Aufgabe	Lösung	Erläuterung

Exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse

Funktionsgleichung

Die Grundfunktion
- des **exponentiellen Wachstum** beruht auf der Funktion $y = e^{kx}$ oder $y = a^x$ mit $a > 1$.
- der **exponentiellen Abnahme** beruht auf der Funktion $y = e^{-kx}$ oder $y = a^x$ mit $0 < a < 1$.

Differenzialgleichung (Wachstumsrate)

Die Wachstumsrate (1. Ableitung)
- des **exponentiellem Wachstum/Abnahme** ist proportional zum Bestand:

$$\boxed{f'(t) = k\, f(t)}$$

Rekursive Formel

$$\boxed{B(t+1) = q\, B(t)}$$

Diskrete Berechnungen

$$\boxed{B(n) = B(0)\, q^n}$$

Konstantenumrechnung

$$\boxed{k = \ln(q)}$$

$k > 0$: Wachstum
$k < 0$: Abnahme

$$\boxed{a = q = e^k}$$

$a > 1$: Wachstum
$0 < a < 1$: Abnahme

Ändert sich ein alter Wert f(0) mit jedem Schritt mit einem festen positiven Faktor q, so spricht man von einer exponentiellen Änderung.

Quotientengleichheit

Der Quotient der Werte von einem Schritt zum vorhergehenden ist stets gleich q:

$$\mathbf{f(n+1) : f(n) = q}$$

Nach n Schritten gilt dann für den neuen Wert f(n):

$$\mathbf{f(n) = f(0) \cdot q^n}$$

Exponentielles Wachstum

$$\boxed{\mathbf{q > 1}}$$

Exponentielle Abnahme

$$\boxed{\mathbf{0 < q < 1}}$$

Änderungsfaktor und Schrittlänge

Der Änderungsfaktor q wird nicht nur von der Schnelligkeit des Wachstums- oder Abnahmeprozesses bestimmt, sondern auch von der jeweiligen **Schrittlänge**. Schrittlängen sind oft Zeitspannen, können aber auch andere Größen sein, wie im folgenden Beispiel.

Exponentialfunktion

Ändert sich ein alter Wert f(0) mit jedem Schritt der Länge 1 mit dem Faktor q, dann ändert er sich mit jedem Schritt der Länge k mit dem Faktor q^k:

$$\mathbf{f(n) = f(0) \cdot q^n \quad \Leftrightarrow \quad f(kn) = f(0) \cdot (q^k)^n}$$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

Der normale Luftdruck auf Meereshöhe beträgt ca. 1013 hPa. Mit jedem Kilometer Höhe nimmt der Luftdruck um 11,3% ab. In einem Kilometer Höhe beträgt er also etwa 899 hPa, in zwei Kilometern Höhe etwa 797 hPa, in drei Kilometern Höhe etwa 707 hPa usw.

Mit jedem Kilometer Höhe verringert sich der Luftdruck mit dem Faktor 0,887. In einer Höhe von n Kilometern über dem Meer ist also ein Luftdruck f(n) [in hPa] zu erwarten von

$$\mathbf{f(n) = 1013 \cdot 0{,}887^n.}$$

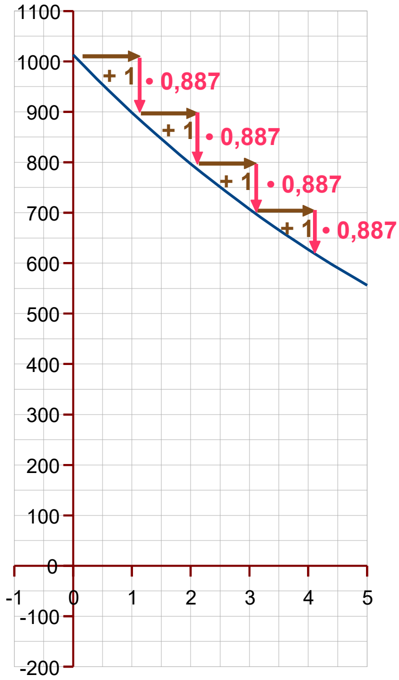
In **n Kilometern Höhe** über dem Meer gilt für den Luftdruck f(n) [in hPa]:

$f(n) = 1013 \cdot 0{,}887^n$.

Wie ändert sich der Luftdruck **je 100 m** Höhe?

$$\begin{aligned} f(n/10) &= 1013 \cdot 0{,}887^{n/10} \\ &= 1013 \cdot (0{,}887^{0{,}1})^n \\ &= 1013 \cdot 0{,}988^n \end{aligned}$$

Je 100 Meter Höhe verringert sich der Luftdruck mit dem Faktor 0,988.



Aufgabe	Lösung	Erläuterung

beschränkte Wachstums- und Abnahmeprozesse

Die Grundfunktion
- des **exponentiellen Wachstum** beruht auf der Funktion $y = e^{kx}$ oder $y = a^x$ mit $a > 1$.
- der **exponentiellen Abnahme** beruht auf der Funktion $y = e^{-kx}$ oder $y = a^x$ mit $0 < a < 1$.

Die Wachstumsrate (1. Ableitung)
- des **exponentiellem Wachstum/Abnahme** ist proportional zum Bestand:

$$f'(t) = k\, f(t)$$

Beschränktes Wachstum

Die Grundfunktion
- des **beschränkten Wachstum** beruht auf der

Funktion oder

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = S - (S - f(0))\, e^{-kx} \\ f(x) = S - (S - f(0))\, a^x \\ S - f(0) > 0 \end{array}}$$

mit $0 < a < 1$;

S ist die obere Grenze, die nicht überschritten werden kann;

Beschränkte Abnahme

- der **beschränkten Abnahme** beruht auf der

Funktion oder

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = S - (S - f(0))\, e^{-kx} \\ f(x) = S - (S - f(0))\, a^x \\ S - f(0) < 0 \end{array}}$$

mit $0 < a < 1$;

S ist die untere Grenze, die nicht unterschritten werden kann

Exponentielle Abnahme als Spezialfall: S = 0

$f(x) = f(0)\, a^x$ mit $0 < a < 1$

Variable in der Gleichung

Die Formel des beschränkten Wachstum besteht aus 5 Variablen.
- f(0) : Bestand zum Zeitpunkt 0
- f(t) : Bestand zu einem Zeitpunkt t
- t : Zeitpunkt, zu dem ein Bestand bekannt ist, oder berechnet werden soll
- S : obere /untere Grenze
- k : Wachstums- oder Abnahmefaktor

Sättigungsmanko

Die Differenz **S – f(t)** bezeichnet man als **Sättigungsmanko**.

Differenzialgleichung (Wachstumsrate)

Die Wachstumsrate (1. Ableitung)
- des **beschränkten Wachstum/Abnahme** ist proportional zum Sättigungsmanko:

$$\boxed{f'(t) = k\,(S - f(t))}$$

Änderungsfaktor und Schrittlänge

Die Zu- oder Abnahme ist proportional zur Differenz des aktuellen Wertes bis zur Grenze.

Rekursionsgleichung

$$\boxed{B(t+1) = B(t) + k_b\,(S - B(t))}$$

$S - B(0) > 0$: Wachstum
$S - B(0) < 0$: Abnahme

Diskrete Berechnung

$$\boxed{B(n) = S - (S - B(0))\, k_b^{\,n}}$$

Konstantenumrechnung

diskreter Wachstumskoeffizient in stetigen Wachstumskoeffizient

$$\boxed{k = -\ln(1 - k_b)}$$

$k > 0$: Wachstum
$k < 0$: Abnahme

stetiger Wachstumskoeffizient in diskreten Wachstumskoeffizient

$$\boxed{k_b = 1 - e^{-k}}$$

$k_b > 1$: Wachstum
$0 < k_b < 1$: Abnahme

Für kleine Werte von k oder k_b sind die Unterschiede sehr gering.

k_b	k	Differenz
0	0	
0,01	0,0100	0,0000
0,02	0,0198	-0,0002
0,03	0,0296	-0,0004
0,04	0,0392	-0,0008
0,05	0,0488	-0,0012
0,06	0,0583	-0,0017
0,07	0,0677	-0,0023
0,08	0,0770	-0,0030
0,09	0,0862	-0,0038
0,1	0,0953	-0,0047
0,11	0,1044	-0,0056
0,12	0,1133	-0,0067
0,13	0,1222	-0,0078
0,14	0,1310	-0,0090
0,15	0,1398	-0,0102
0,16	0,1484	-0,0116
0,17	0,1570	-0,0130
0,18	0,1655	-0,0145
0,19	0,1740	-0,0160
0,2	0,1823	-0,0177
0,21	0,1906	-0,0194
0,22	0,1989	-0,0211
0,23	0,2070	-0,0230
0,24	0,2151	-0,0249
0,25	0,2231	-0,0269
0,26	0,2311	-0,0289
0,27	0,2390	-0,0310

Aufgabe	Lösung	Erläuterung
Auflösung der Funktionsgleichung nach den auftretenden Variablen	Diskrete Funktion	stetige Funktion
	$k_b = \sqrt[t]{\frac{S-B(t)}{S-B(0)}} + 1$	
	$k =$	$\frac{\ln\left(\frac{S-B(t)}{S-B(0)}\right)}{t}$
	$B(0) = \frac{B(t)-S}{(1-k_b)^t} + S$	$(B(t)-S)\, e^{t\cdot k} + S$ *(kein negatives Vorzeichen im Exponenten)*
	$t = \frac{\ln\left(\frac{S-B(t)}{S-B(0)}\right)}{\ln(1-k_b)}$	$\frac{\ln\left(\frac{S-B(t)}{S-B(0)}\right)}{k}$
	$S = \frac{B(t)-(1-k_b)^t\, B(0)}{1-(1-k_b)^t}$	$\frac{B(t)-B(0)\cdot e^{-k\cdot t}}{1-e^{-k\cdot t}}$

Exponentialfunktion

Quotientengleichheit

Ändert sich ein alter Wert f(0) mit jedem Schritt mit einem festen positiven Faktor k_b, in Abhängigkeit von der Differenz zu einem nicht zu unter- bzw. überschreitenden Grenzwertes, dann spricht man von einem beschränkten Wachstum/Abnahme.

$$\mathbf{f(n) = S - f(0) \cdot k_b^{\,n}}$$

Der Quotient der Differenzen von einem Schritt zum vorhergehenden ist stets gleich k_b:

$$\mathbf{\frac{f(n+1) - f(n)}{f(n) - f(n-1)} = k_b}$$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

1. Exponentielles Wachstum

1.1. Berechnung von altem Wert, neuem Wert und Schrittzahl

1. Drei Seetang-Gewächse verdoppeln jede Woche ihre Länge.

a) Gewächs ❶ war zu Beginn der Beobachtung 90 cm lang. Wie lang war es 4 Wochen später ?

$f(t) = f(0)\ a^t$

b) Gewächs ❷ war vier Wochen nach Beginn der Beobachtung 38,4 m lang. Welche Länge hatte es bei der ersten Messung?

$f(0) = f(t)\ a^{-t}$

c) Gewächs ❸ ist derzeit 70 cm lang. In wie vielen Wochen wird es etwa 45 m lang sein?

