Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Grundlagen Vektorrechnung		

Grundlagen der Vektorrechnung

Vektoren

$\mathfrak{x} = (x,y,z)^T \in \mathbf{R}^3$, $\mathfrak{x} = (x,y)^T \in \mathbf{R}^2$ — **Ortsvektoren**

$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbf{R}^3$, $\mathfrak{a} = (a_1, a_2)^T \in \mathbf{R}^2$ — **(freie) Vektoren**

$\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$ — **Summe / Differenz von Vektoren**

$t * \mathfrak{a} = (t*a_1, t*a_2, t*a_3)$ — **Produkt von Skalar und Vektor**

$|\mathfrak{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ — **Betrag eines Vektors**

$\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — **Einheitsvektor mit Richtungskosinus**

Linearkombination

$\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ sind eine beliebige Menge von Vektoren,

so heißt jeder Vektor $\mathfrak{b}$, der sich in der Form
$\mathfrak{b} = k_1\,\mathfrak{a}_1 + k_2\,\mathfrak{a}_2 + \dots + k_n\,\mathfrak{a}_n$
darstellen läßt, eine **Linearkombination der Vektoren** $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_n$. Die rellen Zahlen $k_1, k_2, \dots k_n$ heißen **Koeffizienten der Linearkombination**.

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema

Grundlagen Vektorrechnung

Gesetze und Regeln

Linear unabhängig

$\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$ heißen linear unabhängig *wenn aus* $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \mathfrak{o}$ *folgt* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$

Die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren hängt sehr eng mit der Dimension des Vektorraumes zusammen. In einem Vektorraum kann es niemals mehr linear unabhängige Vektoren geben, als die Dimension angibt. das bedeutet:

> In der Ebene kann es niemals mehr als zwei linear unabhängige Vektoren geben;
> Im Raum kann es niemals mehr als drei linear unabhängige Vektoren geben.

Drei Vektoren in der Ebene und vier Vektoren im Raum sind also immer linear abhängig. Damit reduziert sich die Fragestellung darauf zu beweisen, ob zwei Vektoren in der Ebene linear abhängig sind oder nicht, und ob drei Vektoren im Raum linear abhängig sind oder nicht (es können auch bereits zwei Vektoren im Raum linear abhängig sein!).

Lineare Unabhängigkeit im R^2

Für die Ebene lässt sich die Frage sehr leicht beantworten:

> In der Ebene sind zwei Vektoren genau dann linear abhängig, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist. Man bezeichnet sie dann als **kollinear**.

Musterbeispiele

Die beiden Vektoren (2 |–3) und (–2|5) sind linear unabhängig, da die Komponenten nicht durch eine Multiplikation mit der gleichen reellen Zahl ineinander überführt werden können. Dafür sind die Vektoren (3|4) und (9|12) linear abhängig, da der zweite Vektor das dreifache des ersten Vektors ist.

Auf der Grundalge der Definition der linearen Abhängigkeit/ Unabhängigkeit kann man diesen Sachverhalt mathematisch folgendermaßen fassen:

Das Gleichungssystem hat keine Lösung. $k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Oder als Linearkombination mit dem Nullvektor:

Das Gleichungssystem hat als Lösung nur die triviale Lösung k =0 und l = 0.

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} k \cdot 2 \; - 2 \cdot l &= 0 \\ k \cdot -3 \; + 5 \cdot l &= 0 \end{aligned}$$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

Lineare Unabhängigkeit im R^3

Auch im Raum sind **zwei Vektoren** genau dann linear unabhängig, wenn sie keine Vielfachen voneinander sind, dh. sie dürfen nicht parallel sein.

Die Frage, ob **drei Vektoren** im Raum linear unabhängig sind, ist die Frage, ob diese drei Vektoren in einer Ebene liegen oder nicht.

> Im Raum sind drei Vektoren genau dann linear abhängig, wenn die in einer Ebene liegen. Man bezeichnet sie dann als **komplanar**.

Vier Vektoren sind im dreidimensionalen Raum immer linear abhängig.

Basis

Dimension	Die Dimension eines Vektorraumes ist die maximal mögliche Anzahl linear unabhängiger Vektoren.
Basis	eine Menge linear unabhängiger Vektoren. Jeder andere Vektor ist als Linearkombination dieser Menge von Vektoren darstellbar.

Die Anzahl der Vektoren, die in einer Basis mindestens vorhanden sein müssen, aber auch höchsten vorhanden sind, entspricht der Dimension des Vektorraumes.

$\mathfrak{a} = \alpha_1\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\mathfrak{a}_2 + \alpha_3\mathfrak{a}_3$

$\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$	heißt Basis (hier für den R^3)
α_i	sind die Koordinaten des Vektors
$\alpha_i\mathfrak{a}_i$	sind die Komponenten des Vektors

orthogonale Basis	Eine Basis heißt orthogonal, wenn alle Basisvektoren senkrecht zueinander stehen.
orthonormale Basis	Eine Basis heißt orthonormal, wenn alle Basisvektoren senkrecht zueinander stehen und die Länge 1 besitzen. (= die Basis besteht nur aus orthogonalen Einheitsvektoren. z.B $\{\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$)

Musterbeispiele

Aus der Definition der linearen Unabhängigkeit ist erkennbar, dass es sich dabei um die Frage nach der Lösbarkeit eines Gleichungssystems handelt. Dazu sollen drei Vektoren a, b, c betrachtet werden. Jeder Vektor stellt die Spalte eines Gleichungssystems dar. Nach Definition soll der Nullvektor als Linearkombination darstellbar sein. Das führt zu folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar, dann gibt es nur die Null-Lösung, dass t, r, s gleichzeitig 0 sind. Damit sind die Vektoren linear unabhängig. Entstehen in der letzten Zeile alles Nullen (ein Widerspruch ist bei homogenen Gleichungssystem nicht möglich) dann ist das Gleichungssystem mehrfach lösbar, die Vektoren sind linear abhängig. Dabei sind t,r und s die skalaren Streckfaktoren der drei Vektoren a, b, und c.

Äquivalent zu diesem Gleichungssystem ist die Frage, ist der Vektor c als Linearkombination der Vektoren a und b darstellbar. Das daraus resultierende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

> Hat das obere Gleichungssystem nur die Nulllösung, ist diese Gleichungssystem nicht lösbar.
> Hat das obere Gleichungssystem von Null verschiedene Lösungen, ist diese Gleichungssystem lösbar.

Die üblicherweise und am häufigsten verwendete Basis ist eine orthonormale Basis:

$$\mathfrak{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das ist eine Orthonormalbasis für die Koordinatenachsen x_1 , x_2 und x_3.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

Komponentendarstellung und Basis

Üblicherweise wird ein Vektor in einem Vektorraum mit seinen Komponenten dargestellt. Die **Anzahl der Komponenten** entspricht der **Dimension des Vektorraums** oder der **Anzahl der notwendigen Basisvektoren**.
Im dreidimensionalen sieht eine Komponentendarstellung wie folgt aus:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Es stellt sich die Frage, was drücken die Werte a_1, a_2, a_3 aus. Dazu soll die allgemein übliche Basis des 3-dim-Vektorraumes betrachtet werden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

> Die i – te Komponente eine Vektors ist der Verlängerungsfaktor für den i-ten Basisvektor für die Darstellung eines Vektors

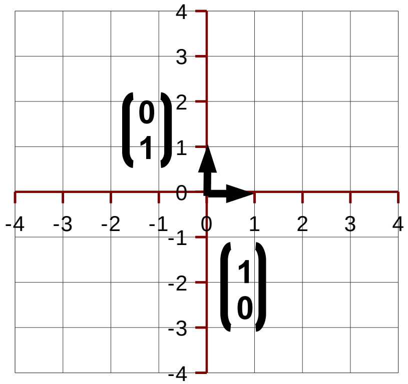
Damit gilt folgendes Gleichungssystem:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

> Ein lineares Gleichungssystem ist die Bestimmung der Linearfaktoren der Spaltenvektoren für die Komponentendarstellung der rechten Seite.

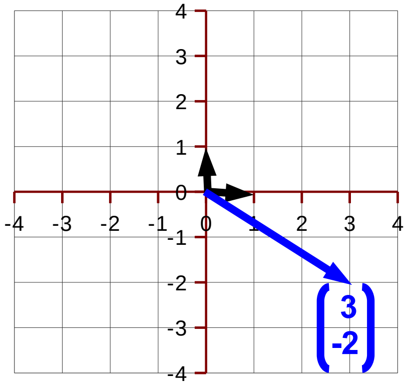
Musterbeispiele

Da bereits aus anderen Gebieten das rechtwinklige Koordinatensystem bekannt ist, benutzt man für die Vektorrechnung häufig diese Form. Im Gegensatz zum Koordinatensystem werden die Achsen nicht einfach mit Zahlen, die die Einheit angeben gekennzeichnet, sondern man schreibt die Einheit einer Achse als 2-dimensionalen Vektor, bei dem die Komponenten, die die Achse angibt mit 1 gekennzeichnet wird und alle anderen Komponenten mit 0



Jeder Vektor der Ebene lässt sich aus diesen beiden Vektoren durch Linearkombination erzeugen. Da es sich um Basisvektoren der Länge 1 handelt, ist der notwendige Linearfaktor identisch mit der jeweiligen Komponente des Vektors:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Diesen Zusammenhang könnte man auch herstellen, indem man folgendes Gleichungssystem aufstellt:

$$\begin{aligned} 3 &= 1x - 0y \\ -2 &= 0x + 1y \end{aligned}$$

Die Lösungen x und y sind die gesuchten Linearfaktoren.
Die Lösung des Gleichungssystems sind die Komponenten des Vektors auf der rechten Seite unter Benutzung der Basisvektoren, die als Spalten in der Koeffizientenmatrix in Erscheinung treten.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

Gleichungssysteme und Vektorrechnung

Ein Gleichungssystem heißt **homogen**, wenn auf der rechten Seite alle Elemente gleich Null sind = auf der rechten Seite der Nullvektor steht.

Die Lösung eines **homogenen, linearen Gleichungssystem** entscheidet darüber, ob eine Menge von Vektoren **linear unabhängig/abhängig** ist.

$$t_1\,\vec{\mathfrak{a}}_1 + t_2\,\vec{\mathfrak{a}}_2 + t_3\,\vec{\mathfrak{a}}_3 + \ldots = \vec{\mathfrak{o}}$$

Ein Gleichungssystem heißt **inhomogen**, wenn auf der rechten Seite mindestens ein Wert verschieden von 0 ist = auf der rechten Seite ein vom Nullvektor verschiedener Vektor steht.

