Verflechtungsmatrizen

A	in den Spalten dieser (m,p) – Matrix: Bedarf pro ME an Rohstoffen für die Zwischenprodukte
B	in den Spalten dieser (p,n) – Matrix: Bedarf pro ME an Zwischenprodukten für die Endprodukte
C	in den Spalten dieser (m,n) – Matrix: Bedarf pro ME an Rohstoffen für die Endprodukte

Es gilt:

$$r = A\ z$$
$$z = B\ p$$
$$r = C\ p$$

Verbrauchs– und Produktionsvektoren

r	für die Rohstoffe
z	für die Zwischenprodukte
p	für die Endprodukte

Kostenvektoren (variable Kosten je Einheit)

k_R	für die Rohstoffkosten
k_Z	für die Fertigungskosten in Stufe 1
k_E	für die Fertigungskosten in Stufe 2

Rohstoff- Zwischenprodukt-Matrix $A_{[m \times p]}$

Rohstoffverbrauch pro Rohstoff $r_{[m \times 1]}$

Kosten pro Rohstoff $k_{R\ [m \times 1]}$

GTR **[A]** **[D]** **[G]**

$$\begin{array}{l|lllll} & \multicolumn{5}{c}{\text{Rohstoff je Zwischenprodukt}} \\ \text{Rohstoff} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & \dots & Z_p \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\ R_m \end{array}$$

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \\ r_m \end{array} \qquad \begin{array}{c} k_{R1} \\ k_{R2} \\ k_{R3} \\ \\ k_{R\ m} \end{array}$$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B_{[p \times n]}$

Anzahl der Zwischenprodukte $z_{[p \times 1]}$

Kosten pro Zwischenprodukt $k_{Z\ [p \times 1]}$

GTR **[B]** **[E]** **[H]**

$$\begin{array}{l|lllll} & \multicolumn{5}{c}{\text{Zwischenp je Endprodukt}} \\ \text{Zwischenp.} & E_1 & E_2 & E_3 & \dots & E_n \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \\ Z_p \end{array}$$

$$\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \\ z_p \end{array} \qquad \begin{array}{c} k_{Z1} \\ k_{Z2} \\ k_{Z3} \\ \\ k_{Zp} \end{array}$$

Rohstoff- Endprodukt-Matrix $C_{[m \times n]}$

Anzahl der Endprodukte $p_{[n \times 1]}$

Kosten pro Endprodukt $k_{E\ [n;1]}$

GTR **[C]** **[F]** **[I]**

$$\begin{array}{l|lllll} & \multicolumn{5}{c}{\text{Rohstoff je Endprodukt}} \\ \text{Rohstoff} & E_1 & E_2 & E_3 & \dots & E_n \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\ R_m \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \\ p_n \end{array} \qquad \begin{array}{c} k_{E1} \\ k_{E2} \\ k_{E3} \\ \\ k_{En} \end{array}$$

Die **Spalten** der Matrizen sind immer die Produkte die hergestellt werden,
die **Zeilen** sind immer die Produkte die man zum Herstellen braucht.

Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A

Multiplikation			Ergebnis		
Zeilenvektor	**Matrix A**	**Spaltenvektor**	**Zeilenvektor**	**Spaltenvektor**	**Reelle Zahl**
	Z_1 Z_2 Z_3 … Z_p R_1 R_2 R_3 … R_m Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A_{[m \times p]}$	z_1 z_2 z_3 … z_p Anzahl der Zwischenprodukte $z_{[p \times 1]}$ aus Matrix B1		r_1 r_2 r_3 … r_m Rohstoffe für alle Zwischenprodukte pro Rohstoff $r_{[m \times 1]}$	
k_{R1} k_{R2} k_{R3} k_{Rm} Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}{}^{T}$	Z_1 Z_2 Z_3 … Z_p R_1 R_2 R_3 … R_m Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A_{[m \times p]}$		Z_1k_R Z_2k_R Z_3k_R … Z_pk_R Rohstoffkosten pro Zwischenprodukt		
k_{R1} k_{R2} k_{R3} k_{Rm} Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}{}^{T}$	Z_1 Z_2 Z_3 … Z_p R_1 R_2 R_3 … R_m Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A_{[m \times p]}$	z_1 z_2 z_3 … z_p Anzahl der Zwischenprodukte $z_{[p \times 1]}$ aus Matrix B1			Rohstoffkosten für alle Zwischenprodukte
k_{R1} k_{R2} k_{R3} k_{Rm} Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}{}^{T}$		r_1 r_2 r_3 … r_m Rohstoffverbrauch pro Rohstoff für alle Zwischenprodukte $r_{[m \times 1]}$ aus Matrix A1			Rohstoffkosten für alle Zwischenprodukte