$t = \dfrac{\ln(f(t)) - \ln(f(0))}{\ln a}$

Schrittlänge: 1 Woche
Wachstumsfaktor: 2
f(n): Länge nach n Wochen [cm]
Gleichung: $f(n) = f(0) \cdot 2^n$

a) $n = 4;\quad f(0) = 90$
$f(4) = 90 \cdot 2^4 = 1\,440$
Gewächs ❶ war 14,4 m lang.

b) $n = 4;\ f(4) = 3\,840$
$f(4) = f(0) \cdot 2^4 = 3\,840$

$f(0) = \dfrac{3840}{16} = 240$

Gewächs ❷ war 2,40 m lang.

c) $f(0) = 70;\quad f(n) = 4\,500$
$f(n) = 70 \cdot 2^n = 4\,500$

$2^n = \dfrac{4500}{70} \approx 64{,}3 \Leftrightarrow n \approx 6$

In 6 Wochen wird Gewächs etwa 45 m lang sein.

---

2. Die Mieten für die Wohnungen in der Klapperstraße 13 werden jährlich um 2,5% erhöht.

Schrittlänge: 1 Jahr
Wachstumsrate: 2,5 %
Wachstumsfaktor: 1,025
f(n): Mietpreis in n Jahren [€]
Gleichung: $f(n) = f(0) \cdot 1{,}025^n$

a) Herr Ballermann zahlt heute 450 € Monatsmiete. Wie viel wird er in 7 Jahren bezahlen?

a) $n = 7;\quad f(0) = 450$
$f(7) = 450 \cdot 1{,}025^7 = 534{,}91$
Er wird etwa 535 € bezahlen.

b) Familie Wacker zahlt heute 600 € Monatsmiete. Wie viel hat sie vor 7 Jahren gezahlt?

b) $n = 7;\ f(7) = 600$
$f(7) = f(0) \cdot 1{,}025^7 = 600$

$\Leftrightarrow f(0) = \dfrac{600}{1{,}025^7} \approx 504{,}76$

Sie hat etwa 505 € gezahlt.

c) In welchem Zeitraum verdoppeln sich die Mieten?

c) $f(n) = 2 \cdot f(0)$
und $f(n) = f(0) \cdot 1{,}025^n$
$\Leftrightarrow 2 \cdot f(0) = f(0) \cdot 1{,}025^n$

$\Leftrightarrow 2 = 1{,}025^n \Leftrightarrow n = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}025} \approx 28{,}1$

Die Mieten verdoppeln sich etwa alle 28 Jahre.

---

3. Durchdringen radioaktive Strahlen eine Bleiplatte, so nimmt die Intensität der Strahlung pro Millimeter Dicke um 4,5 % ab.

Schrittlänge: 1 Millimeter
Abnahmerate: 4,5%
Abnahmefaktor: 0,955
f(0): anfängliche Strahlungsintensität
f(n): Strahlungsintensität hinter einer n Millimeter starken Bleiplatte
Gleichung: $f(n) = f(0) \cdot 0{,}955^n$

a) Wie viel Prozent der anfänglichen Strahlungsintensität lässt eine 8 mm starke Bleiplatte durch?

a) n=8 ;
$f(8) = f(0) \cdot 0{,}955^8 = f(0) \cdot 0{,}692$
Die Bleiplatte lässt noch etwa 69% der Strahlung durch.

b) Wie stark muss eine Bleiplatte sein, damit die anfängliche Strahlungsintensität halbiert wird?

b) $f(n) = \frac{1}{2} \cdot f(0)$ und $f(n) = f(0) \cdot 0{,}955^n$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot f(0) = f(0) \cdot 0{,}955^n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0{,}955^n \Leftrightarrow n = \dfrac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}955} \approx 15{,}05$

Sie muss etwa 15 mm stark sein.

Erläuterung

Bei vielen Aufgaben zu exponentiellen Änderungsprozessen ist der
► Änderungsfaktor q und die
► zugehörige Schrittlänge gegeben.

Sind zusätzlich zwei der drei Größen
► alter Wert: f(0)
► neuer Wert: f(n)
► Anzahl der Schritte: n
bekannt, dann kannst du die fehlende Größe daraus so berechnen:

- Setze in die Gleichung
  $f(n) = f(0) \cdot q^n$
  den Wert für q sowie die beiden anderen gegebenen Werte ein. Löse dann nach dem gesuchten Wert auf .

Hinweise:

❶ Sind nur der Änderungsfaktor q und die Anzahl der Schritte n gegeben, dann kannst du aus diesen beiden Angaben das Verhältnis von neuem Wert f(n) und altem Wert f(0) berechnen:
$f(n) : f(0) = q^n \Leftrightarrow f(n) = f(0) \cdot q^n$

❷ Ist nur der Änderungsfaktor q bekannt, dann kannst du die Anzahl der erforderlichen Schritte berechnen, damit sich der alte Wert mit einem bestimmten Faktor c ändert:
$f(n) = f(0) \cdot q^n$ und $f(n) = c \cdot f(0)$

$\Leftrightarrow c = q^n \Leftrightarrow n = \dfrac{\lg c}{\lg q}$.

Verdopplungs- und Halbwertszeit

Bei einigen Fragestellungen ist diejenige Zeitspanne von Interesse, innerhalb derer sich der alte Wert verdoppelt (q>1) bzw. halbiert (0 < q < 1). In diesem Zusammenhang spricht man dann von "Verdopplungszeit" bzw. "Halbwertszeit".

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

1.2. Berechnung von Wachstums– und Abnahmefaktoren

1. Salmonellen vermehren sich unter bestimmten Bedingungen exponentiell. Anfangs befinden sich in einem Liter Fleischextrakt 100 Salmonellen, drei Stunden später etwa 32 000.

   Mit etwa welchem Faktor wächst die Anzahl stündlich?

Schrittlänge: 1 Stunde
f(n): Anzahl der Salmonellen nach n Stunden
Gleichung: $f(n) = 100 \cdot q^n$

$n = 3$; $f(0) = 100$; $f(3) = 32\,000$
$f(3) = 32\,000$ und $f(3) = 100 \cdot q^3$
$\Leftrightarrow 32\,000 = 100 \cdot q^3$
$\Leftrightarrow q^3 = 320 \Leftrightarrow q = 6{,}84$
Die Anzahl wächst stündlich mit dem Faktor 6,84.

Wenn folgende Werte gegeben sind
► der Ausgangswert f(0),
► ein neuer Wert f(n)
► die Anzahl der Schritte n,
dann kannst daraus den Faktor q Berechnet werden, mit dem sich die Werte mit **jedem** Schritt ändern:
• Setze in die Gleichung
$\mathbf{f(n) = f(0)\ .\ q^n}$
die Werte für f(n), f(0) sowie n ein und löse nach q auf.

---

2. Chrom 51 hat eine Halbwertszeit von 27,8 Tagen.

a) Wie viel Prozent beträgt die tägliche Abnahme?

b) Zu Beginn einer Beobachtung sind 300 mg Chrom 51 vorhanden. Stelle die Gleichung der Funktion f auf, die die tägliche Abnahme beschreibt.

Schrittlänge: 1 Tag
f(n): Masse nach n Tg. [mg]
Gleichung: $f(n) = f(0) \cdot q^n$
$n = 27{,}8$; $c = ½$

a) $f(27{,}8) = ½\, f(0)$ und $f(27{,}8) = f(0) \cdot q^{27{,}8}$
$½\, f(0) = f(0) \cdot q^{27{,}8} \Leftrightarrow q^{27{,}8} = ½$

$\Leftrightarrow q = ½^{\frac{1}{27{,}8}} \Leftrightarrow q \approx 0{,}9754$

$q = 1 - \frac{p}{100} \Leftrightarrow \frac{p}{100} = 0{,}0246$

$\Leftrightarrow p = 2{,}46$
Die tägliche Abnahme beträgt etwa 2,46%.

b) $f(0) = 300$; $q \approx 0{,}9754$
$f(n) = 300 \cdot 0{,}9754^n$

Wenn folgende Werte gegeben sind
► Anzahl der Schritte
► ein Faktor c der einen vorhandenen bestand in den vervielfachten Bestand ändert
Kann daraus der Faktor q berechnet werden, mit dem sich die Werte mit **jedem** Schritt ändern.

❶ Setze in die Gleichungen
$\mathbf{f(n) = c \cdot f(0)}$ **und** $\mathbf{f(n) = f(0) \cdot q^n}$
die Werte für n und c ein.

❷ Setze die beiden Terme für f(n) gleich und dividiere durch f(0).
Du erhältst die Gleichung
$\mathbf{c = q^n}$
Löse sie nach q auf.

1.3. Berechnung von altem Wert, neuem Wert und Schrittzahl

1. Eine exponentiell wachsende Bakterienkultur verdreifacht ihre Masse alle zwei Tage. Mit welchem Faktor wächst sie

a) täglich?

b) wöchentlich?

c) stündlich?

Schrittlänge 2 Tage: $c = 3$

a) 1 Tag = ½ · 2 Tage
$q = 3^{½} = \sqrt{3} = 1{,}732$

Die Masse wächst täglich mit dem Faktor 1,732.

b) 1 Woche = 3,5 · 2 Tage
$q = 3^{3{,}5} \approx 46{,}77$
Die Masse wächst wöchentlich mit dem Faktor 46,77.

c) 1 Stunde = $\frac{1}{48}$ 2 Tage

$q = 3^{\frac{1}{48}} \approx 1{,}023$
Die Masse wächst stündlich mit dem Faktor 1,023.

Wenn folgende Werte gegeben sind
► ein Faktor c
► eine Schrittlänge d_1 in der sich Der Bestand um den Faktor ändert,
Kann daraus der Änderungsfaktor q zu einer anderen Schrittlänge d_2 berechnet werden
❶ Rechne die Schrittlänge d_2 in die Schrittlänge d_1 um:
$d_2 = k \cdot d_1$
❷ Berechne q: $q = c^k$

Hinweise:

1. Der Änderungsfaktor q wird nicht nur von der Schnelligkeit des Wachstums- bzw. Abnahmeprozesses bestimmt, sondern auch von der jeweiligen Schrittlänge.
2. Ändert sich ein alter Wert mit jedem Schritt der Länge 1 mit dem Faktor q, so ändert er sich mit jedem Schritt der Länge k mit dem Faktor q^k:
$f(n) = f(0) \cdot q^n$
$\Leftrightarrow f(kn) = f(0) \cdot (q^k)^n$

1.4. Differenzialgleichung des exponentiellen Wachstums

Aufgabe	Lösung	Erläuterung
Der Bestand einer Population von Feldmäusen entwickelt sich ungefähr nach der Differenzialgleichung f'(t) = 0,07·f(t), wobei f(t) die (idealisierte) Zahl der Mäuse (pro Hektar) zum Zeitpunkt t (in Monaten) angibt.	$f'(t) = 0{,}07 \cdot f(t)$	Lösung als Differenzialgleichung $f'(t) = k\ f(t)$ $\frac{f'(t)}{f(t)} = k$ $\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \int k\,dt$
a) Wie lange dauert es, bis sich eine Population von 170 Feldmäusen auf 3000 vermehrt ?	$f(t) = C\,e^{0{,}07 \cdot t}$ Zm Zeitpunkt t = 0 gibt es 170 Feldmäuse. $f(0) = 170 = C\,e^{0{,}07 \cdot 0}$ $170 = C$ $f(t) = 170 \cdot e^{0{,}07 \cdot t}$	weil: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(\lvert f(x)\rvert)$ $\ln\lvert f(t)\rvert = k\,t + C$ Integrationskonstante $\lvert f(t)\rvert = e^{kt} \cdot e^{C}$ e^C ist auch nur eine Konstante, deshalb kann man dafür auch wieder C schreiben. da e – Funktion immer positiv, kann der Betrag weg gelassen werden. $f(t) = C\,e^{kt}$