Die Lösung eines **inhomogenen, linearen Gleichungssystem** entscheidet darüber, ob sich ein Vektor $\mathfrak{b}$ als Linearkombination einer Menge von Vektoren darstellen läßt.

$$t_1\,\vec{\mathfrak{a}}_1 + t_2\,\vec{\mathfrak{a}}_2 + t_3\,\vec{\mathfrak{a}}_3 + \ldots = \vec{\mathfrak{b}}$$

Die Lösung des Gleichungssystems $t_1, t_2, t_3, \ldots$ sind die Komponenten des Vektors $\mathfrak{b}$ unter Benutzung der Basis $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$

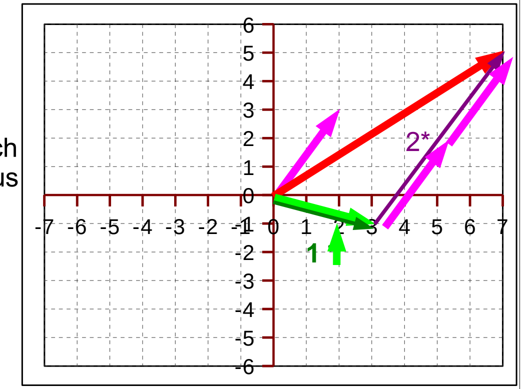
$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots}$$

Die Lösung eines **inhomogenen, linearen Gleichungssystem** ist die **Komponentendarstellung** des Vektors der rechten Seite bezüglich **der neuen Basis**, die durch die Spaltenvektoren gebildet wird. (Basistransformation)

(s. dazu vorheriges Kapitel „Komponentendarstellung und Basis“)

Inhomogenes Gleichungssystem als Linearkombination

$$x\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$



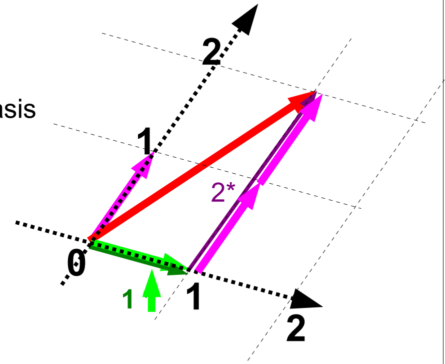
$\Rightarrow$ Die Lösung eines Linearen Gleichungs-systems ist die Suche nach den Linearfaktoren, um aus vorgegebenen Vektoren einen Vektor als Linearkombination zu erzeugen.

Lösung:
x = 1
y = 2

Inhomogenes Gleichungssystem als Basistransformation

Die Vektoren und sind linear unabhängig damit sind sie als Basis für den Vektorraum geeignet.

x + y =



Die Komponentendarstellung des Vektors unter der Basis und ist: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

(Bei diesem Beispiel muss man sich von der Denkweise des üblichen rechtwinkligen Koordinatensystems lösen. Es gibt andere Basisvektoren, die ein anderes Koordinatensystem erzeugen. Es sind die Faktoren für diese Basis gesucht, die den roten Vektor erzeugen.)

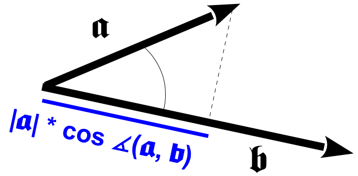
In dieser Basis hat der Vektor die Komponenten $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und der Vektor die Komponenten $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

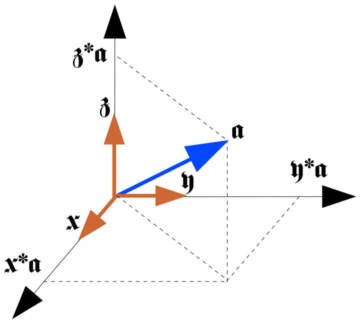
Das Skalarprodukt

$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
$= |\mathfrak{a}|\ |\mathfrak{b}| \cos \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$



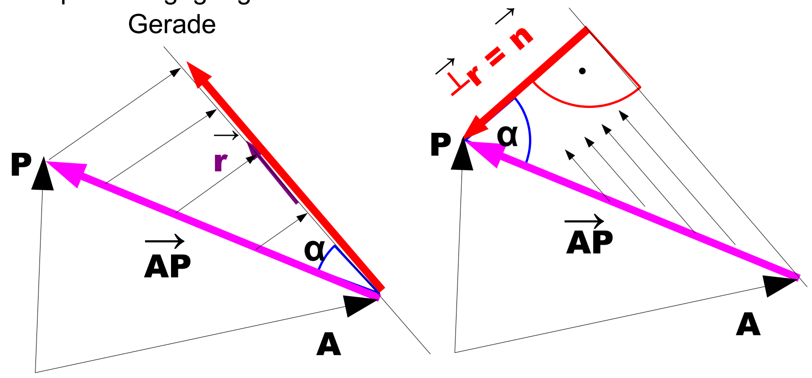
Das Ergebnis des Skalarproduktes ist ein skalarer Wert ohne Richtung, der die Länge der Projektion eines Vektors auf den Einheitsvektor des zweiten Vektors darstellt. Projektion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}^0$ oder Projektion von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}^0$. Ist insbesondere $\mathfrak{b}^0$ ein Einheitsvektor, ist das Skalarprodukt die Komponente von $\mathfrak{a}$ in Richtung $\mathfrak{b}^0$.

$\mathfrak{a} \odot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\odot\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\odot\mathfrak{c}$	Das Skalarprodukt ist distributiv
$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \odot \mathfrak{a}$	Das Skalarprodukt ist kommutativ
$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{a} = \lvert\mathfrak{a}\rvert^2 = a^2$	Das Skalarprodukt mit sich selbst ist der Betrag
$\lvert\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}\rvert \leq \lvert\mathfrak{a}\rvert * \lvert\mathfrak{b}\rvert$	Der Betrag des Skalarproduktes aus zwei Vektoren ist immer kleiner als das Produkt der beiden Beträge
$(\alpha\, \mathfrak{a}) \odot \mathfrak{b} = \alpha\, (\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b})$	Ein skalarer Faktor kann ausgeklammert werden.
$\mathfrak{a}_b = (\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}^0)\, \mathfrak{b}^0$	Komponente von a in Richtung b
$\mathfrak{a}_b = \mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}^0 = \lvert\mathfrak{a}\rvert \cos \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^0)$	Projektion von a auf b
$\mathfrak{a}_b^{\perp} = \lvert\mathfrak{a}\rvert \sin \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^0)$	Projektion von a senkrecht zu b



Existiert eine beliebige Orthogonale Basis, so kann man mit Hilfe des Skalarproduktes die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{a}$ zu jedem dieser Basisvektoren bestimmen.

Genau diese Eigenschaft, dass das Skalarprodukt mit dem cos des eingeschlossenen Winkels zusammenhängt macht man sich bei Abstandsberechnung zu Nutze. Als Abstände von einem Objekt zu einem anderen werden immer die senkrechten Abstände oder kürzesten Entfernungen betrachtet. Das soll hier exemplarisch einmal für den Abstand eines Punktes zu einer Geraden in der Ebene betrachtet werden. Das Prinzip ist im R^3 genau das gleiche, auf Unterschiede wird später eingegangen.



Jede Geraden- oder Ebenengleichung hat mindestens einen Stützvektor, von dem man genau weiß, dass er auf der Geraden oder Ebene liegt. Jetzt bildet man den Verbindungsvektor von dem Stützvektor zu P. Es ist dabei zu beachten, dass es immer eine Ebene gibt, in der die Vektoren P, A, r und $^{\perp}r$ liegen, auch im R^3.
Bei einer Geraden ist nur der Richtungsvektor der Geraden eindeutig, senkrecht dazu liegt eine ganze Ebene. Bei einer Ebenengleichung ist nur der Normalenvektor eindeutig, senkrecht dazu liegt eine ganze Ebene. Deshalb erfolgt bei einer Geraden die Projektion auf den Richtungsvektor und bei einer Ebene auf den Normalenvektor. Der Vektor $^{\perp}r$ entspricht in diesem Fall n.

Aus der Zeichnung ist erkennbar, dass AP die Hypotenuse die rot gezeichneten Vektoren die Ankatheten in einem rechtwinkligen Dreieck sind und der Winkel α diese beiden Vektoren einschließt ist
für Geraden t r = |AP| cos α die Entfernung vom Stützvektor zu Lotfußpunkt
für Ebenen t n = |AP| cos α die Länge des senkrechten Abstandes von P zur Ebene

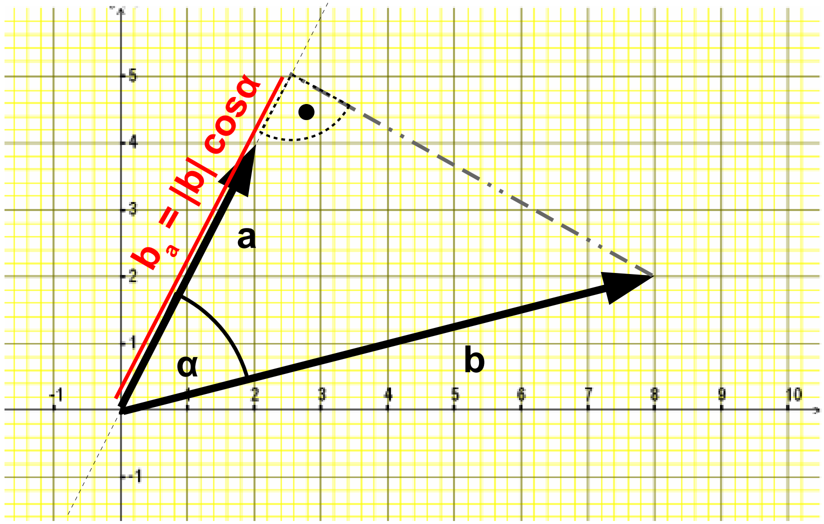
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

Skalarprodukt und Trigonometrie

Die Darstellung von zwei Vektoren, die von einem Punkt ausgehen, kann man so ergänzen, dass rechtwinklige Dreiecke entstehen. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist dann immer ein Winkel zwischen einer Kathete und einer Hypotenuse. Da die Kathete anliegend ist handelt es sich um die Ankathete und die zugehörige trigonometrische Funktion zu Ankathete und Hypotenuse ist die cos – Funktion. Die Länge der Projektion eines Vektors auf die Trägergeraden des anderen Vektors liefert den Wert : Betrag des Vektors mal cos des eingeschlossenen Winkels. Das ist ein wesentlicher Bestandteil des Skalarproduktes. Für den Wert des Skalarproduktes selbst ist nur noch mit dem Betrag des Vektors zu multiplizieren, auf den projiziert wurde.

