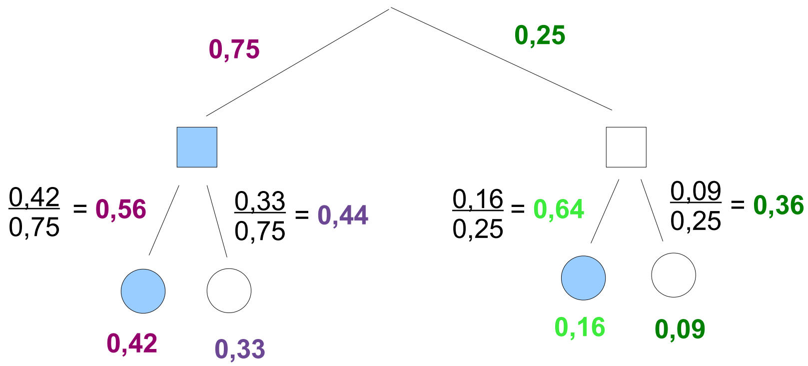
> Die gesuchte Teilwahrscheinlichkeit p in der zweiten Stufe muss multipliziert mit der bekannten (ersten) Teilwahrscheinlichkeit die Pfadwahrscheinlichkeit ergeben.

$$\frac{a}{a+b+c+d} = p \cdot \frac{a+c}{a+b+c+d} \qquad p = \frac{a}{a+c}$$

Musterbeispiele

	männlich	weiblich	gesamt
Abschluss (A)	0,42	0,33	0,75
kein Abschluss (kA)	0,16	0,09	0,25
gesamt	0,58	0,42	1,00





Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bäume	**Bedingte Wahrscheinlichkeit**	

Bäume

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm mit Zurücklegen (mit Wiederholung)

Das bestimmende Merkmal für diese Art von Zufallsexperimenten besteht darin, dass vor jedem neuen versuch die Ausgangssituation des ersten Versuchs wieder hergestellt wird. Deshalb bezeichnet man diese Art in Anlehnung an die Simulation mit einem Urnenmodell, in dem Kugeln gezogen werden müssen, als „mit Zurücklegen“

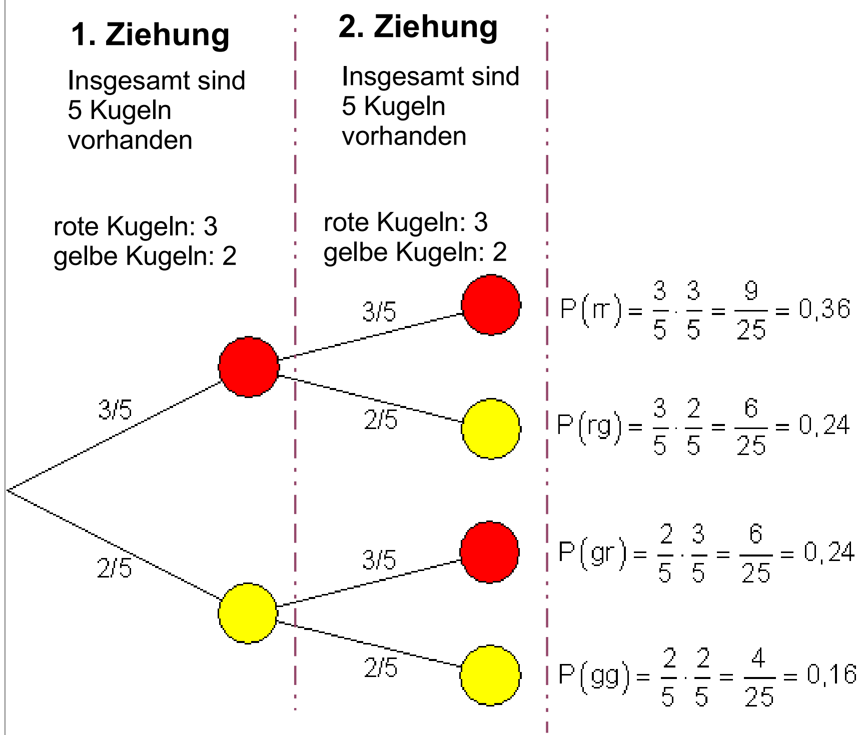
Merkmale

- Vor jedem neuen Versuch ist die Ausgangssituation wieder hergestellt.
- Die Wahrscheinlichkeiten sind bei jedem Versuch die gleichen, da die Zahl „aller“ Ereignisse und die Zahl der „positiven“ Ereignisse immer gleich sind.