2. Prozentuales Wachstum

Aufgabe	Lösung	Erläuterung
1. Bestimme den Änderungsfaktor, wenn mit jedem Schritt a) der alte Wert um 12% wächst.	a) Es liegt Wachstum vor. $p\% = 12\% \Leftrightarrow \frac{p}{100} = 0{,}12$ $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}12$	Handelt es sich um eine exponentielle Änderung und ist die prozentuale Änderungsrate p% bekannt, dann lässt sich daraus der Änderungsfaktor q bestimmen:
b) der alte Wert um 4,8% abnimmt.	b) Es liegt Abnahme vor. $p\% = 4{,}8\% \Leftrightarrow \frac{p}{100} = 0{,}048$ $q = 1 - \frac{p}{100} = 0{,}952$	Wachstum: $q = 1 + \frac{p}{100}$ Abnahme: $q = 1 - \frac{p}{100}$
c) der alte Wert um ein Fünftel wächst.	c) Es liegt Wachstum vor. $p\% = 20\% \Leftrightarrow \frac{p}{100} = 0{,}2$ $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}2$	**Hinweise:** Der Faktor q, mit dem sich der alte Wert bei jedem Schritt ändert, heißt **Änderungsfaktor**. Für q > 1 spricht man von **Wachstumsfaktor**, für 0 < q < 1 von **Abnahmefaktor**.
d) der alte Wert um ein Viertel abnimmt.	d) Es liegt Abnahme vor $p\% = 25\% \Leftrightarrow \frac{p}{100} = 0{,}25$ $q = 1 - \frac{p}{100} = 0.75$	Den Prozentsatz, um den ein Wert von einem Schritt zum nächsten wächst oder abnimmt, nennt man **prozentuale Änderungsrate**.

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

3. Zinseszinsrechnung

2. Sandra hat zu ihrem 13. Geburtstag ein Sparbuch mit 1000 € bekommen. Das Geld ist bis zu ihrem 18. Geburtstag mit einem Zinssatz von 3,5% festgelegt. Aus ihrem 18. Geburtstag will Sandra ein Mega-Event machen. Sie rechnet mit Kosten von 1 300 €. Sandra hebt ihr Erspartes ab.

a) Wie viele Euro fehlen noch?

b) Wie viel hätte am Anfang gespart werden müssen, damit das Geld gereicht hätte?

c) Bei welchem Zinssatz hätten die 1 000 € gereicht?

d) Vor wie vielen Jahren hätte Sandra das Sparbuch bekommen müssen, damit das Geld gereicht hätte?

a) Laufzeit: $n = 5$ [Jahre]
Anfangskapital: $K_0 = 1\,000$ [€]
Zinsfaktor: $q = 1{,}035$
gesucht: Endkapital K_5
$K_5 = 1\,000 \cdot 1{,}035^5$
$K_5 = 1\,188$
Es fehlen ca. 112 €.

b) Laufzeit: $n = 5$ [Jahre]
Endkapital: $K_5 = 1\,300$ [€]
Zinsfaktor: $q = 1{,}035$
gesucht: Anfangskapital K_0
$1\,300 = K_0 \cdot 1{,}0355$

$$K_0 = \frac{1300}{1{,}035^5} = 1\,095$$

Es hätten ca. 1 095 € gespart werden müssen.

c) Laufzeit: $n = 5$ [Jahre]
Anfangskapital: $K_0 = 1\,000$ [€]
Endkapital: $K_5 = 1\,300$ [€]
gesucht: Zinssatz p%
$1\,300 = 1\,000 \bullet q^5$

$$q = \sqrt{\frac{1300}{1000}} = 1{,}054$$

p% = 5,4%
notwendiger Zinssatz: 5,4%

d) Anfangskapital: $K_0 = 1\,000$ [€]
Endkapital: $K_n = 1\,300$ [€]
Zinsfaktor: $q = 1{,}035$
gesucht: Laufzeit n
$1\,300 = 1000 \cdot 1{,}035^n$
$1{,}035^n = 1300 / 1000$
$n \cdot \lg 1{,}035 = \lg 1{,}3$

$$n = \frac{\lg 1{,}3}{\lg 1{,}035} = 7{\cdot}6$$

Laufzeit: etwa 8 Jahre

Wird ein Kapital zu einem Zinssatz von p% verzinst und bleiben die Zinsen auf dem Konto stehen, so wächst das Guthaben jährlich nach der Formel:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Dabei bedeuten:
n: Laufzeit [in Jahren]
K_0: Anfangskapital
K_n: Endkapital nach n Jahren
q: Zinsfaktor, der sich aus dem Zinssatz p% ergibt:

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

Kennst du drei der vier Größen, so kannst du die vierte berechnen.
Gehe so vor:
1. Schreibe auf, welche Größen bekannt sind.
2. Ist der Zinssatz p% gegeben, so berechne den Zinsfaktor q:

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

3. Setze die Größen in die Gleichung $K_n = K_0 \cdot q^n$ ein und löse nach der gesuchten Größe auf.
4. Ist der Zinssatz p% gesucht, so berechne zunächst q und anschließend p.

Hinweise:

Da ab dem 2. Jahr nicht nur das Anfangskapital K_0, sondern auch die jeweiligen Zinsen verzinst werden, spricht man von **Zinseszinsen**.

3. a) Ein Kapital wird mit einem Zinssatz von 4,5% angelegt. Nach wie vielen Jahren hat es sich verdoppelt?

b) Zu welchem Zinssatz muss ein Kapital angelegt werden, wenn es sich nach 12 Jahren verdoppelt haben soll?

a) Anfangskapital: K_0
Endkapital: $K_n = 2\,K_0$
Zinsfaktor: $q = 1{,}045$
gesucht: Verdopplungszeit n
$2\,K_0 = K_0 \cdot 1{,}045^n$
$1{,}045^n = 2$
$n \cdot \lg 1{,}045 = \lg 2$

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}045} = 15{,}7$$

Verdopplungszeit: 16 Jahre

b) Anfangskapital: K_0
Endkapital: $K_n = 2\,K_0$
Verdopplungszeit: $n = 12$
gesucht: Zinssatz p%
$2K_0 = K_0 \cdot q^{12} \Leftrightarrow q^{12} = 2$
$\Leftrightarrow q = \sqrt[12]{2} = 1{,}059$
p% = 5,9%
notwendiger Zinssatz: 5,9%

Verdoppelt sich ein zu p% angelegtes Kapital nach n Jahren durch Zinseszinsen, dann gilt für das Endkapital K_n:

$$K_n = 2 \cdot K_0 \text{ und } K_n = K_0 \cdot q^n$$

Hieraus folgt:
$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot q^n$; also
$\mathbf{q^n = 2}$

Dabei ist $q = 1 + \frac{p}{100}$

Hinweise:

Die Verdopplungszeit eines Kapitals hängt nur vom Zinssatz p% ab und nicht vom Anfangskapital. Für die Verdopplungszeit n gilt die folgende Näherung:

$$\mathbf{n \approx \frac{70}{p}}$$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

4. Beschränktes Wachstum

4.1. Berechnung von altem Wert, neuem Wert und Schrittzahl

1. Ein Glas Milch aus dem Kühlschrank (4°C) wird auf Raumtemperatur (20°C) gebracht

Zeit (min)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Temp.	4	8	11,3	13,3	15	16,3

a) Welche Temperatur hat die Milch nach 5 min

$$\boxed{f(t) = S - (S - f(0))\, e^{-kt}}$$

a) $S = 20$
$f(0) = 4°$
$k = 0{,}609265$
$t = 5$

$f(x) = S - (S - f(0))\, e^{-kx}$

$f(t) = 20 - (20 - 4)\, e^{-0{,}609265 \cdot t}$

$f(5) = 20 - 16\, e^{-0{,}609265 \cdot 5}$

$f(5) = 20 - 16 \cdot 0{,}04753$
$= 19{,}24$

Die Gleichung für beschränktes Wachstum enthält 5 Werte. Damit müssen vier Werte bekannt sein, wenn man aus **<u>einer Gleichung</u>** einen Wert berechnen soll

Bei vielen Aufgaben zu beschränkten Wachstumsprozessen ist
- ► die Grenze
- ► der Wachstumsfaktor

gegeben.
Sind zusätzlich zwei der drei Größen
- ► alter Wert: $f(0)$
- ► neuer Wert: $f(t)$
- ► Zeitpunkt: t

bekannt, dann kann die 5. fehlende Größe berechnet werden.

b) Die Milch hatte nach 2 min 15°, wie kalt war sie zum Zeitpunk 0.

Gegeben:	Gesucht:
S	$f(0)$
k	
t_1	
$f(t_1)$	

$$\boxed{f(0) = (S - f(t))\, e^{-kt} - S}$$

b) $S = 20$
$t = 2$
$f(2) = 15°$
$k = 0{,}609265$

$15 = 20 - (20 - f(0))\, e^{-0{,}609265 \cdot 2}$

$-5 = -(20 - f(0))\, e^{-1{,}1285}$

$\dfrac{-5}{e^{-1{,}1285}} = -16{,}91 = -20 + f(0)$

$f(0) = 3{,}08$

c) Die Milch hat nach 2 min 15°, wann hat sie 18,5 ° erreicht.

Gegeben:	Gesucht:
S	t_1
k	
$f(0)$	
$f(t_1)$	

$$\boxed{t = \frac{\ln\left(\dfrac{S - f(t)}{S - f(0)}\right)}{k}}$$

c) $S = 20$
$f(0) = 4$
$f(t_1) = 18{,}5°$
$k = 0{,}609265$

$18{,}5 = 20 - (20 - 4)\, e^{-0{,}609265 \cdot t}$

$\dfrac{18{,}5 - 20}{-(20 - 4)} = e^{-0{,}609265 \cdot t}$

$\ln(0{,}09375) = -0{,}609265 \cdot t$
$-2{,}3671 = -0{,}609265 \cdot t$
$3{,}88 = t$

4.2. Berechnung von Wachstumsfaktoren

a) Die Milch wurde zum Zeitpunkt 0 mit 4° aus dem Kühlschrank genommen. Nach 1 min hatte die Milch 11,3°.
Berechne den Wachstumskoeffizienten k.

$$\boxed{k = \frac{\ln\left(\dfrac{S - f(t)}{S - f(0)}\right)}{t}}$$

a) $S = 20$
$f(0) = 4°$
$t = 1$
$f(1) = 11{,}3°$

$11{,}3 = 20 - (20 - 4)\, e^{-k1}$

$\dfrac{11{,}3 - 20}{-(20 - 4)} = e^{-k}$

$\ln(0{,}54375) = -k$
$0{,}609265 = k$

Für das Berechnen des Wachstumsfaktors k müssen zwei Bestandswerte mit ihren Zeitpunkten bekannt sein, außerdem die Grenze S.