Rohstoffverbrauch für alle Zwischenprodukte
aufgelistet nach Rohstoffen

$$A_{[m;p]}\ z_{[p;1]} = r_{[m;1]}$$

Rohstoffkosten für alle Zwischenprodukte
aufgelistet nach Zwischenprodukten

$$k_R{}^{T}{}_{[1;m]}\ A_{[m;p]} = k_{RZ}{}^{T}{}_{[1;p]}$$

Rohstoffkosten für alle benötigten Rohstoffe

$$K_{R[1;1]} = k_{RZ}{}^{T}{}_{[1;p]}\ z_{[p;1]}$$

$$= k_R{}^{T}{}_{[1;m]}\ A_{[m;p]}\ z_{[p;1]}$$

$$= k_R{}^{T}{}_{[1;m]}\ r_{[m;1]}$$

Bei der Dimension von Transponierten Vektoren
ist folgendes zu beachten:

$$k_{R\,[m;1]}{}^{T} = k_R{}^{T}{}_{[1;m]}$$

durch das Transponieren ändern sich die Zeilen und Spaltenzahlen, deshalb ist darauf zu achten, ob das Transponierzeichen vor oder nach der Dimensionsangabe steht.

[m;1] : m Zeilen, 1 Spalte = Spaltenvektor
[1; m] : 1 Zeile , m Spalten = Zeilenvektor
[1;1] : reelle Zahl

Die **Spalten** der Matrizen sind immer die Produkte die hergestellt werden,
die **Zeilen** sind immer die Produkte die man zum Herstellen braucht.

Die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B

Multiplikation | Ergebnis

Zeilenvektor	Matrix B	Spaltenvektor	Zeilenvektor	Spaltenvektor	Reelle Zahl
	E_1 E_2 E_3 … E_n Z_1 Zwischenprodukt- Z_2 Endprodukt- Z_3 Matrix $B_{[p \times n]}$ Z_p	p_1 Anzahl der p_2 Endprodukte p_3 $p_{[n \times 1]}$ p_n		z_1 Zwischenprodukte z_2 für alle z_3 Endprodukte pro z_p Zwischenprodukt $z_{[p \times 1]}$	
k_{Z1} k_{Z2} k_{Z3} … k_{Zp} Kosten pro Zwischenprodukt $k_{Z\,[p \times 1]}^{T}$	E_1 E_2 E_3 … E_n Z_1 Zwischenprodukt- Z_2 Endprodukt- Z_3 Matrix $B_{[p \times n]}$ Z_p		E_1k_Z E_2k_Z E_3k_Z … E_nk_Z Gesamtkosten Zwischenprodukte pro Endprodukt		
k_{Z1} k_{Z2} k_{Z3} … k_{Zp} Kosten pro Zwischenprodukt $k_{Z\,[p \times 1]}^{T}$	E_1 E_2 E_3 … E_n Z_1 Zwischenprodukt- Z_2 Endprodukt- Z_3 Matrix $B_{[p \times n]}$ Z_p	p_1 Anzahl der p_2 Endprodukte p_3 $p_{[n \times 1]}$ p_n			Gesamtkosten Zwischenprodukte für alle Endprodukte
k_{Z1} k_{Z2} k_{Z3} … k_{Zp} Kosten pro Zwischenprodukt $k_{Z\,[p \times 1]}^{T}$		z_1 Anzahl der z_2 Zwischenprodukte z_3 für alle Endprodukte z_p $z_{[p \times 1]}$ aus Matrix B1			Gesamtkosten Zwischenprodukte für alle Endprodukte

Benötigte Zwischenprodukte für alle Endprodukte aufgelistet nach Zwischenprodukten

$$B_{[p;n]}\, p_{[n;1]} = z_{[p;1]}$$

Zwischenproduktkosten für alle Endprodukte aufgelistet nach Endprodukten

$$k_{Z\;[1;p]}^{T}\; B_{[p;n]} = k_{ZE\;[1;n]}^{T}$$

Zwischenproduktkosten für alle benötigten Endprodukte

$$K_{Z[1;1]} = k_{Z\;[1;p]}^{T}\; z_{[p;1]} = k_{Z\;[1;p]}^{T}\, B_{[p;n]}\, p_{[n;1]} = k_{ZE\;[1;n]}^{T}\; p_{[n;1]}$$

Die **Spalten** der Matrizen sind immer die Produkte die hergestellt werden,
die **Zeilen** sind immer die Produkte die man zum Herstellen braucht.

Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C

Multiplikation			**Ergebnis**		
Zeilenvektor	**Matrix C**	**Spaltenvektor**	**Zeilenvektor**	**Spaltenvektor**	**Reelle Zahl**
	E_1 E_2 E_3 … E_n R_1 R_2 R_3 R_m Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{[m \times n]}$	p_1 p_2 p_3 p_n Anzahl der Endprodukte $p_{[n \times 1]}$		r_{1E} r_{2E} r_{3E} r_{mE} Anzahl der Rohstoffe für alle Endprodukte $r_{[m \times 1]}$	
k_{R1} k_{R2} k_{R3} k_{Rm} Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}{}^T$	E_1 E_2 E_3 … E_n R_1 R_2 R_3 R_m Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{[m \times n]}$		E_1k_R E_2k_R E_3k_R … E_nk_R Rohstoffkosten pro Endprodukt		
k_{R1} k_{R2} k_{R3} k_{Rm} Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}{}^T$	E_1 E_2 E_3 … E_n R_1 R_2 R_3 R_m Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{[m \times n]}$	r_1 r_2 r_3 r_m Anzahl der Rohstoffe für alle Endprodukte $r_{[m \times 1]}$			Gesamtkosten Rohstoff für alle Endprodukte
k_{R1} k_{R2} k_{R3} k_{Rm} Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}{}^T$		r_{1E} r_{2E} r_{3E} r_{mE} Anzahl der Rohstoffe für alle Endprodukte $r_{[m \times 1]}$ aus Matrix C1			Gesamtkosten Rohstoff für alle Endprodukte
k_{E1} k_{E2} k_{E3} k_{En} Kosten pro Endprodukt $k_{E\,[n;1]}{}^T$		p_1 p_2 p_3 p_n Anzahl der Endprodukte $p_{[n \times 1]}$			Gesamtkosten Endprodukte für alle Endprodukte

Rohstoffverbrauch für alle Endprodukte aufgelistet nach Rohstoffen

$$C_{[m;n]}\; p_{[n,1]} = r_{[m,1]}$$

Rohstoffkosten für alle Endprodukte aufgelistet nach Endprodukten

$$k_R{}^T{}_{[1,m]}\;\; C_{[m;n]} = k_{RE}{}^T{}_{[1,n]}$$

Rohstoffkosten für alle benötigten Rohstoffe

$$K_{R[1,1]} = k_{RE}{}^T{}_{[1,n]}\; p_{[n,1]} = k_R{}^T{}_{[1,m]}\; C_{[m;n]}\; p_{[n,1]} = k_R{}^T{}_{[1,m]}\; r_{[m,1]}$$

Endproduktkosten

$$K_{E[1,1]} = k_E{}^T{}_{[1,n]}\;\; p_{[n,1]}$$

Gesamtkosten

$$k_R{}^T C\, p + k_Z{}^T B\, p + k_E{}^T p =$$
$$(k_R{}^T C + k_Z{}^T B + k_E{}^T)\, p$$

Erlöse

$$e^T p$$

Grundaufgabe 1:

Gegeben:
Matrix A, Matrix B
Endproduktvektor p

Gesucht:
Rohstoffvektor r

Es werden soundso viele Mengeneinheiten der einzelnen Endprodukte bestellt. Wie viele ME der einzelnen Rohstoffe Ri benötigt man, um den Auftrag zu bearbeiten?

Lösungsansatz:
Vektor der benötigten Rohstoffmengen: r $C_{[m;n]}\ p_{[n;1]} = r_{[m;1]}$

In einem Betrieb werden aus den Einzelteilen T1 und T2 die Zwischenprodukte Z1 und Z2 und aus diesen die Endprodukte E1, E2 und E3 gefertigt. Die Produktionszahlen sind jeweilig ganzzahlig. Die folgenden Tabellen geben an, wie viele Einzelteile für je ein Zwischenprodukt und wie viele Zwischenprodukte je Endprodukt verarbeitet werden.