Betrachtet man im Baumdiagramm die **erste Ziehung** für die rote Kugel, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(A) dafür:
eine rote Kugel aus der Gesamtmenge Ω zu ziehen: $P_{\Omega}(A) = 3/5$
(= die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung der Grundmenge Ω)

Betrachtet man die **zweite Ziehung** für die rote Kugel, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(A) dafür:
eine rote Kugel aus der Gesamtmenge Ω zu ziehen: $P_{\Omega}(A) = 3/5$
(= die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung der Grundmenge Ω)
da durch das Zurücklegen die Ausgangsmenge wieder zurückgesetzt wurde.

In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln **mit** zurücklegen gezogen.



	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	**P(rg)=0,24**	**P(rr)=0,36**	**P(A)=3/5 = 0,24+0,36**
$\overline{A}$	**P(gg)=0,16**	**P(gr)=0,24**	**P($\overline{A}$)=2/5 = 0,16+0,24**
Spalten-summe	**P(B) = 2/5 = 0,16+0,24**	**P($\overline{B}$)= 3/5 = 0,36 + 0,24**	**1**

Intensivkurs – Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bäume

Baumdiagramm ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung)

Das bestimmende Merkmal für diese Art von Zufallsexperimenten besteht darin, dass vor jedem neuen Versuch eine neue Ausgangssituation vorhanden ist, da das Ergebnis des ersten Versuchs Auswirkung auf das Ergebnis des zweiten Versuchs hat. Deshalb bezeichnet man diese Art in Anlehnung an die Simulation mit einem Urnenmodell, in dem Kugeln gezogen werden müssen, als „ohne Zurücklegen“

Merkmale

- Vor jedem neuen Versuch existiert eine neue Ausgangssituation
- Die Wahrscheinlichkeiten sind bei jedem Versuch verschieden, da die Zahl „aller“ möglichen Ereignisse sich um 1 reduziert (Nenner wird um 1 kleiner) und die Zahl der „positiven“ Ereignisse durch vorherige Versuche verändert wurde.

Betrachtet man im Baumdiagramm die **erste Ziehung** für die rote Kugel, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(A) dafür:
eine rote Kugel aus der Gesamtmenge Ω zu ziehen: $P_{\Omega}(A) = 3/5$

(= die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung der Grundmenge Ω)

Betrachtet man die **zweite Ziehung** für die rote Kugel, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(A) dafür:
eine rote Kugel aus einer Menge zu ziehen,. aus der bereits eine (rote oder gelbe) gezogen wurde:

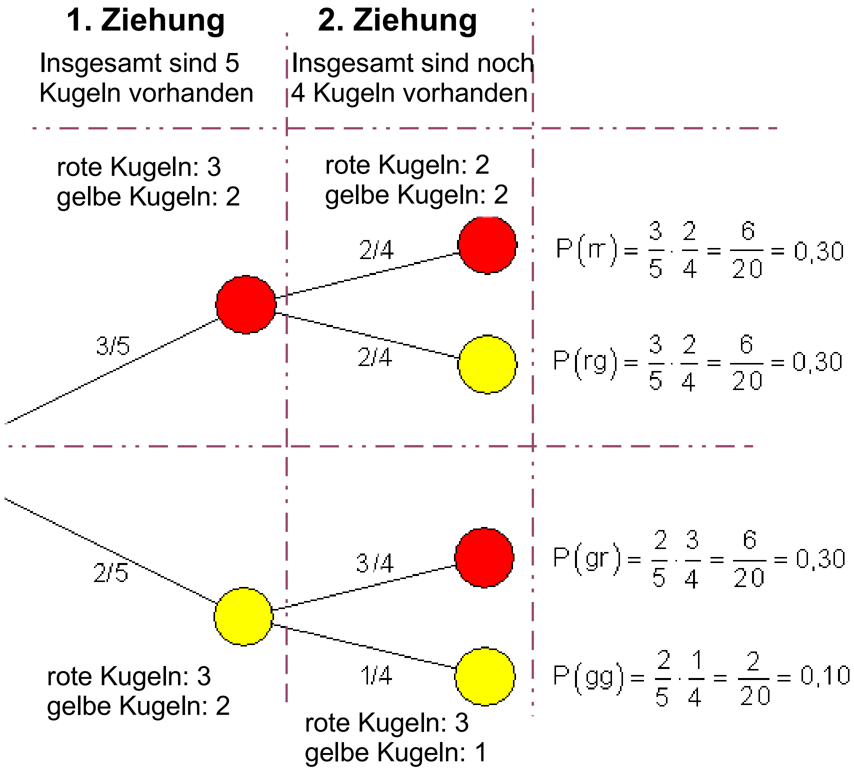
$P_A(B) = 2/4$, $P_A(\overline{B}) = 2/4$, $P_{\overline{A}}(B) = 3/4$, $P_{\overline{A}}(B) = 1/4$.

(= die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B (oder $\overline{B}$) unter der Bedingung, dass das Ereignis A (oder $\overline{A}$) eingetreten ist.)

Beim zweiten Versuch hat sich die Ausgangsmenge für alle Versuche geändert, alle Wahrscheinlichkeiten haben sich gegenüber dem ersten Versuch geändert.

Musterbeispiele

In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln **ohne** zurücklegen gezogen.



	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	**P(rg)=3/10**	**P(rr)=3/10**	**P(A)=3/5**
$\overline{A}$	**P(gg)=1/10**	**P(gr)=3/10**	**P($\overline{A}$)=2/5**
Spalten-summe	**P(B) = 2/5**	**P($\overline{B}$)= 3/5**	**1**

Intensivkurs – Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bäume

Gesetze und Regeln

Bei Versuchen mit Zurücklegen ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Bei Versuchen ohne Zurücklegen ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Da $P(A)\, P_A(B) = P(A \cap B)$ und die Reihenfolge am Ende der beiden Ziehung unwichtig ist, folgt daraus auch: $P(B)\, P_B(A) = P(A \cap B)$

Deshalb ist es möglich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $P_A(B)$ zu berechnen, wenn die Wahrscheinlichkeit von A – P(A) – und die Wahrscheinlichkeit von $A \cap B$ – $P(A \cap B)$ – bekannt sind:

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$$\boxed{P(A)\, P_A(B) = P(B)\, P_B(A)} \quad \text{und} \quad \boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Musterbeispiele

Bedingte Wahrscheinlichkeit kann aus der Vierfeldertafel nicht abgelesen werden, aber sie läßt sich aus der Vierfeldertafel bestimmen:

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	**P(rg)=3/10**	**P(rr)=3/10**	**P(A)=3/5**
$\overline{A}$	**P(gg)=1/10**	**P(gr)=3/10**	**P($\overline{A}$)=2/5**
Spalten-summe	**P(B) = 2/5**	**P($\overline{B}$)= 3/5**	**1**

Betrachtet man das Ereignis $A \cap \overline{B}$, so kann man der Vierfeldertafel entnehmen,. dass die Wahrscheinlichkeit dafür 3/10 beträgt.

- die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt ist 3/5 (Zeilen-summe von A)
- um die bedingte Wahrscheinlichkeit von $\overline{B}$ unter der Bedingung A zu bestimmen bezieht man die Wahrscheinlichkeit $A \cap \overline{B} = 3/10$ auf die Wahrscheinlichkeit von A :

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

Im Baumdiagramm auf der vorherigen Seite als 2/4 angegeben.