Ist einer dieser Bestandswerte f(0), dann ergibt sich eine Gleichung.

b) Die Milch wurde aus dem Kühlschrank genommen. Nach 1 min hatte die Milch 11,3° und nach 2,5 min 16,3°
Berechne den Wachstums koeffizienten k.

$$\boxed{k = \frac{\ln\left(\dfrac{S - B(t_2)}{S - B(t_1)}\right)}{t_2 - t_1}}$$

b) $S = 20$
$f(1) = 11{,}3°$
$f(2{,}5) = 16{,}3°$

$11{,}3 = 20 - (20 - f(0))\, e^{-k1}$
$16{,}3 = 20 - (20 - f(0))\, e^{-k2{,}5}$

$\dfrac{11{,}3 - 20}{e^{-k}} = 20 - f(0)$

$\dfrac{16{,}5 - 20}{e^{-2{,}5\,k}} = 20 - f(0)$

$\dfrac{11{,}3 - 20}{e^{-k}} = \dfrac{16{,}5 - 20}{e^{-2{,}5\,k}}$

Ist keiner der Bestandswerte der Wert zum Zeitpunkt 0, dann ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem.

Beide Gleichungen nach S – f(0) auflösen und Gleichsetzen.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

$$\frac{11{,}3-20}{e^{-k}} = \frac{16{,}5-20}{e^{-2{,}5\,k}}$$

$$\frac{11{,}3-20}{16{,}5-20} = e^{-k} \bullet e^{2{,}5\,k} = e^{1{,}5\,k}$$

$$\frac{-8.7}{-3{,}5} = e^{1{,}5\,k}$$

$$\ln(2{,}4857) = 1{,}5\,k$$

$$k = 0{,}6070$$

f(0) kann berechnet werden, wie unter 4.1. b) angegeben.

Exponentialfunktionsausdrücke und konstante Zahlen jeweils auf eine Seite bringen

Zusammenfassung nach den Potenzgesetzen

4.3. Berechnung der Grenze

a) Die Milch wurde zum Zeitpunkt 0 mit 4° aus dem Kühlschrank genommen. Nach 1 min hatte die Milch 11,3° bei einem Abkühlungskoeffizienten k = 0,609265. Berechne die untere Grenze S.

$$\boxed{S = \frac{f(t) - f(0)\cdot e^{-k\cdot t}}{1 - e^{-k\cdot t}}}$$

a) $k = 0{,}609265$
$f(0) = 4°$
$t = 1$
$f(1) = 11{,}3°$

$$11{,}3 = S - (S-4)\, e^{-0{,}609265}$$

$$11{,}3 - 4\, e^{-0{,}609265} = S\,(1 - e^{-0{,}609265})$$

$$11{,}3 - 2{,}175 = S \bullet 0{,}45625$$

$$20 = S$$

Für das Berechnen der Grenze S müssen zwei Bestandswerte mit ihren Zeitpunkten bekannt sein, außerdem der Wachstumsfaktor k.

Ist einer dieser Bestandswerte f(0), dann ergibt sich eine Gleichung.

b) Die Milch wurde aus dem Kühlschrank genommen. Nach 1 min hatte die Milch 11,3° und nach 2,5 min 16,3° Berechne die obere Grenze.

$$\boxed{S = \frac{f(t_1)\, e^{kt1} - f(t_2)\, e^{kt2}}{e^{kt1} - e^{kt2}}}$$

b) $k = 0{,}609265$
$f(1) = 11{,}3°$
$f(2{,}5) = 16{,}3°$

$$11{,}3 = S - (S - f(0))\, e^{-0{,}609265}$$

$$16{,}3 = S - (S - f(0))\, e^{-1{,}5731625}$$

$$\frac{11{,}3 - S}{e^{-0{,}609265}} = S - f(0)$$

$$\frac{16{,}5 - S}{e^{-1{,}5731625}} = S - f(0)$$

$$\frac{11{,}3 - S}{e^{-0{,}609265}} = \frac{16{,}5 - S}{e^{-1{,}5731625}}$$

$$(11{,}3 - S)\, e^{0{,}609265} = (16{,}5 - S)\, e^{1{,}5731625}$$

$$11{,}3 \bullet e^{0{,}609265} - 16 \bullet e^{1{,}5731625} = S(e^{0{,}609265} - e^{1{,}5731625})$$

$$\frac{11{,}3 \bullet e^{0{,}609265} - 16 \bullet e^{1{,}5731625}}{e^{0{,}609265} - e^{1{,}5731625}} = S$$

$$\frac{20{,}7816 - 77{,}14997}{1{,}839079 - 4{,}82187} = S$$

$$18{,}9 = S$$

Ist keiner der Bestandswerte der Wert zum Zeitpunkt 0, dann ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem.

Beide Gleichungen nach S – f(0) auflösen und Gleichsetzen.

Gleichungen gleichsetzen und nach S auflösen.

c) Die Milch wurde mit 4° aus dem Kühlschrank genommen. Nach 1 min hatte die Milch 11,3° und nach 2,5 min 16,3°. Berechne den Wachstumskoeffizienten k und die obere Grenze.

c) $f(0) = 4$
$f(1) = 11{,}3°$
$f(2{,}5) = 16{,}3°$

$$11{,}3 = S - (S-4)\, e^{-k1}$$

$$16{,}3 = S - (S-4)\, e^{-k2{,}5}$$

Gleichungssysteme mit einer Unbekannten im Exponenten und einer Unbekannten auf der Grundlinie lassen sich nicht mehr auflösen.
Es muss logarithmiert werden und dabei entstehen Logarithmenausdrücke, die Summen enthalten und deshalb nicht mehr auflösbar sind.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

4.4. Die Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums

1)

Ein Teich bietet Platz für maximal 7000 Fische. In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist. Anfangs befinden sich 4000 Fische im Teich. Nach einem Monat sind 4400 Fische vorhanden.

a) Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.

b) Bestimmen Sie eine Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

$f'(t) = k\,(S - f(t))$

a)

$f'(t) = k\,(7000 - f(t))$

b)

$f(x) = S - (S - f(0))\, e^{-kx}$

$f(x) = 7000 - 3000\, e^{-kx}$

für $x = 1$ ist $f(1) = 4400$

liefert $k = 0{,}143$

Lösung als Differenzialgleichung

$f'(t) = k\,(7000 - f(t))$

$$\frac{f'(t)}{7000 - f(t)} = k$$

$$\int \frac{f'(t)}{7000 - f(t)}\, dt = \int k\, dt$$

weil:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(|f(x)|)$$

$- \ln |7000 - f(t)| = k\,t + C$

$|7000 - f(t)| = e^{-kt}\, e^{C}$

e^{C} ist auch nur eine Konstante, deshalb kann man dafür auch wieder C schreiben

Das Auflösen des Betrages führt zu beschränktem Zuwachs oder beschränkter Abnahme:

$S - f(t) > 0$ beschränktes Wachstum

$S - f(t) < 0$ beschränkte Abnahme

$f(t) = 7000 - C\, e^{-kt}$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gab es 4000 Fische:

$f(0)= 4000 = 7000 - C \cdot 1$

$\Rightarrow C = 3000$

(aus der Berechnung von C wird klar, dass C nur S – f(0) sein kann)

Zum Zeitpunkt $t = 1$ gab es 4400 Fische:

$f(1) = 4400 = 7000 - 3000\, e^{-k1}$

$\Rightarrow k = 0{,}143$

2)

Das beschränkte Wachstum einer Population genügt der folgenden Gleichung

$f(x) = 7000 - 3000\, e^{-0{,}143x}$

Gib die zugehörige Differenzialgleichung an.

$f(x) = 7000 - 3000\, e^{-0{,}143x}$

$f'(x) = -3000\,(-0{,}143)\, e^{-0{,}143x}$

$$\frac{f'(x)}{-0{,}143} = -3000 \cdot e^{-0{,}143x}$$

$$f(x) = 7000 + \frac{f'(x)}{-0{,}143}$$

$-0{,}143\, f(x) = 7000\,(-0{,}143) + f'(x)$

$f'(x) = 0{,}143\,(7000 - f(x))$

4.5. Die Differenzialgleichung der beschränkten Abnahme

Heißer Kaffee von 70°C kühlt sich bei einer Zimmertemperatur von 20°C innerhalb von 10 Minuten auf 48° ab. Danach bleibt er weitere 20 Minuten stehen. Anschließend wird er zur Herstellung von Eiskaffee in die Tiefkühltruhe mit -18°C gestellt.

$f'(t) = k\,(S - f(t))$

$\quad = k\,(20 - f(t))$

$\boxed{f(t) = 20 + 50\; e^{-0{,}05798\, t}}$

Temperatur nach weiteren 20 min ist die Temperatur nach 30 min

$f(30) = 20 + 50 \cdot e^{-0{,}05798 \cdot 30}$

$\quad = 28{,}78°$

Für die Tiefkühltruhe ändern sich $S = -18°$; $f(0) = 29°$

(Die Zeit beginnt wieder bei 0)

k als „Materialkonstante" bleibt erhalten.

$29 = -18 - C \cdot 1$

$-47 = C$

$\boxed{f_2(t) = -18 + 47 \cdot e^{-0{,}05798\, t}}$

$$\frac{f'(t)}{20 - f(t)} = k$$

$$\int \frac{f'(t)}{20 - f(t)}\, dt = \int k\, dt$$

$- \ln |20 - f(t)| = k\,t + C$

$|20 - f(t)| = e^{-kt}\, e^{C}$

$20 - f(t) < 0$

$f(t) = 20 - C\, e^{-kt}$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ war die Temperatur 70°

$70 = 20 - C \cdot 1$

$50 = -C$

$-50 = C$

Zum Zeitpunkt $t = 10$ war die Temperatur 48°:

$f(10) = 48 = 20 + 50\, e^{-k10}$

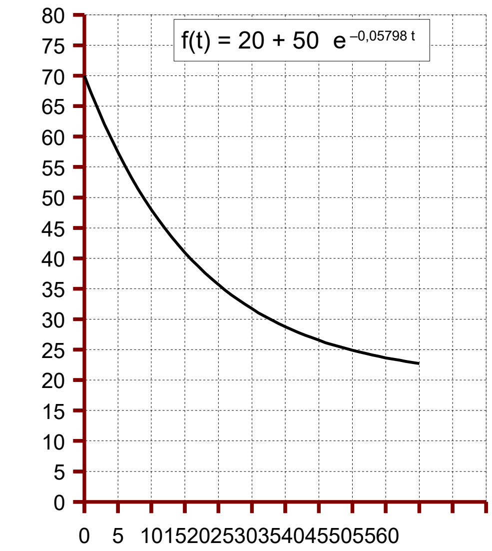
$\Rightarrow k = 0{,}05798$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

Wertetabelle

7	53,3202
8	51,4432
9	49,6720
10	48,0005
11	46,4232
12	44,9348
13	43,5302
14	42,2047
15	40,9539
16	39,7735
17	38,6596
18	37,6085
19	36,6166
20	35,6806
21	34,7973
22	33,9637
23	33,1771
24	32,4348
25	31,7344
26	31,0734
27	30,4496
28	29,8610
29	29,3055
30	28,7813
31	28,2866

Funktionsbild

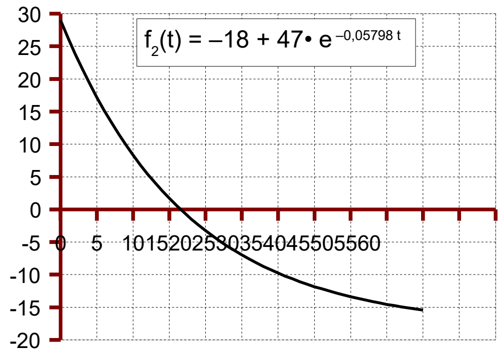


- Wie lange dauert es insgesamt, bis sich der Kaffee von 70°C auf 5°C abgekühlt hat?