	Z1	Z2
T1	2	3
T2	4	1

	E1	E2	E3
Z1	1	2	3
Z2	3	4	2

Es sollen 30 Endprodukte E1, 40 Endprodukte E2 und 20 Endprodukte E3 hergestellt werden.
Wieviele Einzelteile T1 und T2 werden dazu benötigt?

Gegeben

Einzelteil-Zwischenprodukt
Matrix A

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} Z1 & Z2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} T1 \\ \\ T2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{T1}{Z1} & \frac{T1}{Z2} \\ \frac{T2}{Z1} & \frac{T2}{Z2} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} Z1 & Z2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Zwischenprodukt-Endprodukt
Matrix B

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} E1 & E2 & E3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} Z1 \\ \\ Z2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{Z1}{E1} & \frac{Z1}{E2} & \frac{Z1}{E3} \\ \frac{Z2}{E1} & \frac{Z2}{E2} & \frac{Z2}{E3} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} E1 & E2 & E3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

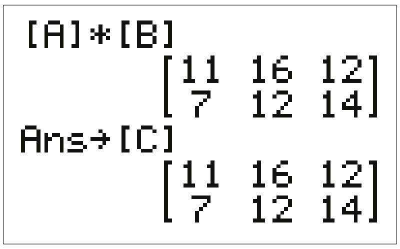
Produktionsvektor
Endprodukte p

$$\begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Gesucht

Die Einzelteil–Endprodukt–Matrix ist dann

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 12 \\ 7 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$



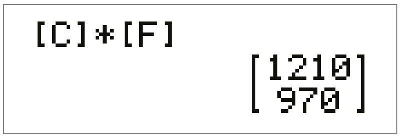
```
[A]*[B]
        [11  16  12]
        [ 7  12  14]
Ans→[C]
        [11  16  12]
        [ 7  12  14]
```

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} Z1 & Z2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} T1 \\ \\ T2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{T1}{Z1} & \frac{T1}{Z2} \\ \frac{T2}{Z1} & \frac{T2}{Z2} \end{pmatrix} \end{array} \bullet \begin{array}{cc} & \begin{matrix} E1 & E2 & E3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} Z1 \\ \\ Z2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{Z1}{E1} & \frac{Z1}{E2} & \frac{Z1}{E3} \\ \frac{Z2}{E1} & \frac{Z2}{E2} & \frac{Z2}{E3} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} E1 & E2 & E3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} T1 \\ \\ T2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{T1}{E1} & \frac{T1}{E2} & \frac{T1}{E3} \\ \frac{T2}{E1} & \frac{T2}{E2} & \frac{T2}{E3} \end{pmatrix} \end{array}$$

Benötigte Mengen an T1 und T2 pro Endprodukt

Der Vektor der benötigten Einzelteile insgesamt ist

$$r = C * p = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 12 \\ 7 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1210 \\ 970 \end{pmatrix}$$



```
[C]*[F]
              [1210]
              [ 970]
```

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} E1 & E2 & E3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} T1 \\ \\ T2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{T1}{E1} & \frac{T1}{E2} & \frac{T1}{E3} \\ \frac{T2}{E1} & \frac{T2}{E2} & \frac{T2}{E3} \end{pmatrix} \end{array} \bullet \begin{array}{cc} & St \\ \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} E1 \\ E2 \\ E3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & St \\ \begin{matrix} T1 \\ T2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Benötigte Gesamtmenge an T1 und T2, um alle
Endprodukte herzustellen

Grundaufgabe 2:

Gegeben:	**Gesucht:**
Matrix A **Rohstoffvektor r**	**Zwischenproduktvektor z**
Matrix B **Zwischenproduktvektor z**	**Produktionsvektor p**

Es sollen soundso viele Mengeneinheiten der einzelnen Rohstoffe verbraucht werden. Wie viele ME der einzelnen Endprodukte kann man damit herstellen?

Lösungsansatz:
Vektor der zu verbrauchenden Rohstoffmengen: r $C_{[m;n]}\ p_{[n;1]} = r_{[m;1]}$

Im Gegensatz zur Grundaufgabe 1 ist hier nicht der Produktionsvektor p gegeben, sondern der Rohstoffvektor r. Ein solches lineares Gleichungssystem löst man mit dem Gauß-Verfahren.