Projektion von b auf a



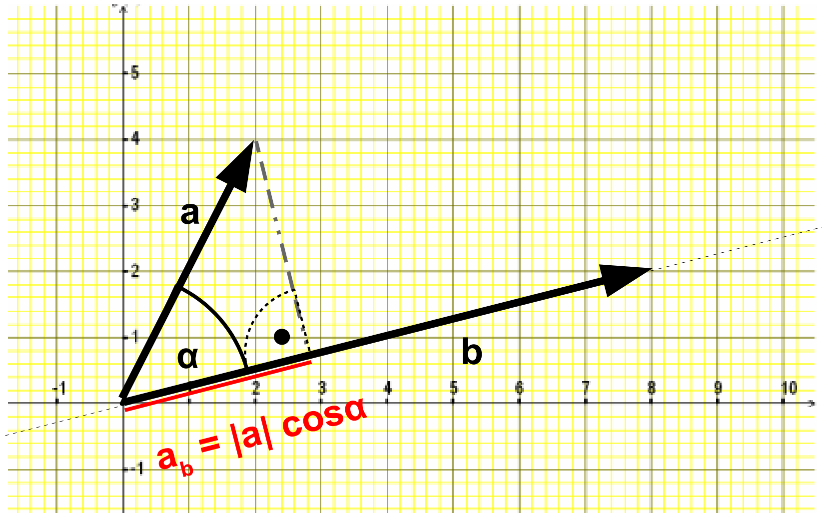
$$a \circ b = |a|\,|b| \cos\alpha = |a|\, b_a$$

$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b_a = 5{,}36$ $|a| = 4{,}47$

$a \circ b = 23{,}97$

(Die Werte von b_a und |a| sollen durch ausmessen bestimmt werden, auch, wenn dabei die Genauigkeit von zwei Stellen hinter dem Komma nicht erreicht wird. Für die Berechnung gilt, dass der eingeschlossene Winkel 49,4° beträgt)

Projektion von a auf b



$$a \circ b = |a|\,|b| \cos\alpha = |b|\, a_b$$

$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $a_b = 2{,}91$ $|b| = 8{,}24$

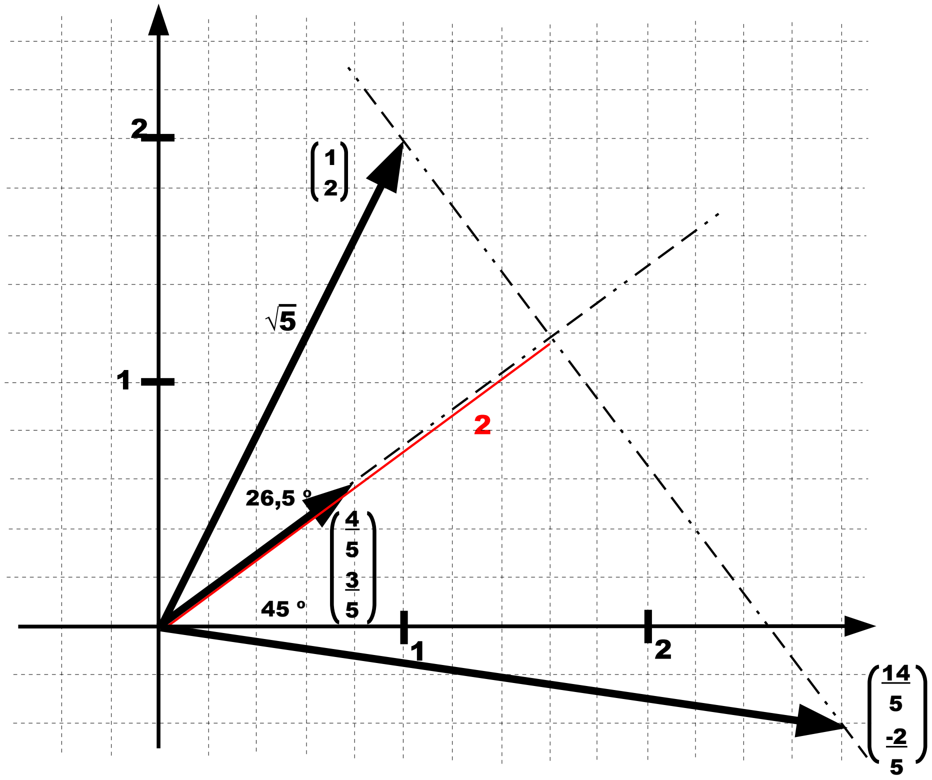
$a \circ b = 23{,}99$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor



Ist der Vektor, auf den projiziert wird, der Einheitsvektor des Richtungsvektors, dann ist das Skalarprodukt identisch mit dem Abstand des Lotfußpunktes vom Stützvektor.

Der Vektor $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge 1 und damit ein Einheitsvektor.

Skalarprodukt mit : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad 4/5 \cdot 1 + 3/5 \cdot 2 = 10/5 = 2$

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:

Hypotenuse: $\sqrt{5}$ eingeschlossener Winkel : 26,5 °

Ankathete: $A = \sqrt{5} \cdot \cos 26{,}5° = 2$

Skalarprodukt mit $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$ $\quad 4/5 \cdot 14/5 - 3/5 \cdot 2/5 = 50/25 = 10/5 = 2$

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:

Hypotenuse: $2\sqrt{2}$ eingeschlossener Winkel : 45°

Ankathete: $A = 2\sqrt{2} \cdot \cos 45° = 2$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

Das Vektorprodukt

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung des Vektorprodukts erfolgt über die Rechenregeln einer Determinante. Determinanten sind nicht Bestandteil der Schulausbildung. Das Ergebnis des Vektorproduktes ist ein Vektor, der senkrecht auf der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Ebene steht. Diese Eigenschaft ist besonders interessant für die Arbeit mit Ebenen im R^3.

$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ Betrag des Vektorproduktes

$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\times\mathfrak{c}$ Das Vektorprodukt ist distributiv

$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}$ Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ

$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\ \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}$

Der Ergebnisvektor hat die entgegengesetzte Richtung (Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, sondern antisymmetrisch. Beim Vertauschen der beiden Vektoren entsteht ein Vektor mit dem gleichen Betrag, aber in entgegengesetzte Richtung weisend. Für die obenstehende Determinante der Definition bedeutet das, man vertauscht die Zeilen für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$

$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{b})$ (Grassman Identität)

$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{c}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\odot\mathfrak{c})$

$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \odot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\odot\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b}\odot\mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}\odot\mathfrak{d})\,(\mathfrak{b}\odot\mathfrak{c})$ (Lagrange Identität)

$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ Das Vektorprodukt mit sich selbst ist der Nullvektor

$\mathfrak{a} \odot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \odot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0$ Das Skalarprodukt eines Vektors mit dem Ergebnis aus dem Vektorprodukt des gleichen Vektors mit einem anderen ist 0.

$(\alpha\, \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \alpha\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ Ein skalarer Faktor kann ausgeklammert werden.

$\mathfrak{a}_b^{\perp} = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_b = \mathfrak{b}^0 \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}^0)$ Komponente von a senkrecht zu b

Musterbeispiele

$$D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$$

(rote Pfeile) *(blaue Pfeile)*

$= i\, a_2b_3 + j\, a_3b_1 + k\, a_1b_2 - k\, b_1a_2 - i\, b_2a_3 - j\, b_3a_1$

$= (a_2b_3 - b_2a_3)\, i + (a_3b_1 - b_3a_1)\, j + (a_1b_2 - b_1a_2)\, k$

Eine andere, übersichtliche Methode das Vektorprodukt zu berechnen steht in manchen Schulbüchern. Es ist ein sehr brauchbares Rechenschema:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

Man schreibt die beiden Vektoren zweimal untereinander. Dann wird die erste und letzte Zeile gestrichen. Bei der zweiten Zeile beginnt man von links oben nach rechts unten zu Multiplizieren und dann von der dritten Zeile links unten nach rechts oben und die beiden Werte zu subtrahieren:

$a_2\, b_3 - a_3\, b_2$

dann beginnt man in der dritten Zeile links oben und von der vierten Zeile links unten: $a_3\, b_1 - a_1\, b_3$

als letztes beginnt man in der vierten Zeile von links oben und dann in der fünften Zeile von links unten: $a_1\, b_2 - a_2\, b_1$.

Auf diese Weise erhält man die Komponenten des senkrechten Vektors.

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

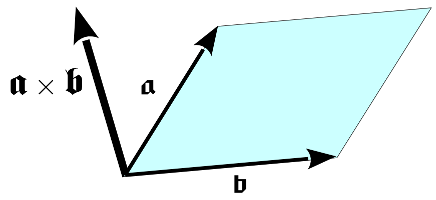
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

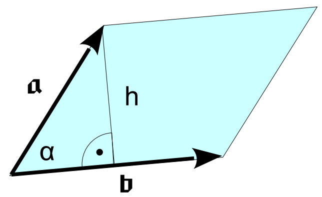
Geometrie des Vektorproduktes

Ähnlich, wie beim Skalarprodukt gibt es für das Vektorprodukt auch noch eine zweite Formel. Diese berechnet aber nicht den senkrechten Vektor, sondern nur den Betrag dieses Vektors.

$$|\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\,| = |a|\,|b| \sin \alpha$$



Zwei Vektoren spannen immer ein Parallelogramm auf. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnet sich aus Grundseite * Höhe.