5° sind erreicht bei:
$5 = -18 + 47 \cdot e^{-0{,}05798\,t}$
$t = 12{,}32$ min

Nach insgesamt 42,32 min ist der Kaffee auf 5° abgekühlt.

Funktionsbild



- Wann erreicht er die Temperatur 0°C?

0° sind erreicht bei:
$0 = -18 + 47 \cdot e^{-0{,}05798\,t}$
$t = 16{,}55$ min

Wertetabelle

10	8,3205
11	6,8378
12	5,4387
13	4,1184
14	2,8724
15	1,6966
16	0,5871
17	-0,4599

4.6. Lineare Zunahme und beschränkte Abnahme

In einem Wasserbecken, das sowohl eine Zufluss- als auch eine Abflussmöglichkeit besitzt, befinden sich zu einem bestimmten Zeitpunkt 100 m³ Wasser. Ab diesem Zeitpunkt ändert sich das Wasservolumen im Becken, wobei die **Änderungsrate** des Volumens durch

$v(t) = -0{,}49e^{-0{,}007t}$ $(t > 0)$

beschrieben wird. (t in Stunden, v(t) in m³ pro Stunde).

a) Nimmt die Wassermenge im Becken zu oder ab?

b) Bestimmen Sie einen Funktionsterm V (t) für das Wasservolumen!

a)
Darüber entscheidet das Vorzeichen der 1. Ableitung. v(t) ist die erste Ableitung, da es die Änderungs**rate** ist.
Die Funktionswerte von v(t) sind immer negativ, also nimmt die Wassermenge ab.

b)
Die tatsächliche Wassermenge ist das Integral über die Änderungsrate:

$$V(t) = -0{,}49 \int_0^t e^{-0{,}007x}\,dx$$

$$= \frac{0{,}49}{0{,}007}\left[e^{-0{,}007x}\right]_0^t = 70\,e^{-0{,}007t} - 70$$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung
c) Mit welchem Wasservolumen im Becken ist langfristig zu rechnen?	$V(t) = 70\, e^{-0,007t} - 70$ Die sich verändernde Wassermenge ist zu den ursprünglich 100m³ zu addieren. Da die Werte negativ sind, reduziert sich die Wassermenge: $V(t) = 100 + (70\, e^{-0,007t} - 70)$ $= 30 + 70\, e^{-0,007t}$ Für $t \to \infty$ beträgt der Grenzwert 30 m³ .	Für $t \to \infty$ beträgt der Grenzwert -70 m³. Es fließen also 70 m³ ab. Da der erste Teil der Funktion positiv ist, nähert sich die Funktion von oben dem Grenzwert.
d) V (t) erfüllt eine Differenzialgleichung der Form V'(t) = 0,007 (a – V (t)). Bestätigen Sie dies!	*(Im allgemeinen sollte hier das Ableiten der Funktion V(t) ausreichen, und dann mit dem Ausdruck der 1. Ableitung gleichsetzen. Es ist nicht das Lösen der Differenzialgleichung verlangt!)* $V(t) = 30 + 70\, e^{-0,007t}$ $V'(t) = -70 \cdot 0,007\, e^{-0,007t}$ $= -0,49\, e^{-0,007t}$ $-0,49\, e^{-0,007t}$ $= 0,007\,(a - 30 - 70\, e^{-0,007t})$ $= -0,49\, e^{-0,007t} + 0,007\,(a - 30)$ Für a = 30 ist die Differenzialgleichung erfüllt.	*(Für Hardliner das Vorgehen mit der Differenzialgleichung)* $\int \frac{V'(t)}{a - V(t)}\, dt = 0,007$ $\int \frac{V'(t)}{V(t) - a}\, dt = -0,007\, dt$ $\ln(\lvert V(t) - a \rvert) + C = -0,007t$ $(V(t) - a)\; e^{C} = e^{-0,007t}$ $V(t) = a + C'\, e^{-0,007t}$ Die Gleichung für die Änderungsrate war (siehe Aufgabenstellung): $v(t) = -0,49 e^{-0,007t}$ $= V'(t) = -0,007\, C'\, e^{-0,007t}$ $C' = \frac{0,49}{0,007} = 70$ $V(t) = a + 70\, e^{-0,007t}$ Für a = 30 wird die oben gefundene Funktion V(t) erfüllt.
e) Begründen Sie mithilfe dieser Differenzialgleichung, dass die Veränderung auf einen konstanten Zufluss und einen vom Bestand zeitabhängigen Abfluss zurückgeführt werden kann!	Für a = 30 fließt also eine Menge von $0,007 \cdot a = 0,007 \cdot 30 = 0,21$ m³ als konstante Menge zu und $0,007 \cdot V(t) = 0,007 \cdot (30 + 70\, e^{-0,007t})$ ab. dh. für t = 10 : 0,6669 m³ für t = 100: 0,4533 m³ für t = 300: 0,2700 m³ für t = 600: 0,2173 m³	$V'(t) = 0,007\,(a - V(t))$ Der erste Ausdruck $0,007 \cdot a$ ist ein konstanter Zufluss, da positiv und zeitunabhängig. Der zweite Ausdruck ist eine zeitabhängige Größe, die durch negatives Vorzeichen einen Abfluss kennzeichnet.
	An Hand der Daten sieht man, dass die abfließende Menge immer kleiner wird, bis sie im Grenzfall den Wert des konstanten Zulaufs erreicht und sich damit ein Gleichgewicht zwischen Zulauf und Ablauf einstellt, somit ein Grenzwert für den Bestand an Wasser.	
f) Wie groß müsste dieser konstante Zufluss sein, damit sich im Becken langfristig ein Wasservolumen von 50m³ einstellt, wenn V(t) eine Differenzialgleichung der angegeben Form erfüllt?	Um einen Grenzwert von 50 m³ zu erreichen, muss für den Grenzwert a der Wert 50 eingesetzt werden. Damit ergibt sich für den konstanten Zulauf: $0,007 \cdot 50 = 0,35$ m³.	

4.7 Abituraufgaben

Abitur 2009

Fünf Stunden nach Ausbruch der Krankheit erhält der Erkrankte ein Fieber senkendes Medikament.
Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Temperatur nach der Gesetzmäßigkeit des beschränkten Wachstums und nähert sich der normalen Körpertemperatur.
Zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments beträgt die Temperatur 38,4°C.

$g(0) = 39{,}5°C$
$g(2) = 38{,}4°C$
$S = 36{,}5°C$

zu bestimmen ist der Wachstumskoeffizient k.

$g(t) = S - (S - g(0))\, e^{-kt}$

Auflösung der Gleichung nach k:

$$\frac{S - g(t)}{S - g(0)} = e^{-kt}$$

$$k = -\frac{1}{t} \ln \frac{S - g(t)}{S - g(0)}$$

Jetzt wird der gegebene Wert $g(2) = 38{,}5°C$ eingesetzt:

$$k = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{36{,}5 - 38{,}4}{36{,}5 - 39{,}5}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{-1{,}9}{-3}\right) = -\frac{1}{2} \ln(0{,}63333)$$

$$= 0{,}2284$$

$$\boxed{g(t) = 36{,}5 + 3\, e^{-0{,}2284\, t}}$$

Zunächst ist von bisherigen Krankheitsverlauf f(5) zu berechnen, das sich in diesem Fall zu 39,5 ergeben hat. das ist jetzt der Anfangsbestand g(0) für die weitere Rechnung.
Zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments beträgt die Körpertemperatur 38,4°C.
Die normale Körpertemperatur wurde in der Aufgabenstellung mit 36,5°C angegeben.

Abitur 2011

In einer benachbarten Stadt mit 30.000 Einwohner ist bei Beobachtungsbeginn bereits die Hälfte der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit alle Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

Die etwas verklärte Formulierung:

. . . . wöchentliche Erkrankungsrate **proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten** Einwohner ist.

soll auf beschränktes Wachstum hinweisen.

Die DGL für beschränktes Wachstum:

$f'(t) = k\,(S - f(t))$ $\quad f(0) = 15\,000$, $S = 30\,000$, $k = 0{,}1$

$f'(t) = 0{,}1\,(30\,000 - f(t))$

$f(t) = S - (S - f(0))\, e^{-kt}$

$f(t) = 30\,000 - 15\,000\, e^{-0{,}1\, t}$

Bei dieser Funktion ergibt sich für t = 4:

$f(4) = 30\,000 - 15\,000\, e^{-0{,}4} = 19\,945$

ACHTUNG ! Es steht nicht in der Aufgabenstellung, dass die Differenzialgleichung zu lösen ist !

Wenn man die Werte kennt, kann man auch eine Funktion angeben, ohne die Dgl zu lösen:

c) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an. Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an. Bestimmen sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.
Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein ?
Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22.000 Personen.
Passen Sie die Funktion an die tatsächliche Situation an.

$f(4) = 22\,000 = 30\,000 - 15\,000\, e^{-k \cdot 4}$

$$\frac{22\,000 - 30\,000}{-15\,000} = e^{-k \cdot 4}$$

$$\ln(0{,}533333) = -k\, 4$$
$$-\tfrac{1}{4} \ln(0{,}533333) = k$$
$$0{,}1571 = k$$

$f(t) = 30\,000 - 15\,000\, e^{-0{,}1571\, t}$

Jetzt sind aber nach 4 Wochen tatsächlich 22 000 Personen erkrankt. Deshalb ist ein neuer Wachstumsfaktor zu bestimmen

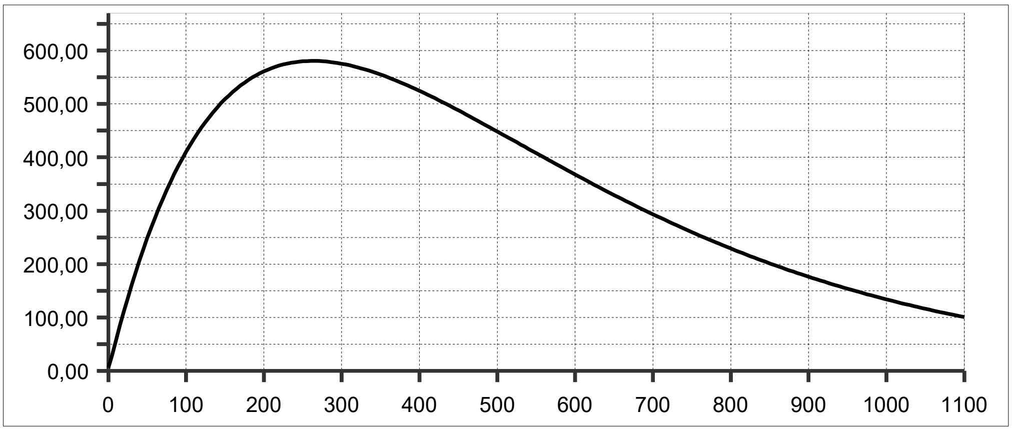
5. Medikamentöse Wirkstoffmenge im Blut

Eine Abwandlung des exponentiellen Wachstums ist die Berechnung von Wirkstoffmengen im Blut. Für exponentielles Wachstum ist dafür ausschlaggebend, dass die Verabreichung des des Medikamentes nur zum Zeitpunkt t = 0 erfolgt. Für immer wiederkehrenden Wirkstoff ist mit der Grundaufgabenstellung des beschränkten Wachstums zu arbeiten.
Die in diesem Abschnitt auftretenden Funktionen sind in den letzten Jahren zum Thema „Anwendung der Exponentialfunktion" im Abitur aufgetreten und werden deshalb hier auf ihre Eigenschaften untersucht. Auch, wenn im Abitur auf eine Bearbeitung mit dem GTR gewollt ist, macht die analytische Bearbeitung doch vieles einfacher und überschaubarer.