Wie viele Endprodukte können aus 10 Zwischenprodukten Z1 und 19 Zwischenprodukten Z2 hergestellt werden?

Gegeben

Zwischenprodukt
Anzahl

$$\begin{array}{c} Z1 \\ Z2 \end{array} \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Zwischenprodukt-Endprodukt
Matrix B

$$\begin{array}{c|ccc} & E1 & E2 & E3 \\ \hline Z1 & \frac{Z1}{E1} & \frac{Z1}{E2} & \frac{Z1}{E3} \\ Z2 & \frac{Z2}{E1} & \frac{Z2}{E2} & \frac{Z2}{E3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}$$

$B_{[p;n]}\ p_{[n;1]} = z_{[p;1]}$

Gesucht

Mit dem Zwischenproduktvektor $z = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix}$ gilt B * p = z. Das ist normalerweise ein Problem für die inverse Matrix.

Die Matrix B ist aber nicht quadratisch, deshalb kann man keine inverse Matrix bilden. Das Gleichungssystem B * p = z besitzt zwei Zeilen und drei Spalten. Damit kann es keine eindeutige Lösung geben, sondern nur eine Parameterlösung.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix}$ der Gauß'sche Algorithmus liefert: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & 11 \end{array}\right)$

$p1 = -1 + 4t \geq 0 \qquad t \geq \frac{1}{4}$

$p2 = 11/2 - 7/2\ t \geq 0 \qquad t \leq 11/7$

$p3 = t \geq 0 \qquad t \geq 0$

Da die Rechnung nur Sinn macht, wenn alle drei Werte positiv sind, liefert nur die zweite Gleichung eine einschränkende Bedingung, da für die erste und dritte Gleichung für jedes beliebig große t erfüllt sind.

p2 ist nur positiv für t = 0 und t = 1. Für t = 0 ist aber die erste Gleichung nicht erfüllt, so dass nur t = 1 als Lösung in Frage kommt. Damit ergibt sich für t = 1 folgender Produktionsvektor:

$$p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Grundaufgabe 2a:

Gegeben:
Matrix A; Matrix B
Rohstoffvektor r

Gesucht:
Produktionsvektor p

In einem Lebensmittelwerk werden aus fünf Rohstoffen R1 bis R5 drei Zwischenprodukte Z1, Z2 und Z3 hergestellt Diese werden zu drei Fertigprodukten F1, F2 und F3 verarbeitet.

Es sind in der Firma noch vorhanden: 136 ME von R1 68 ME von R2,124 ME von R3 16 ME R4 und 192 ME von R5. Wie viele Fertigprodukte lassen sich damit herstellen?

Die Herausforderung dieses Aufgabentyps ist, dass ein Gleichungssystem gegeben ist, bei dem die rechte Seite bekannt ist und die Variablen zu berechnen sind. Dabei handelt es sich um eine rechteckige Matrix, für die es keine Inverse gibt, andererseits ist die ***Zeilenzahl größer als die Spaltenzahl****. Bei einem solchen Gleichungssystem steigt auch der GTR mit Fehler aus. Ein solches Gleichungssystem muss nicht lösbar sein. Hier wird ein Lösungsweg mit dem GTR angegeben, der zumindest funktioniert, wenn es eine Lösung gibt.*

Gegeben

A

	Z1	Z2	Z3
R1	0	2	0
R2	0	1	0
R3	1	1	1
R4	0	0	2
R5	4	0	0

B

	E1	E2	E3
Z1	1	2	2
Z2	2	3	2
Z3	0	1	0

r

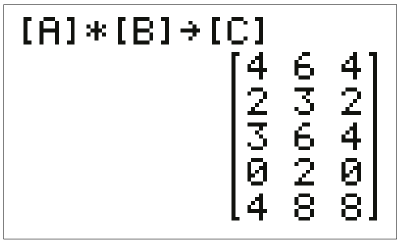
$$\begin{pmatrix} 136 \\ 68 \\ 124 \\ 16 \\ 192 \end{pmatrix}$$