Die Grundseite dieses Parallelogramms wäre etwa der Vektor b und die Länge der Grundseite |b|. α ist der von den Vektoren a und b eingeschlossene Winkel. Damit gilt für α in dem rechtwinkligen Dreieck.

$$\sin \alpha = \frac{h}{|a|} \qquad \text{oder} \qquad h = |a| \sin \alpha$$

und für den Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$A = |b| \cdot h = |b|\,|a| \sin \alpha$$

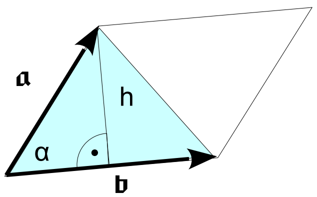
Der Betrag des Vektorproduktes aus den Vektoren a und b
ist gleich
dem Flächeninhalt des Parallelogramms,
das von den Vektoren a und b aufgespannt wird.

Aus dieser Definition des Betrages des Vektorprodukts folgt:
Ist das Ergebnis des Vektorproduktes der Nullvektor, dann müssen die beiden Vektoren parallel sein.

Parallele Vektoren können von einem Punkt aus keine Fläche aufspannen.

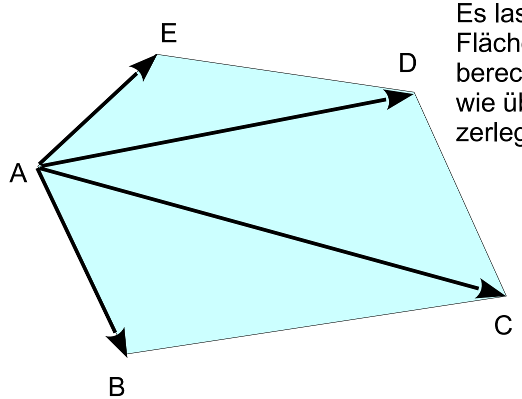
Die Vektoren sind <u>kollinear</u> .

Damit lassen sich aber nicht nur viereckige Flächen berechnen. Was für den Schulgebrauch viel wichtiger ist, sind dreieckige Flächen. Die Fläche eines Dreiecks ist die Hälfte der Fläche eines Vierecks.



$$A = \tfrac{1}{2}\,|\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\,|$$

Es lassen sich aber auch Flächen mit mehr Ecken berechnen, wenn man sie, wie üblich, in Dreieckflächen zerlegt.



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

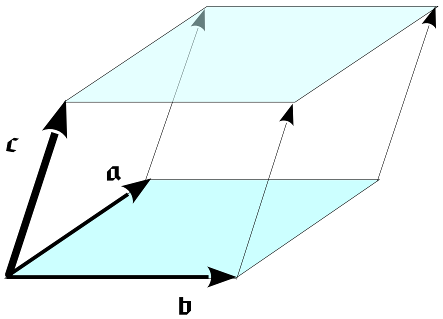
Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Vektorrechnung

Das Spatprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$



$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3$$

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = \mathbf{a} \odot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \odot \mathbf{b}$$

$$= - \mathbf{c} \odot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = - (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{a} = - (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \odot \mathbf{b}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 *(b_2c_3-c_2b_3) - a_2 * (b_1c_3-c_1b_3) + a_3 * (b_1c_2-c_1b_2)$$

Das Volumen des Spates

Nach dem Prinzip des Cavalierie berechnen sich die Volumen aller ebenen Körper nach der Formel Grundfläche mal Höhe. Wenn es sich nicht um Quader oder Würfel handelt, sondern um Pyramiden, ist noch ein zusätzlicher konstanter Faktor zu berücksichtigen, da Pyramiden Teile eines Quaders sind. Bei Pyramiden (und Kegeln) ist dieser Faktor ⅓ .

Aus dem Vektorprodukt ist klar, dass sich die Grundfläche aus dem Vektorprodukt der beiden Vektoren a und b berechnen lässt.

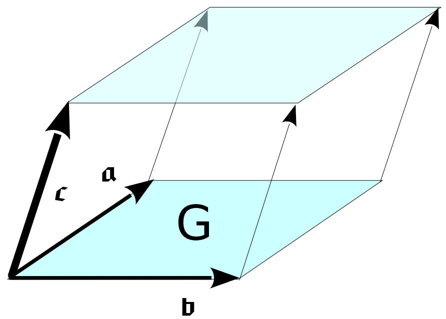
$$G = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Damit ist die Aufgabe, die Höhe des Körpers zu bestimmen. Aus dem Vektorprodukt ist weiter klar, dass das Ergebnis des Vektorproduktes ein Vektor ist, der senkrecht auf a und b steht und damit die Richtung der Höhe besitzt, aber nicht die richtige Länge.

Musterbeispiele

Der Spat ist ein Körper, dessen Seitenflächen aus Parallelogrammen bestehen (Wenn man mit einem Spaten ein Stück feste Erde ausgräbt, hat das ausgegrabenen Stück etwa diese Form).
Im letzten Abschnitt über das Vektorprodukt wurden die Flächen eines Parallelogramms berechnet, so dass es möglich ist, die Oberfläche dieses Körpers mit Hilfe des Vektorproduktes zu bestimmen.
Jetzt soll die Frage geklärt werden, ob man auch das Volumen mit Hilfe der Vektorrechnung bestimmen kann.

Damit wäre es möglich, Oberflächen und Volumen von Körpern mit viereckigen Seitenflächen allein auf der Basis der Vektorrechnung zu bestimmen. Alle Körper mit runden Seitenflächen (Kegel, Kugel, Zylinder) entziehen sich ohnehin der Vektorrechnung. Würfel, Quader eventuell auch Pyramiden besitzen aber ebene Seitenflächen.



Ist die Determinante aus drei Vektoren 0, dann bilden sie kein Volumen. Das bedeutet, dass die drei Vektoren in einer Ebene liegen.

Die drei Vektoren sind komplanar .

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema

Grundlagen Vektorrechnung

Gesetze und Regeln

Der Vektor des Vektorproduktes schließt mit der nach oben gerichteten Kante des Spats einen Winkel α ein. Mit Hilfe des Skalarproduktes könnte dieser Winkel berechnet werden.

Andererseits ist das Skalarprodukt auch die Projektion des einen Vektors auf den anderen Vektor. Ist der Vektor, auf den projiziert wird, ein Einheitsvektor, handelt es sich genau um den senkrechten Abstand der Spitze des Vektors auf den projizierten Einheitsvektor.

Deshalb soll der Vektor c auf den Einheitsvektor des Vektorproduktes projiziert werden, da dieser genau die Richtung der Höhe besitzt. und dir Projektion auf dessen Einheitsvektor genau die senkrechte Höhe angibt.

$$h = \mathbf{c} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\circ = \mathbf{c} \odot \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

Diese Höhe ist mit dem Betrag der Grundfläche zu multiplizieren, um das Volumen zu erhalten:

$$V = G \bullet h = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \bullet \left(\mathbf{c} \odot \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \right) = \mathbf{c} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Achtung bei der Multiplikation:

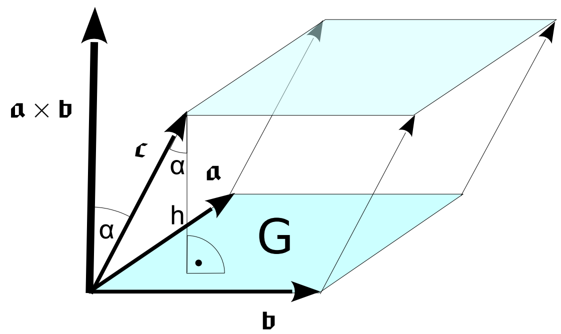
- • ist das Multiplikationszeichen zwischen zwei reellen Zahlen
- ⊙ ist das Multiplikationszeichen für ein Skalarprodukt
- x ist das Multiplikationszeichen für ein Vektorprodukt.

Die Reihenfolge dieser Multiplikationen können nicht beliebig vertauscht werden, deshalb ist es vorteilhaft Klammern zu setzen.

Das Ergebnis $\mathbf{c} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ in der Klammer ist eine reelle Zahl, der Betrag des Vektorproduktes ebenfalls. Damit dürfen die beiden Faktoren $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ gekürzt werden, da es sich dabei um reelle Zahlen handelt. Aber es darf z.B nicht $(\mathbf{c} \odot \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ gerechnet werden, da $\mathbf{c} \odot \mathbf{a}$ kein Vektor ist und somit kein Vektorprodukt mit b gebildet werden kann.

Das Volumen eines Spates aus drei Vektoren a, b , c ist gleich
dem Skalarprodukt des einen Vektors
mit dem
Vektorprodukt der beiden anderen Vektoren

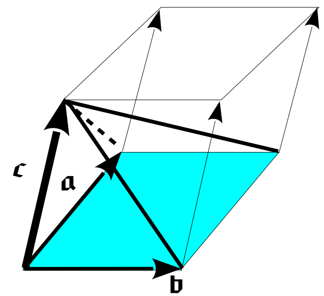
Musterbeispiele



Mathematisch gesehen ist der Wert $\mathbf{c} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ das Ergebnis einer Determinante, deren Behandlung keinen Schulstoff darstellt. Trotzdem lässt sich auch dieser Wert über den GTR berechnen, indem man die in allen GTR implementierte Funktion „Det“ dazu benutzt. Die drei Vektoren werden spalten oder zeilenweise in eine 3x3 Matrix übertragen und von dieser die Determinante berechnet. Eventuelle negative Vorzeichen sind der Orientierung der drei Vektoren untereinander geschuldet und und stellen allein keinen Rechenfehler dar.