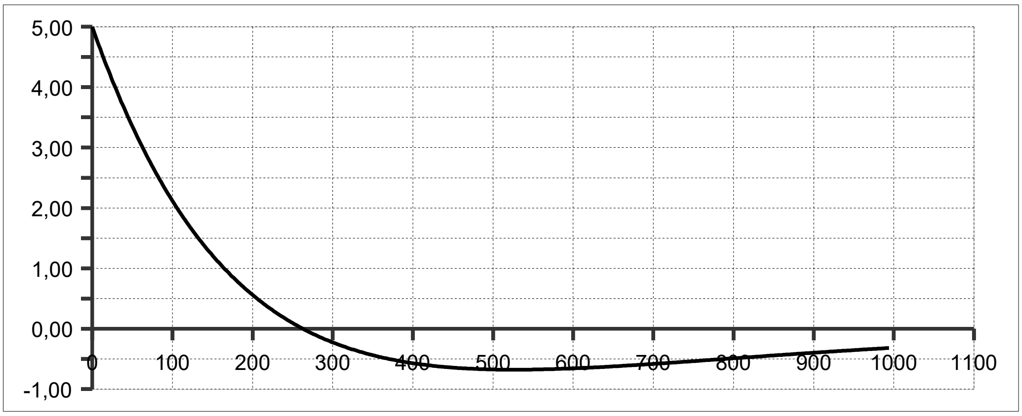
Diese Funktionen machen nur Sinn, wenn der Exponent eine negative Zahl ist. Deshalb wurden hier die negativen Vorzeichen im Exponenten mit angegeben. Damit sind die Werte für k positiv, die Exponenten aber negativ. Negative Exponenten bewirken, dass für wachsendes x die Funktionswerte gegen 0 (=x-Achse) streben. Positive Exponenten würden eine schnelleres streben nach unendlich bewirken.

5.1. Analyse der Funktion $y = x\,e^{-kx}$

f(x)



f ' (x)



5.1.1 Extremwert

Extremwert:

=> $\boxed{x_E = \frac{1}{k}}$

$y = a\,x\,e^{-kx}$
$y' = a\,(e^{-kx} - kx\,e^{-kx})$
$= a\,e^{-kx}\,(1 - kx)$

5.1.2 Wendepunkt

Wendepunkt

=> $\boxed{x_W = \frac{2}{k} = 2\,x_E}$

$y'' = a\,(-ke^{-kx} - ke^{-kx} + k^2\,xe^{-kx})$
$= a\,ke^{-kx}\,(-2 + kx)$

Beliebte Fragestellung n diesem Zusammenhang ist, gesucht sind die Punkte des steilsten Anstiegs und des steilsten Abfallens. Grundsätzlich sind diese Punkte die Wendepunkte einer Kurve. In dem steigenden Teil der Kurve gibt es aber keinen Wendepunkt. In diesem Teil ist der Punkt des steilsten Anstiegs der Nullpunkt (Randextremum). Betrachtet man die erste Ableitung werden in der Klammer Werte von x subtrahiert, so dass da der größte Wert entsteht, wenn x = 0 ist. Betrachtet man die e-Funktion, so ist e^{-x} eine monoton fallende Funktion, für größer werdende x werden die Funktionswerte kleiner. Damit hat die erste Ableitung ihren größten Wert bei x = 0.

Damit ist der steilste mögliche Anstieg: $f'(0) = a \quad \left(= a\, e^{-0}\right)$ *(s. Anstieg des zweiten Wendepunktes)*

Der Wendepunkt auf der monoton fallenden Seite der Funktion hat als Anstieg: $f'\left(\frac{2}{k}\right) = -a\, e^{-2}$

5.1.3 Abituraufgabe

Abitur 2009

Die normale Körpertemperatur eines gesunden Menschen liegt bei 36,5°C. Die Funktion f mit

$$f(t) = 36{,}5 + t\, e^{-0{,}1t}$$

beschreibt modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve bei einem Erkrankten. Dabei ist t ≥ 0 die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und f(t) die Körpertemperatur in °C.

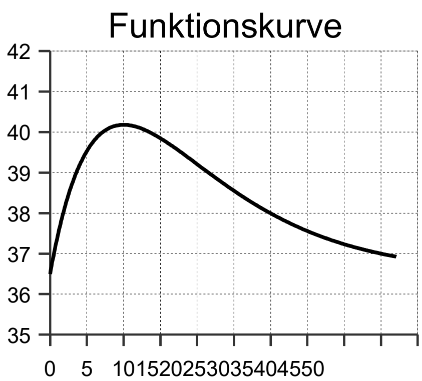
Die höchste Körpertemperatur tritt nach 10 Stunden auf. Der verwendete k Wert beträgt k = 0,1.

Die Formel für den Extremwert : $x_E = \frac{1}{k}$

Damit ergibt sich aus hier $x_E = 10$.

Die stärkste Abnahme erfolgt im Wendepunkt bei x = 20.

Nach der hergeleiteten Formel ist der Wendepunkt $x_W = 2\, x_E$. Auch das entspricht dem Ergebnis.



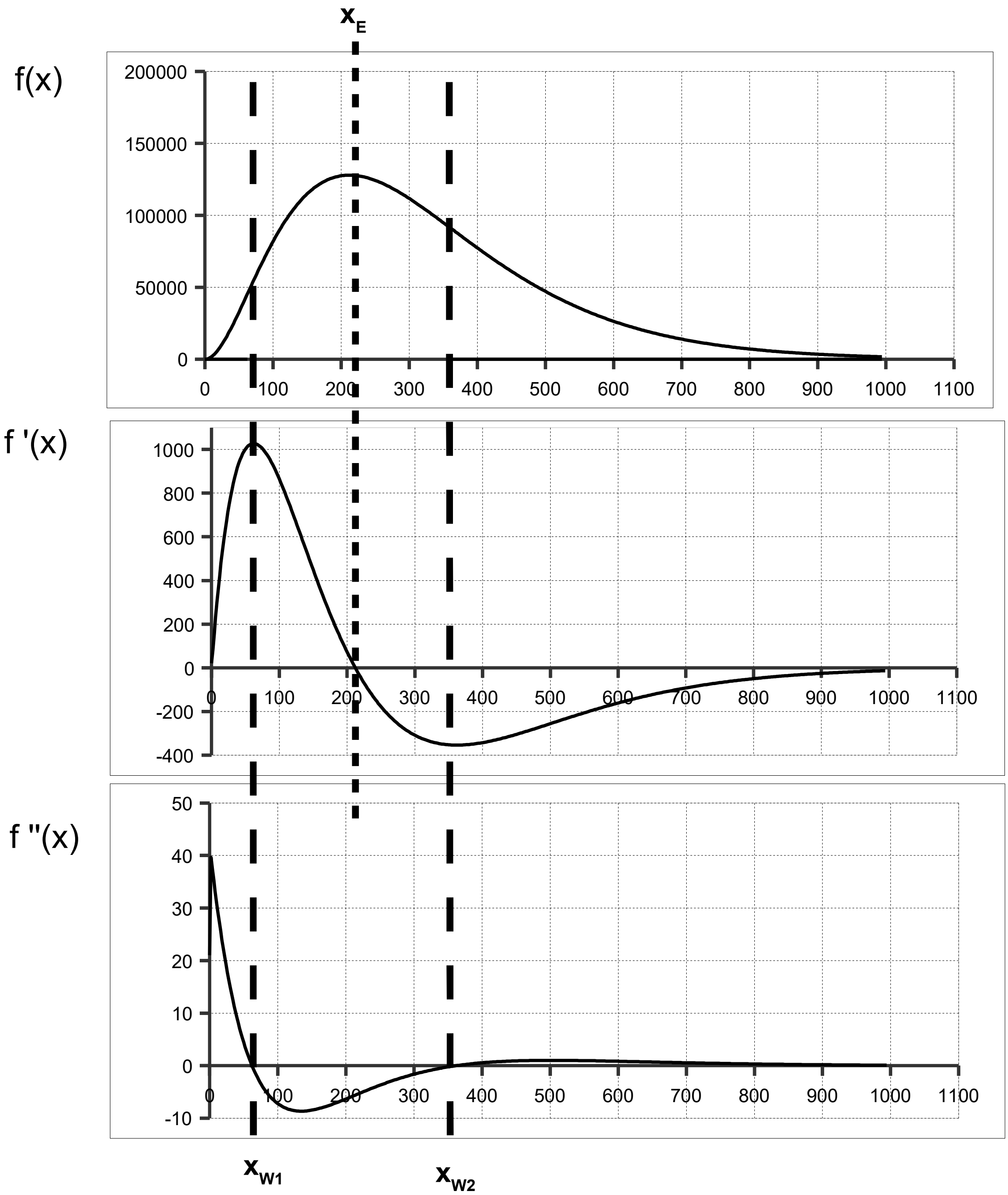
Aufgabe	Lösung	Erläuterung

5.2. Analyse der Funktion $y = a x^n e^{-kx}$

Für n = 1 ist es die unter 5.1. untersuchte Funktion
Für n >= 2 existieren 2 Wendepunkte.

Bisher sind im Abitur nur Funktionen mit n=2 aufgetreten. Hier erfolgt die Untersuchung für allgemeines n

Die angezeigten Kurvenbilder sind von einer Kurve für n = 2.



5.2.1 Extremwert

Extremwert:

$\Rightarrow \boxed{x_E = \frac{n}{k}}$

$y = a x^n e^{-kx}$
$y' = a(n x^{(n-1)} e^{-kx} - k x^n e^{-kx})$
$= a e^{-kx} x^{(n-1)} (n - kx)$

5.2.2 Wendepunkt

Wendepunkt

$$\Rightarrow \boxed{x_{W1} = \frac{n-\sqrt{n}}{k} = x_E - \frac{\sqrt{n}}{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{W2} = \frac{n+\sqrt{n}}{k} = x_E + \frac{\sqrt{n}}{k}}$$

Die Wendepunkte liegen symmetrisch zum Extremwert !