Gesucht

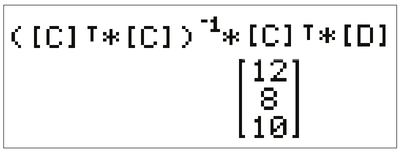
Vektor der Endprodukte p. $C_{[m;n]} \; p_{[n;1]} = r_{[m;1]}$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \qquad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Problem in diesem Fall ist, dass die Matrix mehr Zeilen als Spalten hat. Damit das Gleichungssystem überhaupt eine Lösung haben kann, müssen nach dem Gauß'schen Algorithmus 2 Zeilen komplett zu 0 werden, sonst ist das Gleichungssystem unlösbar. Gleichzeitig kann keine Inverse Matrix berechnet werden, da es sich nicht um eine quadratische Matrix handelt.



```
[A]*[B]→[C]
             [4 6 4]
             [2 3 2]
             [3 6 4]
             [0 2 0]
             [4 8 8]
```



```
([C]ᵀ*[C])⁻¹*[C]ᵀ*[D]
          [12]
          [8 ]
          [10]
```

$$C^T C \, p = C^T r$$
$$p = (C^T C)^{-1} C^T r$$

Die Lösung dieser Gleichung ist aber nicht grundsätzlich gesichert. Jede Matrix, die mit ihrer Transponierten multipliziert wird, ist eine quadratische Matrix. Damit kann man erst einmal prinzipiell eine Inverse bestimmen.
Das heißt aber nicht, dass die Inverse auch wirklich existiert.
Der Ergebnisvektor ist mit dem in der Lösung des Beispiels identisch (LS „Gesamtband“ S. 328)

In einigen Fällen funktioniert auch, wenn man an die Matrix [C] die rechte Seite des Rohstoffvektors über augment() anhängt und anschließend über rref() das Gleichungssystem berechnet. In diesem Fall funktioniert es nicht, da die linear abhängigen Zeilen im oberen Teil der Matrix stehen und der GTR das Gleichungssystem nicht rechnen kann, da die ersten Zeilen zu 0 werden und nicht die letzten.
Deshalb ist es besonders interessant, dass die Variante über die Transponierte Matrix und der Inversen von (C^TC) trotzdem funktioniert.

Grundaufgabe 2b:

Gegeben:
Matrix A; Matrix B
Rohstoffvektor r

Gesucht:
Produktionsvektor p

Probleme bei der Lösung eines Gleichungssystems für rechteckige Matrizen C gibt es immer dann, wenn es mehr Erzeugnisse als Rohstoffe gibt. In diesem Fall gibt es mehr Spalten als Zeilen, so dass das Produkt C^TC eine quadratische Matrix ergibt, die keine Inverse besitzt. Das Gleichungssystem ist in diesem Fall nicht eindeutig lösbar, was bei einer größeren Spaltenanzahl gegenüber der Zeilenzahl nicht verwunderlich ist. Es soll hier ein Beispiel konstruiert werden, bei dem die Zahl der Endprodukte die der Rohstoffe übersteigt.

Gegeben

Rohstoff – Zwischenprodukt Matrix

Zwischenprodukt – Endprodukt Matrix

Rohstoff – Endprodukt Matrix

GTR **[A]** **[B]** **[C]**

$$\begin{array}{c|ccc} & Z1 & Z2 & Z3 \\ \hline R1 & 4 & 0 & 8 \\ R2 & 5 & 7 & 3 \\ R3 & 2 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & E1 & E2 & E3 & E4 & E5 \\ \hline Z1 & 1 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ Z2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ Z3 & 6 & 5 & 2 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & E1 & E2 & E3 & E4 & E5 \\ \hline R1 & 52 & 76 & 32 & 36 & 20 \\ R2 & 37 & 81 & 33 & 38 & 32 \\ R3 & 14 & 36 & 14 & 18 & 20 \end{array}$$

Für einen festgelegten Endproduktvektor gibt es einen eindeutigen Rohstoffvektor.
Es soll folgender Endproduktvektor benutzt werden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus entsteht der Rohstoffvektor: $\begin{pmatrix} 1020 \\ 1044 \\ 472 \end{pmatrix}$

Mit diesem Rohstoffvektor, für den mindestens eine Lösung gibt, soll jetzt zurückgerechnet werden.

Gesucht

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{51}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{13} & \frac{50}{13} & \frac{284}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{29}{13} & -\frac{109}{13} & -\frac{343}{13} \end{pmatrix}$$

$$13\,E1 + 2\,E4 - 1\,E5 = 51$$

$$13\,E2 + 17\,E4 + 50\,E5 = 284$$

$$13\,E3 - 29\,E4 - 109\,E5 = -343$$

Das Ergebnis ist eine zweiparametrige Lösung in Abhängigkeit von E4 und E5. Das bedeutet, es könnten für E4 und E5 konkrete Werte vorgegeben werden aus denen dann die anderen Werte zu berechnen sind. Sind andere Werte als E4 und E5 vorgegeben, so müssen diese dann in die hinteren Spalten eingetragen werden.