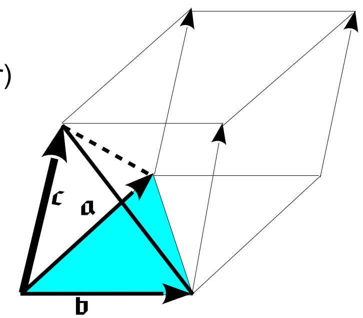
Vierseitige Pyramide

$$V = \frac{1}{3} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c}$$



Dreiseitige Pyramide (Tetraeder)

$$V = \frac{1}{6} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c}$$



Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Geraden-gleichungen

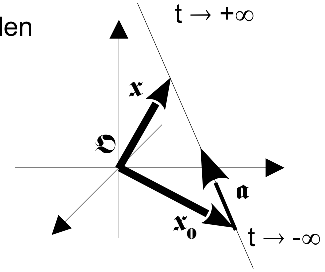
Darstellung von Geraden

Parameterdarstellung im R^2 und R^3

Punkt-Richtungs-Darstellung

$\boldsymbol{x}_0$ Ortsvektor zu einem festen Punkt auf der Geraden
$\mathfrak{a}$ Richtungsvektor
$\boldsymbol{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes
t reeller Parameter

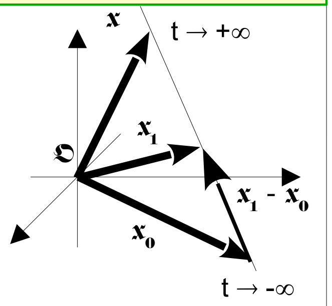
$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,\mathfrak{a}, \quad t \in (-\infty, +\infty)}$$



Zwei-Punkt-Darstellung

$\boldsymbol{x}_0$ Ortsvektor erster fester Punkt auf der Geraden
$\boldsymbol{x}_1$ Ortsvektor zweiter fester Punkt auf der Geraden
$\boldsymbol{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes
t reeller Parameter

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0), \quad t \in (-\infty, +\infty)}$$

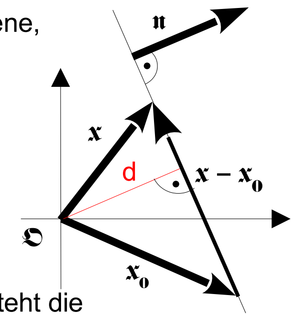


Parameterfreie Darstellung

im R^2 (Hessesche Normalform)

$\mathfrak{n}$ Normalenvektor (für D > 0 zeigt n in die Halbebene, die $\mathfrak{O}$ <u>**nicht**</u> enthält)
$\mathfrak{n}^0$ Normaleneinheitsvektor
d ($\geq$ 0) Abstand der Geraden von $\mathfrak{O}$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\odot \mathfrak{n} = 0 \\ \boldsymbol{x} \odot \mathfrak{n} = D \quad \text{mit } D := \boldsymbol{x}_0 \odot \mathfrak{n}\end{array}}$$



Durch Benutzung des Normaleneinheitsvektors entsteht die Hessesche Normalform

Musterbeispiele:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\odot \mathfrak{n}^0 = 0 \\ \boldsymbol{x} \odot \mathfrak{n} = d \quad \text{mit } d := \dfrac{D}{|\mathfrak{n}|} = \boldsymbol{x}_0 \odot \mathfrak{n}^0 \geq 0 \\ x\, n_1^0 + y\, n_2^0 = d\end{array}\right\} \mathcal{HNF}}$$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Spezielle Geraden

Spezielle Geraden

Gerade parallel zu einer Koordinatenebene

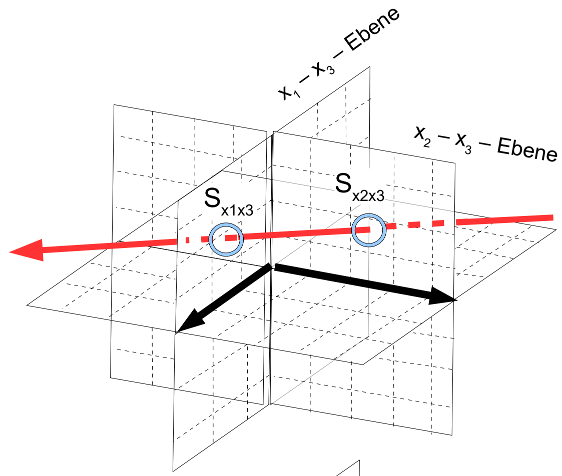
- Spurpunkte mit zwei Koordinatenebenen
- Mit der Koordinatenebene, zu der die Gerade parallel ist, gibt es keine Spurpunkte

Parallel zur x – y – Ebene (oder x_1 – x_2 – Ebene)

Der Richtungsvektor ist bei x_3 Null.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Keinen Spurpunkt mit $x_1 - x_2$ – Ebene
Spurpunkt mit $x_1 - x_3$ – Ebene
Spurpunkt mit $x_2 - x_3$ – Ebene

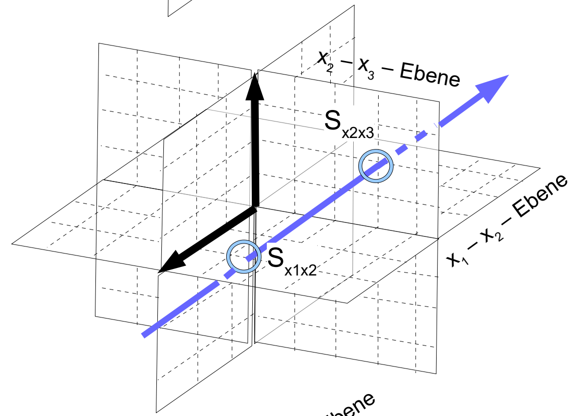


Parallel zur x – z – Ebene (oder x_1 – x_3 – Ebene)

Der Richtungsvektor ist bei x_2 Null.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Keinen Spurpunkt mit $x_1 - x_2$ – Ebene
Spurpunkt mit $x_1 - x_3$ – Ebene
Keinen Spurpunkt mit $x_2 - x_3$ – Ebene

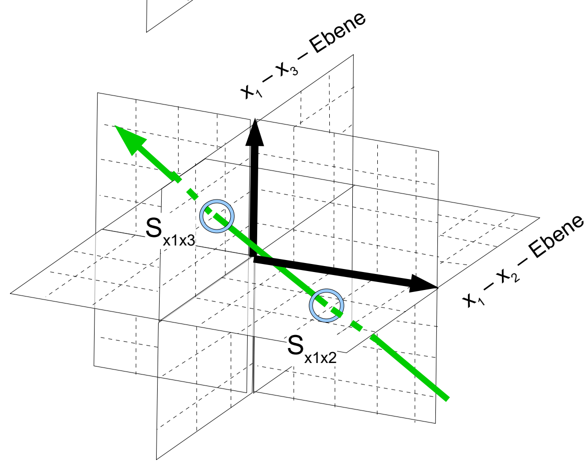


Parallel zur y – z – Ebene (oder x_2 – x_3 – Ebene)

Der Richtungsvektor ist bei x_1 Null.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Keinen Spurpunkt mit $x_1 - x_2$ – Ebene
Keinen Spurpunkt mit $x_1 - x_3$ – Ebene
Spurpunkt mit $x_2 - x_3$ – Ebene



Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Spezielle Geraden		

Spezielle Geraden

Gerade parallel zu einer Koordinatenachse

Da ist gleichbedeutend damit, dass die Gerade parallel zu zwei Koordinatenebenen ist.

- Nur ein Spurpunkt mit einer Koordinatenebene.
- Mit den beiden Koordinatenebenen, mit denen die Gerade parallel ist, gibt es keine Spurpunkte
- Die Gerade steht senkrecht auf einer Koordinatenebene

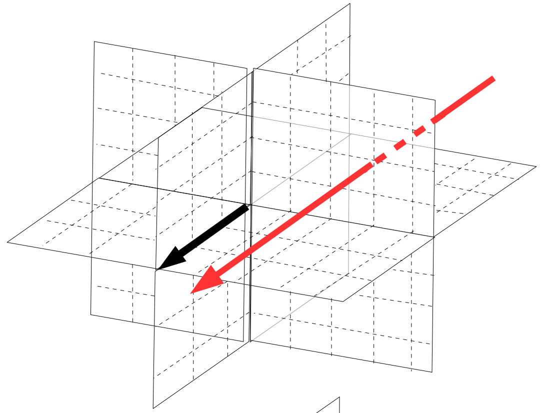
Parallel zur x-Achse (oder x_1-Achse)

Parallel zur $x_1 - x_2$ – Ebene und $x_1 - x_3$ – Ebene

Der Richtungsvektor ist bei x_2 und x_3 Null.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Keinen Spurpunkt mit $x_1 - x_2$ – Ebene
Keinen Spurpunkt mit $x_1 - x_3$ – Ebene
Spurpunkt mit $x_2 - x_3$ – Ebene



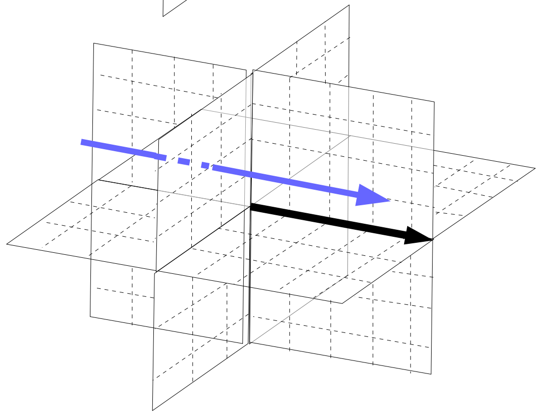
Parallel zur y-Achse (oder x_2-Achse)

Parallel zur $x_1 - x_2$ – Ebene und $x_2 - x_3$ – Ebene

Der Richtungsvektor ist bei x_1 und x_3 Null.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Keinen Spurpunkt mit $x_1 - x_2$ – Ebene
Spurpunkt mit $x_1 - x_3$ – Ebene
Keinen Spurpunkt mit $x_2 - x_3$ – Ebene



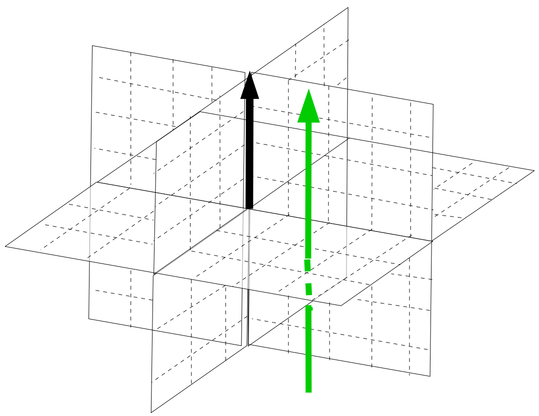
Parallel zur z-Achse (oder x_3-Achse)

Parallel zur $x_1 - x_3$ – Ebene und $x_2 - x_3$ – Ebene

Der Richtungsvektor ist bei x_1 und x_2 Null.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt mit $x_1 - x_2$ – Ebene
Keinen Spurpunkt mit $x_1 - x_3$ – Ebene
Keinen Spurpunkt mit $x_2 - x_3$ – Ebene



Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Geraden-gleichungen		

Umrechnung der Darstellungen im R²

Parameter- in parameterfreie Darstellung

$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{a}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{x} \odot \mathbf{n}^0 = d}$

$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\,\mathbf{a} \quad |\odot \mathbf{n} \qquad \perp \mathbf{a}$

Für $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ wähle z. B. $\mathbf{n} = (-a_2, a_1)^T$ oder $\mathbf{n} = (a_2, -a_1)^T$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \odot \mathbf{n} = 0$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \odot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = 0 \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{n}^0 = d \qquad \text{mit } d := \mathbf{x}_0 \odot \mathbf{n}^0$

Musterbeispiel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ Normalenvektor von g: $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \odot \mathbf{n} = 0$

$\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0$

$x_1 + 3x_2 = 7$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \odot \mathbf{n}^0 = 0$

$\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix} = 0$

Parameterfreie in Parameter Darstellung

$\boxed{\mathbf{x} \odot \mathbf{n}^0 = d} \longrightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{a}}$

1. Variante

$\mathbf{x}_0 = d\,\mathbf{n}^0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x}_0| = d$

$\mathbf{n}^0 \perp \mathbf{a}$

Für $\mathbf{n} = (n_1^0, n_2^0)^T$ wähle z. B.