2. Ableitung

$$y'' = a\,(\,n(n-1)\,x^{(n-2)}\,e^{-kx} - kn\,x^{(n-1)}\,e^{-kx} - kn\,x^{(n-1)}\,e^{-kx} + k^2\,x^n\,e^{-kx}\,)$$

$$= a\,x^{(n-2)}\,e^{-kx}\,(n(n-1) - 2kn\,x + k^2\,x^2)$$

2. Ableitung gleich 0 setzen

$$y'' = 0 = n(n-1) - 2kn\,x + k^2\,x^2$$

$$x^2 - 2n/k\,x + n(n-1)/k^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{n}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \frac{n^2-n}{k^2}}$$

$$= \frac{n}{k} \pm \frac{\sqrt{n}}{k}$$

Die Position des steilsten Anstiegs und des steilsten Abfallens ist hier eindeutig an den Stellen der Wendepunkte.

$$f'(\,x_{W1}) = a\,\sqrt{n}\,e^{-(n-\sqrt{n})}\left(\frac{n-\sqrt{n}}{k}\right)^{n-1}$$

$$f'(\,x_{W2}) = -\,a\,\sqrt{n}\,e^{-(n+\sqrt{n})}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{k}\right)^{n-1}$$

$$y' = a\,e^{-kx}\,x^{(n-1)}\,(n - kx)$$

$$f'(\,x_{W1}) = a\,e^{-(n-\sqrt{n})}\left(\frac{n-\sqrt{n}}{k}\right)^{n-1}(n - (n-\sqrt{n}))$$

5.2.3 Abituraufgabe

Abitur 2011

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f mit
$f(t) = 150\,t^2\,e^{-0{,}2t}$, $t \geq 0$
Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und f(t) die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.

Der Maximalwert ist nach 10 Wochen erreicht. Die Formel für den Extremwert ist:

$$x_E = \frac{n}{k} = \frac{2}{0{,}2} = 10$$

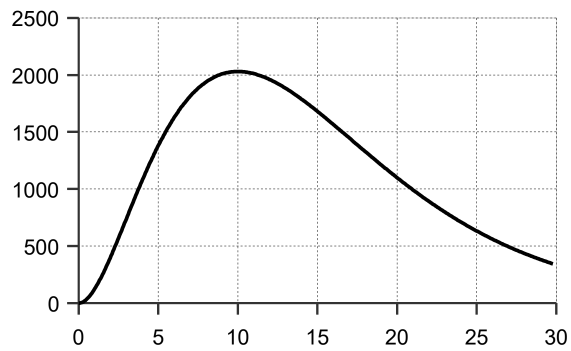
Die stärkste Zunahme ergibt sich bei x_{W1} = 2,93 und die stärkst Abnahme bei x_{W2} = 17,07

Die Formel für die beiden Wendepunkte für n = 2:

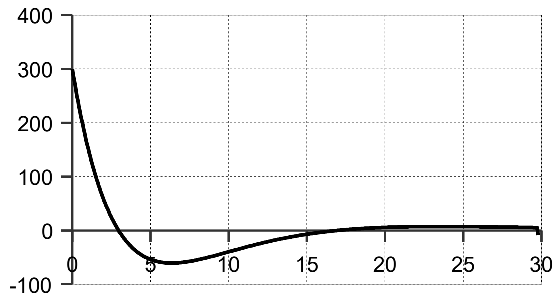
$$x_{W1} = \frac{2-\sqrt{2}}{k} = \frac{0{,}5857}{0{,}2} = 2{,}9289$$

$$x_{W2} = \frac{2+\sqrt{2}}{k} = \frac{3{,}4142}{0{,}2} = 17{,}07$$

Funktionsbild



1. Ableitung



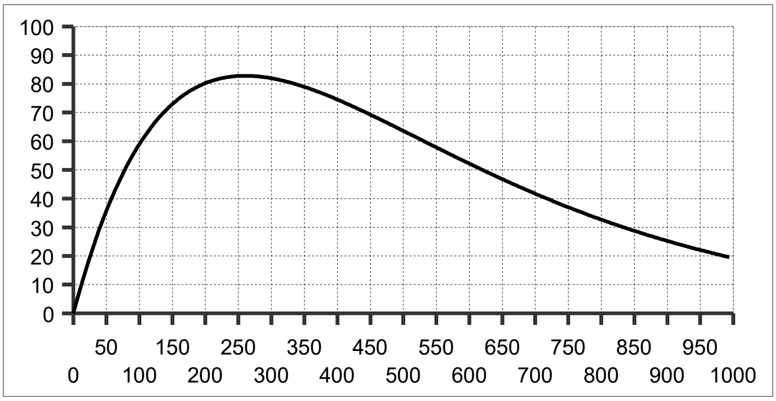
Aufgabe	Lösung	Erläuterung

5.3. Analyse der Funktion $y = a\,(e^{-k1x} - e^{-k2x})$

Der zweite benutzte Funktionstyp stellt die Differenz zwischen zwei e – Funktionen dar. Der Anfangsbestand B(0), in dem Funktionsausdruck der Faktor a, ist für beide der Gleiche.
Die Subtraktion muss ebenfalls sein, für eine Addition würde es eine monoton fallende Funktion bleiben.
k_1 muss immer kleiner als k_2 sein, da kleiner k Werte größere Funktionswerte geben. Wäre k_1 größer als k_2, würde die Differenz negativ werden, was fachlich gesehen Unsinn ist.

$$y' = -a\,(k_1\, e^{-k1x} - k_2\, e^{-k2x})$$

$$y'' = a\,(k_1^2\, e^{-k1x} - k_2^2\, e^{-k2x})$$



5.3.1 Extremwert

Extremwert:

=> $\boxed{x_E = \frac{1}{k_1 - k_2} \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)}$

$y' = -a\,(k_1\, e^{-k1x} - k_2\, e^{-k2x}) = 0$

$\frac{k_1}{k_2} = e^{x(k1 - k2)}$

$\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = x\,(k_1 - k_2)$

5.3.2 Wendepunkt

Wendepunkt:

=> $\boxed{\begin{array}{l} x_W = 2\,\frac{1}{k_1 - k_2} \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \\ x_W = 2\,x_E \end{array}}$

$y'' = a\,(k_1^2\, e^{-k1x} - k_2^2\, e^{-k2x}) = 0$

$\frac{k_1^2}{k_2^2} = e^{x(k1 - k2)}$

$x_W = \frac{1}{k_1 - k_2} \ln\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\right) = \frac{1}{k_1 - k_2} \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2$

Der Punkt des steilsten Anstiegs ist der Nullpunkt, da die erste Ableitung nur Funktionen e^{-kx} enthält, die für größer werdendes x kleinere Funktionswerte liefert.

$f'(0) = -a\,(k_1 - k_2)$

Da k_1 kleiner als k_2 liefert das einen positiven Wert.

Der Punkt des steilsten Abfalls ist der Wendepunkt.

Keine brauchbare allgemeine Formel angebbar. Deshalb erst x_w berechnen.

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

5.3.3 Abituraufgabe

Abitur 2012

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten beschrieben durch die Funktion f mit
$f(t) = 130\,(e^{-0,2t} - e^{-0,8t})$, $0 \le t \le 24$
(t in Stunden nach der Injektion, f(t) in mg).

Der Wert der stärksten Abnahme ist bei 4,62.
Der Wert der stärksten Zunahme bei 0.

Der Extremwert liegt bei etwa 2,31.

Die Formel für den Extremwert:

$$x_E = \frac{1}{k_1 - k_2} \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$$

für $k_1 = 0,2$ und $k_2 = 0,8$ liefert das:

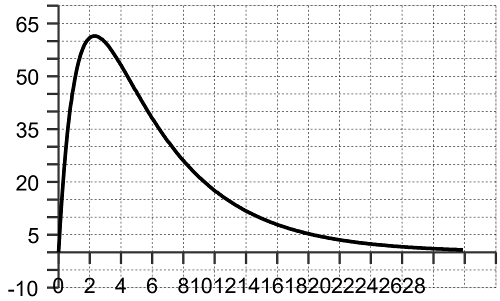
x_E = 1/-0,6 * ln (0,2 / 0,8)
= – 5/3 * ln (0,25)
= 2,3105

Formel für den Wendepunkt:

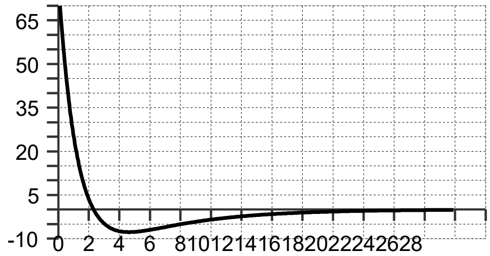
$x_W = 2\,x_E$

$x_W = 4,62$

Funktionskurve



1. Ableitung



Aufgabe	Lösung	Erläuterung

6. Warteschlangen Aufgaben

Das Wachstum und der Abbau von Warteschlangen wird ebenfalls mittels e – Funktionen oder analogen Funktionen beschrieben. Im Gegensatz zu den vorherigen Aufgaben, die einzelne Funktionswerte berechnen, muss in diesem Aufgaben auch ein Integral über die Funktion berechnet werden. Da es sich grundsätzlich um Funktionen handelt, die ein Produkt darstellen, kann manuell keine Stammfunktion ermittelt werden und es muss alles über den GTR als bestimmtes Integral berechnet werden. Manchmal ist es auch möglich mit Hilfe des TI 84 die Integralfunktion zu benutzen, aber die älteren CASIO Modelle (9750, 9850)können das gar nicht, erst der 9860 kann das.

Abitur 2007

Die momentane Ankunftsrate an einem Kino – also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute – soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion f mit

$f(x) = 0{,}27 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}12x}$

Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und f(x) die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.

Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

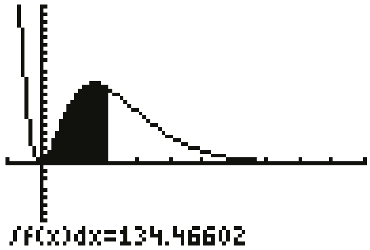
c) Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden.

Y1 : $f(x) = 0{,}27 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}12x}$

(1) Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt ?

Die Frage ist, wie viele Personen sind bis 19.20 gekommen. Dazu ist das Integral über f(t) zu berechnen von 0 bis 20. Für diese Berechnung ist die Funktion Y1 zu verwenden.

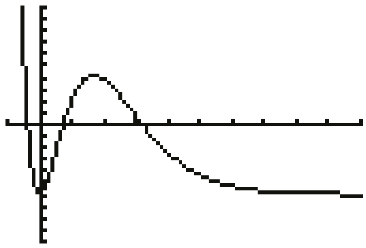
Diese Anzahl ist dann durch 6 zu dividieren, da 6 Personen pro Minute abgefertigt werden, und man erhält die Wartezeit.



(2) Wann ist die Zahl der Wartenden am größten ?

Für die Zahl w(t) der Wartenden ab 19.20 Uhr gilt

$$\int_0^{20} f(t)\,dt + \int_{20}^{x} (f(t) - 6)\,dt .$$



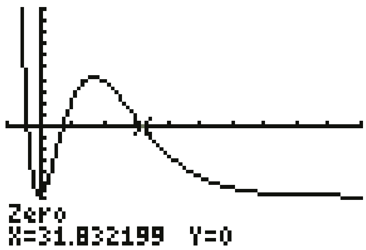
Die Zahl der Wartenden bis 19:20 ist ein konstanter Wert und kann über das Integral mit der Funktion f(t) berechnet werden, siehe (1).

Die Zahl der neu hinzukommenden Wartenden **pro Minute** ist f(t) und die Zahl der abgefertigten Wartenden **pro Minute** ist 6.

Y3 : Y1 – 6

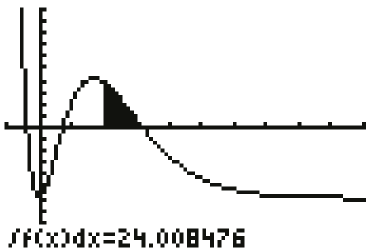
(3) Wie viele Besucher warten dann ?