Setzen wir für E4 = 7 und E5 = 2 ein, so ergibt sich für die anderen Erzeugnisse: E1 = 3 ; E2 = 5 ; E3 = 6.

Bereits aus diesem Gleichungssystem ist zu erkennen, dass nicht jede ganzzahligen Werte von E4 und E5 auch zu ganzzahligen Werten von E1 bis E3 führen.

Grundaufgabe 3:

Gegeben:
Matrix A, Matrix B
Kostenvektoren k_R, k_Z, k_E
Endproduktvektor p

Gesucht:
Kosten pro Endprodukt

Es werden soundso viele Mengeneinheiten der einzelnen Endprodukte bestellt. Berechnen Sie die entstehenden variablen Kosten.
Lösungsansatz: k_v : variable Kosten; Bestellmengenvektor der Endprodukte;

$$k_{v\,[1,1]} = k_{R[m,1]}^{T} \; C_{[m;n]} \quad p_{[n;1]} + k_{Z[p;1]}^{T} \, B_{[p;n]} \, p_{[n,1]} \; + \; k_{E[n;1]}^{T} \, p_{[n,1]}$$

Ein Vektor $k_{R[m,1]}$ ist ein Spaltenvektor mit m – Zeilen und 1 Spalte. Wird von einem solchen Vektor die Transponierte $k_{R[m,1]}^{T}$ gebildet, dann ist das ein Zeilen Vektor mit 1 – Zeile und m Spalten. Damit ist bei der Matrizen Multiplikation die Verkettung gesichert.

Gegeben

An variablen Kosten je Einzelteil in € entstehen:

Kosten **je** Einzelteil k_T

$$\begin{array}{c} \text{€/T1} \\ \text{€/T2} \end{array} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fertigungskosten **je** Zwischenprodukt k_Z

$$\begin{array}{c} \text{€/Z1} \\ \text{€/Z2} \end{array} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Fertigungskosten **je** Endprodukt k_E

$$\begin{array}{c} \text{€/E1} \\ \text{€/E2} \\ \text{€/E3} \end{array} \begin{pmatrix} 19 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die gesamten Herstellungskosten k bezogen auf je ein Endprodukt.

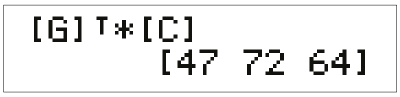
$$\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{€/E1} \\ \text{€/E2} \\ \text{€/E3} \end{array}$$

Gesucht

Die Herstellungskosten der Einzelteile je Endprodukt
$k_T^{T} * C$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 16 & 12 \\ 7 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

$= (47; 72; 64)$



```
[G]ᵀ*[C]
        [47 72 64]
```

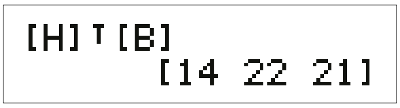
$$\begin{array}{cc} \text{€/T1} & \text{€/T2} \\ \left(\frac{€}{T1}\right. & \left.\frac{€}{T2}\right) \end{array} \bullet \begin{array}{c|ccc} & E1 & E2 & E3 \\ \hline T1 & \frac{T1}{E1} & \frac{T1}{E2} & \frac{T1}{E3} \\ T2 & \frac{T2}{E1} & \frac{T2}{E2} & \frac{T2}{E3} \end{array} = \begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \\ \left(\frac{€}{E1}\right. & \frac{€}{E2} & \left.\frac{€}{E3}\right) \end{array}$$

Rohstoffkosten pro Endprodukt

Die Herstellungskosten der Zwischenprodukte je Endprodukt
$k_Z^{T} * B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$= (14; 22; 21)$



```
[H]ᵀ[B]
       [14 22 21]
```

$$\begin{array}{cc} \text{€/Z1} & \text{€/Z2} \\ \left(\frac{€}{Z1}\right. & \left.\frac{€}{Z2}\right) \end{array} \bullet \begin{array}{c|ccc} & E1 & E2 & E3 \\ \hline Z1 & \frac{Z1}{E1} & \frac{Z1}{E2} & \frac{Z1}{E3} \\ Z2 & \frac{Z2}{E1} & \frac{Z2}{E2} & \frac{Z2}{E3} \end{array} = \begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \\ \left(\frac{€}{E1}\right. & \frac{€}{E2} & \left.\frac{€}{E3}\right) \end{array}$$