$\mathbf{a} = (-n_2^0, n_1^0)^T$ oder $\mathbf{a} = (n_2^0, -n_1^0)^T$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{a}$

2. Variante

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: eine Gleichung mit zwei Unbekannten

$\mathbf{x} \odot \mathbf{n}^0 = x\,n_1^0 + y\,n_2^0 = d$

Wahl einer Variablen als Parameter: x = t

$x = 0 + t \quad \Rightarrow \quad y = \frac{d}{n_2^0} - \frac{n_1^0}{n_2^0}\,t$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{d}{n_2^0}\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}1\\ \frac{n_1^0}{n_2^0}\end{pmatrix} = \mathbf{x}^0 + t\,\mathbf{a}$

Musterbeispiele:

1. Variante

$\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

2. Variante

$\mathbf{x} \circ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = x_1 + 3x_2 = 7$

$x + 3y = 7$

$x = 0 + t \quad \Rightarrow$

$y = 7/3 - ⅓\,t$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\7/3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-⅓\end{pmatrix}$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Ebenengleichungen

Darstellung von Ebenen

Parameterdarstellung

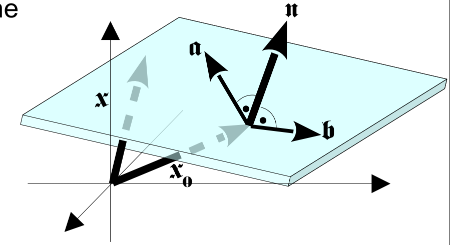
Punkt-Richtungs-Darstellung

$\mathfrak{x}_0$ Ortsvektor zu einem Punkt der Ebene

$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ nicht kollineare Richtungsvektoren

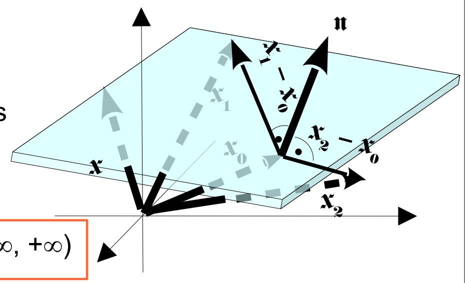
$$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b} \qquad s, t \in (-\infty, +\infty)}$$



Dreipunkt-Darstellung

$\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkt der Ebene

$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes



$$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) + s\,(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0) \qquad s, t \in (-\infty, +\infty)}$$

Zwei sich schneidende Geraden

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 \qquad s, t \in (-\infty, +\infty)$

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2$

$\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkt einer Gerade

$\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ Richtungsvektoren der Geraden

$$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 + s\,\mathfrak{a}_2}$$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Ebenengleichungen

Zwei parallele Geraden

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathfrak{a}_1$
g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_2$
E: $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \odot ((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times \mathfrak{a}_1) = 0$ oder

$$\boxed{E:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + s\,\mathfrak{a}_1}$$

Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Gerade liegt

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$
P: $\mathbf{x}_0$
$\mathbf{x}_1$ Ortsvektoren zu Punkt der Gerade
$\mathfrak{a}_1$ Richtungsvektoren der Geraden

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 + s(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad s, t \in (-\infty, +\infty)}$$

Koordinatendarstellung

aus 3 Punkten

$\mathfrak{P}$ Ortsvektor zu Punkt der Ebene
$\mathfrak{Q}$ Ortsvektor zu Punkt der Ebene
$\mathfrak{R}$ Ortsvektor zu Punkt der Ebene

$$a \bullet p_1 + b \bullet p_2 + c \bullet p_3 = d$$
$$a \bullet q_1 + b \bullet q_2 + c \bullet q_3 = d$$
$$a \bullet r_1 + b \bullet r_2 + c \bullet r_3 = d$$

Eine der Variablen a, b, c, d ist frei wählbar. Man wählt für d einen beliebigen von 0 verschiedenen Wert. Fall das Gleichungssystem dann einen Widerspruch erzeugt, ist es noch einmal mit d=0 zu berechnen. (Hintergrund: In diesem Fall geht die Ebene durch den Ursprung und d muss 0 sein.)

$$\boxed{\mathbf{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d}}$$

Musterbeispiel:

Die Punkte A(7/2/-1) , B(4/1/3) ,C(1/3/2) legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene E.

$$n_1\ 7 + n_2\ 2 + n_3\ (-1) = D$$
$$n_1\ 4 + n_2\ 1 + n_3\ 3 = D$$
$$n_1\ 1 + n_2\ 3 + n_3\ 2 = D$$

Dieses Gleichungssystem enthält 4 Unbekannte. Die gesuchten Werte für n_1, n_2 und n_3, aber auch den Wert für die rechte Seite D. Damit ist eine Variable frei wählbar. Es empfiehlt sich hier den Wert für D zu nehmen und irgend einen Wert vorzugeben. Dann kann man das Gleichungssystem in den GTR eingeben und erhält eine eindeutige Lösung.

Bei der Vorgabe von D kann es bei der Berechnung des Gleichungs-systems zu einem Widerspruch kommen. Da drei Punkte aber immer eine Ebene bilden darf es zu keinem Widerspruch kommen. Der scheinbare Widerspruch ist zu lösen, indem das Gleichungssystem noch einmal mit d = 0 berechnet wird.

Mathematatik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

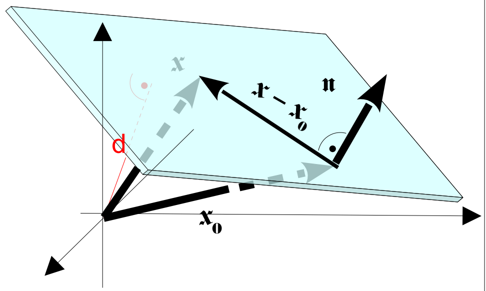
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Ebenen-gleichungen

Parameterfreie Darstellung im R^3 (Hessesche Normalform in Vektorschreibweise)

$\mathfrak{n}$ Normalenvektor (für d > 0 zeigt n in die Halbebene, die $\mathcal{O}$ **nicht** enthält)
$\mathfrak{n}^0$ Normaleneinheitsvektor
d ($\geq$ 0) Abstand der Fläche von $\mathcal{O}$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)\odot\mathfrak{n}=0\\ \mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}=D \quad \text{mit } D:=\mathfrak{x}_0\odot\mathfrak{n}\end{array}}$$



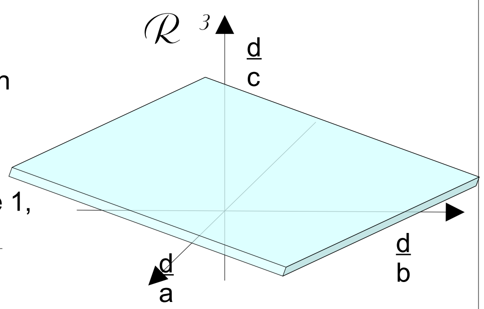
Durch Benutzung des Normaleneinheitsvektors entsteht die Hessesche Normalform

$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)\odot\mathfrak{n}^0=0\\ \mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}=d \qquad \text{mit } d := \dfrac{D}{|\mathfrak{n}|}=\mathfrak{x}_0\odot\mathfrak{n}^0\geq 0\\ x\,n_1^0+y\,n_2^0+z\,n_3^0=d\end{array}\right\}\mathcal{HNF}$$

Parameterfreie Darstellung im R^3 (Hessesche Normalform in Koordinatenschreibweise)

E_1 : ax + by + cz = d

Diese Form entspricht der Hesseschen Normalform. Die Koeffizienten a, b, c kann man als die Koordinaten des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ ansehen. Es fehlt lediglich die Normierung auf die Länge 1, die aber sehr leicht durch Division der Ebenengleichung durch $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$



Gleichzeitig lassen sich daraus die Achsenabschnitte ermitteln, die die Spurpunkte liefern.

$$\boxed{\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Achsenabschnittsgleichung

$$\boxed{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1}$$

Dass die drei Koeffizienten a, b, c den Normalenvektor $n = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ darstellen ist aus der Schule hinlänglich bekannt.

Weniger bekannt ist in der Schule die Bedeutung des Bezeichners d.

Das d in der Originalgleichung ax + by + cz = d hat keine Bedeutung.

In der umgeschriebenen Form

$$\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

sieht das anders aus. Diese Form der Koordinatengleichung wird benötigt, wenn man Abstände von Punkten zur Ebene berechnen will. Dazu muß der Normalenvektor auf Einheitsvektor gebracht werden, was bedeutet es müssen beide Seiten durch den Betrag des Normalenvektors dividiert werden. Setzt man jetzt auf der linken Seite für (x,y,z) die Koordinaten eines Punktes ein, erhält man dessen Abstand zur Ebene. Jetzt soll der Koordinaten-ursprung (0|0|0) eingesetzt werden .