Das Maximum der Gesamtsumme wird dort erreicht, wo die Funktion Y3 ab t = 20 den maximalen Flächeninhalt erreicht. Das ist an der Stelle, an der die Funktion die x-Achse schneidet und negative Funktionswerte erreicht. Ab diesem Zeitpunkt wird von der Fläche subtrahiert (Flächen unterhalb der x-.Achse).
Die zweite Nullstelle liegt bei 31,83 und ist damit der Zeitpunkt, bei dem die meisten Besucher warten.



Damit ist das Integral von t = 20 bis zur Nullstelle t = 31,83 zu berechnen.

Der Flächeninhalt dieses Bereiches beträgt 24 Personen. Mit der Anzahl der Personen, die von 0 bis 20 erschienen sind, beträgt die maximale Anzahl der Wartenden 134,5 + 24 = 158,5 Personen ≈ 159 Personen.



Aufgabe	Lösung	Erläuterung

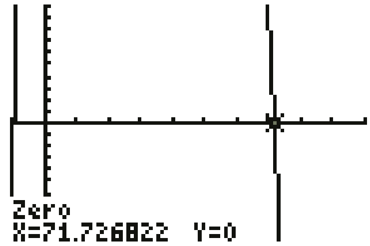
Das Auflösen der Warteschlange über die Integralrechnung ist etwas schwieriger. Es muss berechnet werden, zu welchem Zeitpunkt t nach der Nullstelle 31,83 sich so viele „negativen“ Flächenteile unterhalb der x – Achse angesammelt haben, bis die gesamten „positiven“ Flächenteile von 159 zu Null reduziert sind. Das ist eine Frage nach der oberen Grenze des Integrals bei vorgegebenen Flächeninhalt. Mit dem TI ist dieses Problem machbar.

(4) Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst ?

$$Y3 : \quad 159 + \int_{31,83}^{x} (f(t) - 6)\, dt \,.$$

Das Integral ist über den MATH Button in die Funktionsliste zu laden, nicht über SHIFT CALC.

Hier wird der positive Wert als Konstante hinzuaddiert. damit ist die Lösung des Problems erreicht, wenn man von dieser Funktion die Nullstelle findet. Im anderen Fall müsste ein Schnittpunkt mit dem Wert 159 erzeugt werden.
Die Nullstelle ist bei 71,73 erreicht, dh. nach 72 min ist die Schlange aufgelöst, das entspricht der Uhrzeit 20:12

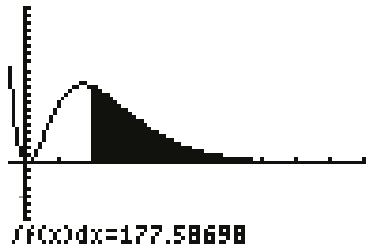


Im CASIO Taschenrechner ist erst ab CASIO 9860 eine Integralfunktion implementiert.

Von 19:20 bis 20:30, wenn die Warteschlange aufgelöst sein soll, kommen noch 177 Besucher.
Bist 19:20 sind 134 Personen gekommen (siehe (1)). Ab 19:20 werden pro Minute 6 Personen abgefertigt:

$$g(x) = 311 - 6x$$

Die Nullstelle liegt bei 51,83 Minuten. Diese Zeit ist zu 19:20 zu addieren. Damit ergibt sich als Endzeit für das Auflösen der Schlange 20:12 .



Aufgabe	Lösung	Erläuterung

Abitur 2014

Die Anzahl ankommender Fahrzeuge vor einem Grenzübergang soll modelliert werden.
Dabei wird die momentane Ankunftsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1\,300\,000\ t}{t^4 + 30\,000} \qquad 0 \le t \le 30$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn; f(t) in Fahrzeuge pro Stunde).
Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

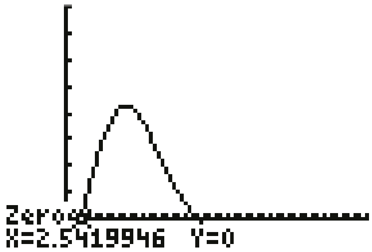
b) Am Grenzübergang werden die Fahrzeuge möglichst schnell abgefertigt, jedoch ist die momentane Abfertigungsrate durch 110 Fahrzeuge pro Stunde begrenzt.
(1) Wann beginnen sich die Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen?
(2) Wie viele Fahrzeuge stauen sich maximal vor dem Grenzübergang?
(3) Welches Ergebnis erhielte man, wenn die momentane Abfertigungsrate 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn auf konstant 220 Fahrzeuge pro Stunde erhöht würde?

(1)

Die Fahrzeuge beginnen sich zu stauen, wenn f(t) – 110 größer als Null ist.

Y2 : Y1 – 110

Der Stau beginnt bei t = 2,54 h.

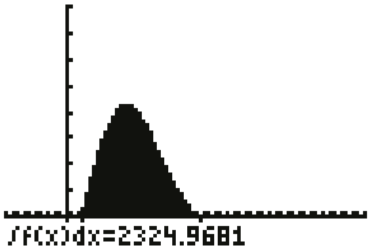


(2)

Da die Funktion f die Zuwachsrate angibt ist die maximale Menge an Fahrzeugen das Integral zwischen den beiden Nullstellen.

x1 = 2,54
x2 = 21,86

Maximale Menge:
2325 Fahrzeuge.

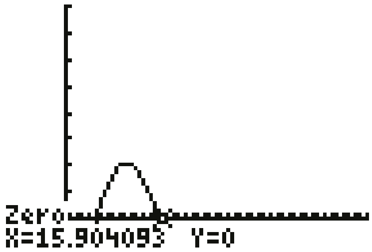


(3)

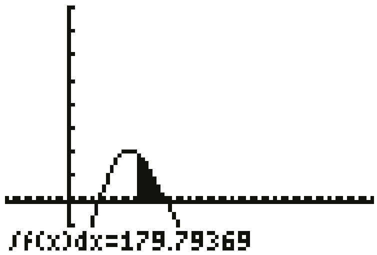
1. Lösungsmöglichkeit

Erste zu klärende Frage, wie viele Fahrzeuge sind nach 12 Stunden im Stau. Die Menge ist das Integral von der ersten Nullstelle (ab dann beginnt ja erst das Stauen von Fahrzeugen) bis zur Stunde 12.
Nach 12 Stunden sind 1423 Fahrzeuge im Stau.

Y2 = Y1 – 220

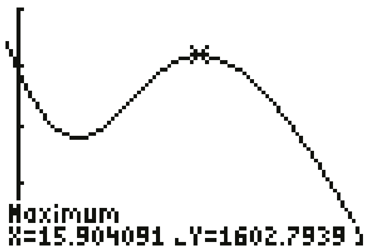


Die erste Nullstelle ist bei 5,2, also außerhalb des Intervalls ab x = 12, da erst ab 12 220 Fahrzeuge abgefertigt werden. Um die Anzahl der jetzt im Stau stehenden Fahrzeuge zu bestimmen muss man das Integral von 12 bis 15,9 bestimmen.



Im Zeitraum von 12 Stunden bis 15,9 Stunden kommen noch einmal 179,8 Fahrzeuge hinzu, so dass sich die gesamte Staulänge auf 1423 + 180 = 1603 Fahrzeuge erhöht.
Eine andere Möglichkeit, die aber nur für den TI gegeben ist, ist die Addition der bisher gestauten 1423 Fahrzeuge zu der Integralfunktion ab t = 12. Die Integralfunktion ist aber beim CASIO erst ab 9860 möglich. Für diese Funktion ist dann der Maximalwert zu suchen.

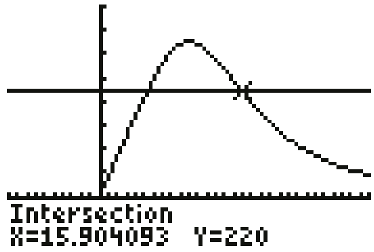
$$Y2 = 1423 + \int_{12}^{X} (Y1 - 220)\ dX$$



In diesem Fall ist nach 15,9 Stunden die maximale Staulänge erreicht mit 1602 Fahrzeugen.

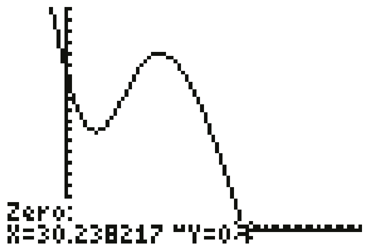
2. Lösungsmöglichkeit

Ein zweiter Ansatz für das Problem wäre: Die maximale Staulänge nach den 12 Stunden ist erreicht, wenn weniger als 220 Fahrzeuge zum Stau hinzukommen. Dh. es ist der x-Wert für die Ankunftsrate f(t) gesucht, bei der der y – Wert 220 ist und der sich im monoton fallenden Bereich befinden muss.



Damit ist die obere Grenze bestimmt, bis zu der zu Integrieren ist, um die maximale Anzahl der im Stau stehenden Fahrzeuge zu bestimmen.

Die Frage, wann sich der Stau aufgelöst hat, (hier nicht verlangt) geht nur über die Integralfunktion, da es sich um die Bestimmung der oberen Grenze des Integrals handelt. Dieser Wert ist ein x- Wert der Stammfunktion, während bisher immer y – Werte oder x – Werte des Integranten berechnet wurden. Der Stau hat sich genau dann aufgelöst, wenn die Integralfunktion eine Nullstelle hat.



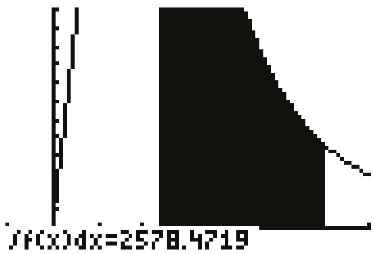
Unter der Bedingung, dass ab 12 Stunden jeweils 220 Fahrzeuge abgefertigt werden, hätte sich der Stau nach 30 Stunden aufgelöst.

$$Y2 = 1423 + \int_{12}^{X} (Y1 - 220)\ dX$$

Die CASIO GTR können keine Integral-funktion erstellen. Wie kann man mit diesen GTR das Problem lösen, wann sich der Stau aufgelöst hat. das angegebene Intervall reicht von $0 \le x \le 30$.

Zum Zeitpunkt t = 12 sind 1423 Fahrzeuge im Stau. Ab diesem Zeitpunkt kommen neue Fahrzeuge hinzu und es werden pro Stunde 220 Fahrzeuge abgefertigt. Wir können davon ausgehen, dass immer genügend Fahrzeuge bis zum Abbau des Staus vorhanden sind.

Damit lässt sich die Gesamtzahl aller ankommenden Fahrzeuge ab 12 Stunden bis 30 Stunden über Integral berechnen.



Ab 12 Stunden bis 30 Stunden kommen noch 2578 Fahrzeuge hinzu. Damit ergibt sich als Gesamtzahl von 12 bis 30 Stunden 4001 Fahrzeuge. In dieser Zeit werden 220 Fahrzeuge pro Stunde abgefertigt:

$$\frac{4000}{220} = 18{,}18 \text{ Stunden}$$

oder g(x) = 4000 – 220 * x mit der Nullstelle 18,18 Stunden