Kosten für Zwischenprodukte pro Endprodukt

(19; 26; 15)

Die Herstellungskosten der Endprodukte

je Endprodukt betragen k_E^{T} = (19; 26; 15)

$$\begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \\ \left(\frac{€}{E1}\right. & \frac{€}{E2} & \left.\frac{€}{E3}\right) \end{array}$$

Gesamtkosten je Einzelteil:

(14; 22; 21) + (47; 72; 64) + (19; 26; 15) = (80; 120; 100)

Da der dritte Vektor nicht über GTR berechnet werden muss, sollte anschließend eine Addition der einzelnen Komponenten außerhalb der Vektorrechnung erfolgen. Die berechneten Kostenvektoren enthalten nicht die Gesamtkosten, sondern nur die Kosten je Einzelteil. Für die Gesamtkosten müsste dieser Vektor mit dem Stückzahlvektor der Gesamtproduktion multipliziert werden.

Grundaufgabe 3a:

Gegeben:
Matrix A, Matrix B
Kostenvektoren k_R, k_Z, k_E
Endproduktvektor p

Gesucht:
Gesamtkosten

Es werden so und so viele ME der einzelnen Endprodukte und so und so viele ME der einzelnen Zwischenprodukte bestellt. Berechnen Sie die entstehenden Gesamtkosten.

Lösungsansatz: K : Gesamtosten; K_f : Fixkosten;

$$k_{v\,[1,1\,]} = \underbrace{(k_{R[m,1]}{}^T\ C_{[m;n]} + k_{Z[p;1]}{}^T\ B_{[p;n]} + k_{E[n;1]}{}^T\ )\ p_{[n,1]}}_{\text{Gesamtkosten Endprodukte}} + \underbrace{(k_{R[m,1]}{}^T\ A_{[m;p]} + k_{Z[p;1]}{}^T)\ z_{[p;1]}}_{\text{Gesamtkosten Zwischenprodukte}} + \underbrace{K_f}_{\text{Fixkosten}}$$

Gegeben

A

	Z1	Z2
T1	2	3
T2	4	1

B

	E1	E2	E3
Z1	1	2	3
Z2	3	4	2

C

$$\begin{array}{c|ccc} & E1 & E2 & E3 \\ \hline T1 & 11 & 16 & 12 \\ T2 & 7 & 12 & 14 \end{array}$$

Produktionsvektor
Endprodukte p

$$\begin{array}{c|c} E1 & 30 \\ E2 & 40 \\ E3 & 20 \end{array}$$

[F]

Kosten **je** Einzelteil k_T

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} €/T1 \\ €/T2 \end{array}$$

[G]

die Fertigungskosten **je** Zwischenprodukt k_Z

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} €/Z1 \\ €/Z2 \end{array}$$

[H]

die Fertigungskosten **je** Endprodukt k_E

$$\begin{pmatrix} 19 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} €/E1 \\ €/E2 \\ €/E3 \end{array}$$

[I]

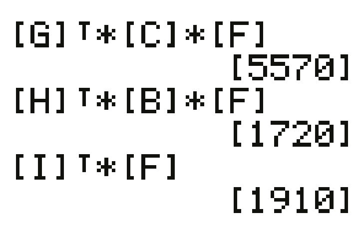
Gesucht

Es werden keine zusätzlichen Zwischenprodukte erstellt, so dass die zweite Klammer gänzlich entfällt.

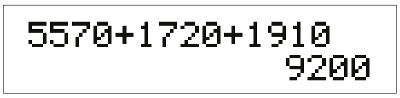
$k_{R[m,1]}{}^T\ C_{[m;n]}\ \ p_{[n,1]}$

$k_{Z[p;1]}{}^T\ B_{[p;n]}\ \ p_{[n,1]}$

$k_{E[n;1]}{}^T\ p_{[n,1]}$



```
[G]ᵀ*[C]*[F]
          [5570]
[H]ᵀ*[B]*[F]
          [1720]
[I]ᵀ*[F]
          [1910]
```



```
5570+1720+1910
          9200
```