$\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ist der Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Umrechnungen

Umrechnung der Darstellungen

Parameter- in Normalen Darstellung

$$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}} \longrightarrow \boxed{\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}^0 = d}$$

Den Normalenvektor erhält man aus dem Vektorprodukt der Richtungsvektoren

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b} \quad | \odot \mathfrak{n} \qquad = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$$

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n} = 0 \Rightarrow \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D \qquad \text{mit } D := \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}$$

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n}^0 = 0 \Rightarrow \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}^0 = d \qquad \text{mit } d := \frac{D}{|\mathfrak{n}|} = \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}^0$$

Musterbeispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\vec{x} \circ \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = 2$$

Normalen- in Parameterdarstellung

$$\boxed{\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}^0 = d} \longrightarrow \boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}}$$

1. Variante

$$\mathfrak{x}_0 = d\,\mathfrak{n}^0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{x}_0 \perp \mathfrak{a} \quad \mathfrak{x}_0 \perp \mathfrak{b}$$

Für $\mathfrak{n}^0 = (n_1^0, n_2^0, n_3^0)$ gesucht $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{n}^0 \perp \mathfrak{a}$ $\mathfrak{n}^0 \perp \mathfrak{b}$ die nicht kollinear sind. Wähle z. B.

$\mathfrak{a} = (n_3^0, 0, -n_1^0)$ oder

$\mathfrak{b} = (n_2^0, -n_1^0, 0)$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$$

2. Variante

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: eine Gleichung mit drei Unbekannten

$$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}^0 = x\,n_1^0 + y\,n_2^0 + z\,n_3^0 = d$$

Wahl zweier Variablen als Parameter: $x = t$, $y = s$

$x = 0 + t + 0*s$; $y = 0 + 0*t + s$; $\Rightarrow$

$$z = \frac{1}{n_3^0}(d - tn_1^0 - sn_2^0)$$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{d}{n_3^0}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{n_1^0}{n_3^0}\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{n_2^0}{n_3^0}\end{pmatrix} = \mathfrak{x}^0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$$

Musterbeispiele:

1. Variante

$$\vec{x} \circ \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = 2$$

$\mathfrak{a} = (0, 0, 1)$ oder
$\mathfrak{b} = (3, 1, 0)$

(Beide Vektoren sind senkrecht zu n, also Richtungsvektoren der Ebene)

$$\mathfrak{x}_0 = 2/\sqrt{10}\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/10\\6/10\\0\end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2/10\\6/10\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

2. Variante

$$\vec{x} \circ \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = -x_1 + 3x_2 = 2$$

$y = 0 + \quad t + 0*s$;
$z = 0 + 0*t + \quad s$; $\Rightarrow$

$$x = \frac{1}{n_1^0}(d - tn_2^0 - sn_3^0)$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Hier muss statt der z Komponente die x-Komponente genommen werden, da der Normalenvektor keine n_3 Komponente besitzt und deshalb nicht durch diese geteilt werden kann. Der Punkt erfüllt die Ebenengleichung.

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Umrechnungen

Parameter- in Koordinatendarstellung

$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}} \longrightarrow \boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d}$

1. Variante

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: drei Gleichungen mit vier Unbekannten

$a \cdot x_{01} + b \cdot x_{02} + c \cdot x_{03} = d$ Der Punkt muss die Ebenengleichung erfüllen.

$a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3 = 0$
$a \cdot b_1 + b \cdot b_2 + c \cdot b_3 = 0$ Jeder Richtungsvektor muss senkrecht zum Normalenvektor sein.

Eine der Variablen a, b, c, d ist frei wählbar. Man wählt für d einen beliebigen von 0 verschiedenen Wert. Fall das Gleichungssystem dann einen Widerspruch erzeugt, ist es noch einmal mit d=0 zu berechnen. (Hintergrund: In diesem Fall geht die Ebene durch den Ursprung und d muss 0 sein.)

2. Variante

Es wird in die Normalendarstellung umgerechnet und anschließend in die Koordinatenform umgeschrieben.

Musterbeispiele:

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkt

$a\,(-3) + b\,8 + c\,1 = d$

Richtungsvektoren

$a\,(-3) + b\,4 + c\,0 = 0$
$a\,(-6) + b\,8 + c\,2 = 0$

Zunächst wählt man $d \neq 0$, in diesem Fall $d = 1$

$-3a + 8b + c = 1$
$-3a + 4b = 0$
$-6a + 8b + 2c = 0$

Die Lösung des Gleichungssystem lautet:

$(⅓\,;\,¼\,;0)$

und damit die Normalenform:

$⅓\,x_1 + ¼\,x_2 = 1$

oder mit dem Hauptnenner durchmultipliziert:

$4\,x_1 + 3\,x_2 = 12$

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a\,1 + b\,4 + c\,(-4) = d$

$a\,1 + b\,(-2) + c\,1 = 0$
$a\,5 - b\,4 + c\,0 = 0$

$a + 4b - 4c = 1$
$a - 2b + c = 0$
$5a - 4b = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +4 & -4 & 1 \\ 0 & +6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Noch einmal rechnen mit d = 0, oder rechte Seite alles 0 setzen:

$4\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_2 = 0$

Koordinaten- in Parameterdarstellung

$\boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d} \longrightarrow \boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}}$

Zuerst wird ein Punkt $\mathfrak{x}_0$ bestimmt, der die Ebenengleichung erfüllt.

Als zweites sind zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gesucht, die zum Normalenvektor n = (a;b;c) senkrecht stehen. Die einfachste Lösung ist, eine Komponente 0 zu setzen und dann die anderen beiden zu vertauschen, wobei bei einem das Vorzeichen zu ändern ist.

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Vektoren erfüllen diese Bedingung und sind garantiert nicht linear abhängig.

Musterbeispiel:

$E:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3$

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Vektoren sind senkrecht zum Normalenvektor.

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P ist Spurpunkt und erfüllt die Ebenengleichung

$$E:\quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Umrechnungen	**Normalen- in Koordinatendarstellung** $\boxed{\mathbf{x} \odot \mathbf{n}^0 = d} \longrightarrow \boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d}$ $a = n_1$ $b = n_2$ $c = n_3$ $d = d$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$ E: $2x_1 + x_2 - x_3 = 3$
	Koordinaten- in Normalendarstellung $\boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d} \longrightarrow \boxed{\mathbf{x} \odot \mathbf{n}^0 = d}$ $n_1 = a$ $n_2 = b$ $n_3 = c$ $d = d$	s. oben

Mathematatik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

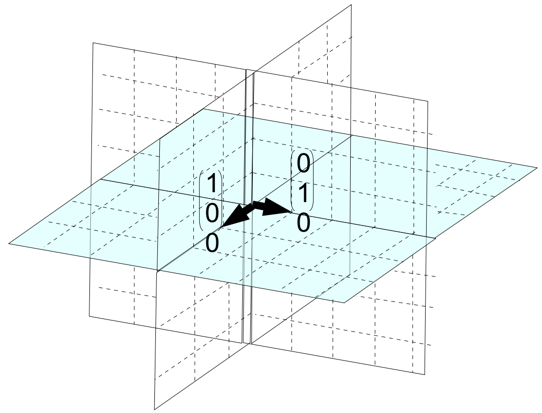
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Spezielle Ebenen	**Spezielle Ebenen**	

Spezielle Ebenen

Koordinatenebenen

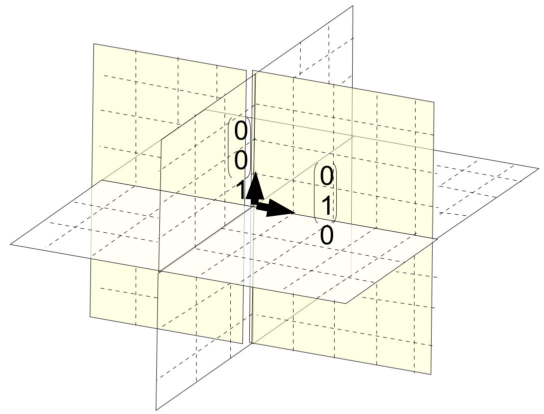
Ebenengleichung der x-y-Ebene (oder x_1-x_2-Ebene) $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Koordinatendarstellung $\quad x_3 = 0$



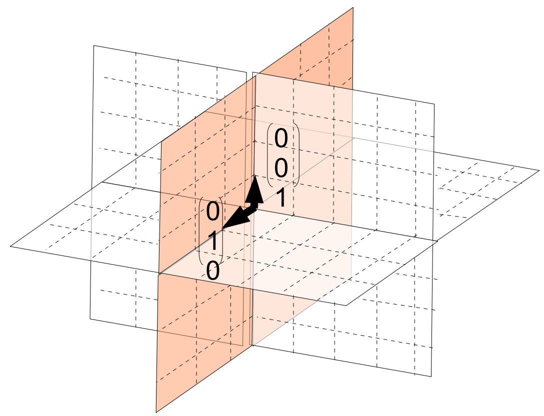
Ebenengleichung der y-z-Ebene (oder x_2-x_3-Ebene) $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinatendarstellung $\quad x_1 = 0$



Ebenengleichung der z-x-Ebene (oder x_3-x_1-Ebene) $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Koordinatendarstellung $\quad x_2 = 0$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Spezielle Ebenen

Spezielle Ebenen

Ebene parallel zu einer Koordinatenebene

- Keine Spurgerade mit der parallelen Ebene.
- Spurgeraden parallel zu den Achsen
- Keine Spurpunkte mit den Achsen der parallelen Ebene, deshalb nur einen Spurpunkt
- Ebene senkrecht zu zwei Koordinatenebenen
- Die Komponente der Richtungsvektoren der nicht parallelen Achse ist 0
- Normalenvektor hat nur eine von 0 verschiedene Komponente

Parallel zur x-y-Ebene (oder x_1-x_2-Ebene)

Eine Ebene, deren Richtungsvektoren beide in einer Koordinate Null sind, ist parallel zu einer Koordinatenebene.