Von dem zuerst eingetretenen Ereignisses ist die Spalten- oder Zeilensumme zu nehmen und die „zusammengesetzte" Wahrschein-lichkeit auf diese Summe zu beziehen, was bedeutet, durch diese Summe zu teilen.

Intensivkurs – Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung

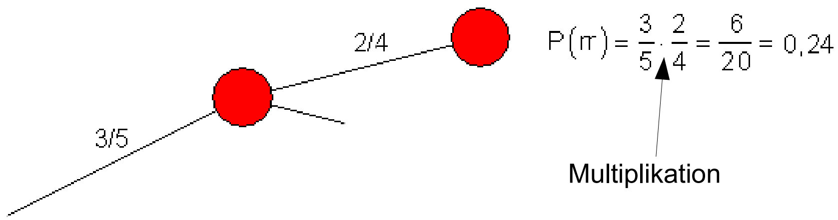
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bäume

Pfadregeln

1. Pfadregel – Produktregel

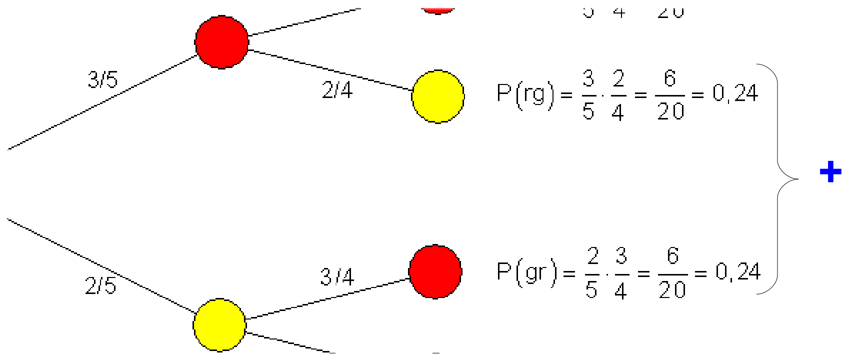
In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** entlang eines Pfades gleich dem ***Produkt der Wahrscheinlichkeiten*** der einzelnen Wahrscheinlichkeiten eines Teilpfades.



2. Pfadregel – Ereignisregel

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** gleich der ***Summe der zugehörigen Ergebnisse***.

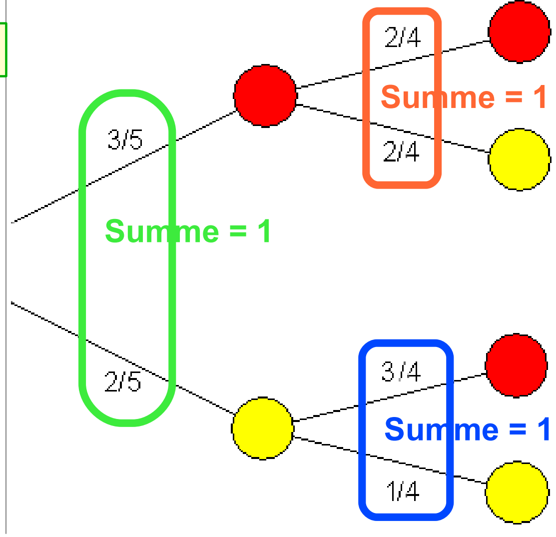
(ein Ereignis kann sich aus vielen Einzelergebnissen zusammensetzen, z.B setzt sich das ***Ereignis*** eine rote und eine gelbe Kugel zu ziehen, aus zwei ***Ergebnissen*** zusammen.)



Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Kugel gelb und eine Kugel rot ist, setzt sich aus zwei Teilwahrscheinlichkeiten zusammen:
1. Kugel rot; 2. Kugel gelb; **+** 1. Kugel gelb; 2. Kugel rot; = 0,48

3. Pfadregel – Verzweigungsregel

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von ein und demselben Verzweigungspunkt ausgehen, ist immer 1.



Treff Lernen
Christina Strauch