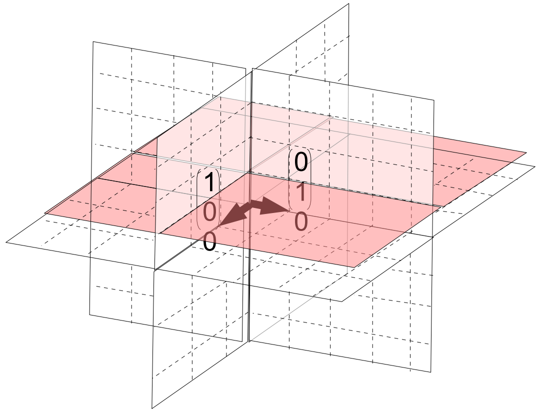
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hessesche Normalform
x_1 und x_2 Komponenten des Normalenvektors sind 0

$\mathbf{n} = (0 \mid 0 \mid n_1)$

Koordinatenform:
Koeffizienten für x_1 und x_2 fehlen

E : cz = D

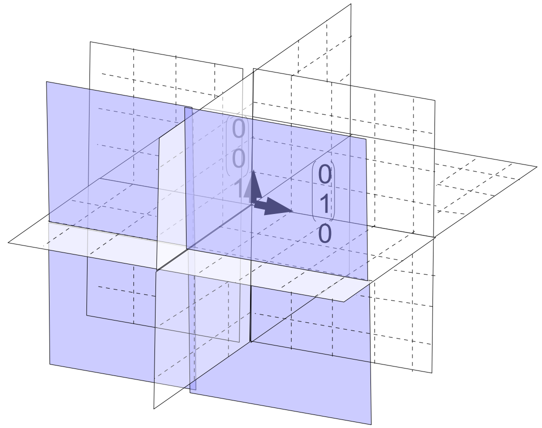


Parallel zur y-z-Ebene (oder x_2-x_3-Ebene)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{n} = (n_1 \mid 0 \mid 0)$

E : ax = D

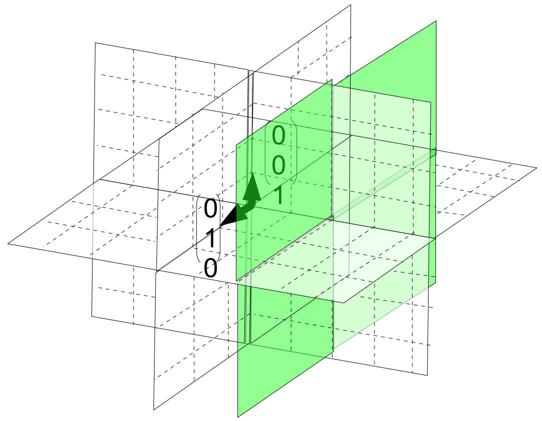


Parallel zur x-z-Ebene (oder x_1-x_3-Ebene)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{n} = (0 \mid n_2 \mid 0)$

E : by = D



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Spezielle Ebenen

Spezielle Ebenen

Ebene parallel zu einer Koordinatenachse

- Zwei Spurgeraden parallel zur parallelen Achse
- Kein Spurpunkt mit der parallelen Achse
- Normalenvektor hat keine Komponente der parallelen Achse, parallel zur Koordinatenebene der anderen beiden Achsen.

Parallel zur x-Achse (oder x_1-Achse)

Parameterdarstellung:

Eine Ebene, bei der ein Richtungsvektor parallel zu einer Koordinatenachse ist.
(ist aber nicht zwingend)

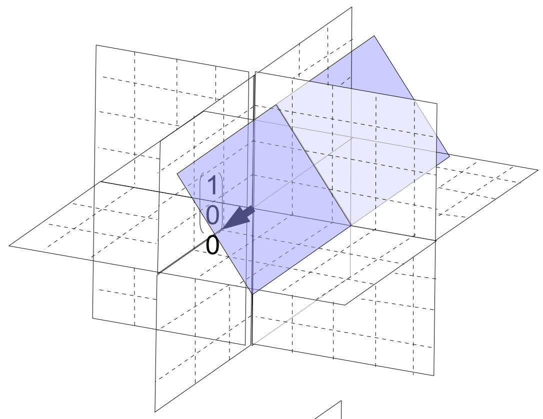
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hessesche Normalform
x_1 Komponente des Normalenvektors ist 0

$\vec{n} = (0 \mid n_2 \mid n_3)$

Koordinatenform:
Koeffizient für x_1 fehlt

E : by + cz = D



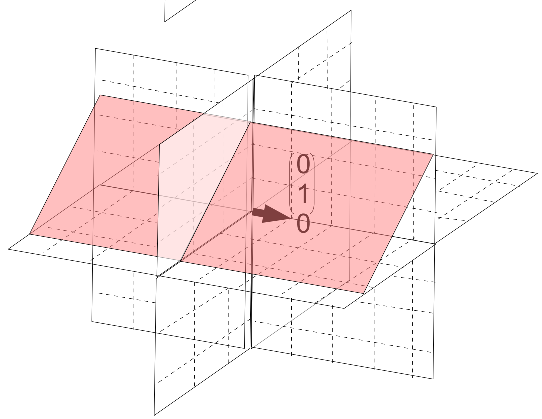
Parallel zur y-Achse (oder x_2-Achse)

Hessesche Normalform
x_2 Komponente des Normalenvektors ist 0

$\vec{n} = (n_2 \mid 0 \mid n_3)$

Koordinatenform:
Koeffizient für x_2 fehlt

E : ax + cz = D



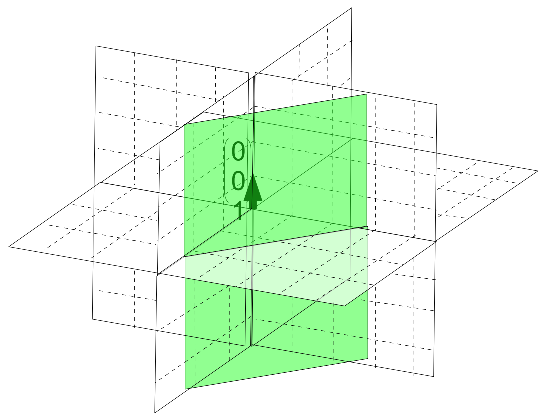
Parallel zur z-Achse (oder x_3-Achse)

Hessesche Normalform
x_3 Komponente des Normalenvektors ist 0

$\vec{n} = (n_1 \mid n_2 \mid 0)$

Koordinatenform:
Koeffizient für x_3 fehlt

E : ax + by = D



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Spezielle Ebenen

Ebene durch den Ursprung

Parameterdarstellung:

Der Ortsvektor zum Punkt ist $\mathfrak{O}$

$$\mathfrak{x} = t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Hessesche Normalform $\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = 0$

Der Abstand zum Ursprung ist 0.

Koordinatenform: $\mathbf{E : ax + by + cz = 0}$

Die Achsenabschnitte sind alle 0 (rechte Seite =0)

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Spurpunkte

Spurpunkte von Geraden

Spurpunkte sind Punkte in den Koordinatenebenen, in denen eine Gerade die Koordinatenebene durchstößt.

Für den Durchstoßpunkt einer Koordinatenebene muß eine Komponente des Geradenpunktes 0 sein.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$x_1 - x_2 -$ Ebene : $x_3 = 0$ $\qquad x_3 = 0 = x_{03} + t\,a_3 \qquad t_{12} = -\dfrac{x_{03}}{a_3}$

$x_2 - x_3 -$ Ebene : $x_1 = 0$ $\qquad x_1 = 0 = x_{01} + t\,a_1 \qquad t_{23} = -\dfrac{x_{01}}{a_1}$

$x_1 - x_3 -$ Achse : $x_2 = 0$ $\qquad x_2 = 0 = x_{02} + t\,a_2 \qquad t_{13} = -\dfrac{x_{02}}{a_2}$

Für jeden Spurpunkt ergibt sich ein Wert für t, den man in die Geradengleichung einsetzen muss. Als Ergebnis erhält man den gesuchten Spurpunkt.

- Nicht jede Gerade besitzt Durchstoßpunkte mit allen drei Koordinatenebenen. Ausschlaggebend dafür ist der **Richtungsvektor**. Hat der Richtungsvektor in einer Komponente eine 0, dann kann man diese Komponente nicht nach t auflösen und es gibt keinen Durchstoßpunkt. In diesem Fall ist der Richtungsvektor parallel zu einer Koordinatenebene.

- Hat der **Stützvektor** der Geradengleichung in der gleichen Komponente auch eine 0, dann liegt die Gerade in einer Koordinatenebene.

- Jede Gerade hat mindestens einen Durchstoßpunkt mit einer Koordinatenebene

Musterbeispiele

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Durchstoßpunkt mit $x_1 - x_2 -$ Ebene

$x_3 = 0 = 3 - t \qquad t = 3 \qquad S_{x1x2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt mit $x_2 - x_3 -$ Ebene

$x_1 = 0 = 4 + 2t \qquad t = -2 \qquad S_{x2x3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt mit $x_1 - x_3 -$ Ebene

$x_2 = 0 = 3 + t \qquad t = -3 \qquad S_{x1x3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Spurpunkte		

Spurpunkte von Ebenen

Spurpunkte sind Punkte auf den Koordinatenachsen, in denen eine Ebene von der Achse durchstoßen wird.
Für den Durchstoßpunkt einer Koordinatenachse müssen die beiden anderen Koordinaten 0 sein.

Geradengleichung der x-Achse (oder x_1-Achse) $\quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geradengleichung der y-Achse (oder x_2-Achse) $\quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geradengleichung der z-Achse (oder x_3-Achse) $\quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene in parameterfreier Darstellung (Hessesche Normalform)

(siehe „Durchstoßpunkt“)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{x}_S = t_S\, \mathfrak{a} \\ \mathbf{x}_S \odot \mathfrak{n} = D \end{array}}$$

$\mathbf{x}_S \odot \mathfrak{n} = t_S\ (\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n}) = D$

$\Rightarrow t_S = \dfrac{D}{\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n}}$

	x_1-Achse	x_2-Achse	x_3-Achse
$\mathfrak{a}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
t_s	$\dfrac{D}{n_1}$	$\dfrac{D}{n_2}$	$\dfrac{D}{n_3}$

Ebene in Koordinatendarstellung

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

		Spurpunkt
x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$	$ax_1 = d$	$\dfrac{d}{a}$
x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$	$bx_2 = d$	$\dfrac{d}{b}$
x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$	$cx_3 = d$	$\dfrac{d}{c}$

Beispiel: E: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6$

E ∩ x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$	E: $2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$	$S_{x1}\ (3 \mid 0 \mid 0)$
E ∩ x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$	E: $3x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$	$S_{x2}\ (0 \mid 2 \mid 0)$
E ∩ x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$	E: $5x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = {}^6/_5$	$S_{x3}\ (0 \mid 0 \mid {}^6/_5)$

Ebene in Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Wenn diese Gleichungen Lösungen haben, gibt es einen Schnittpunkt mit der Achse.

x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$	$x_2 = 0 = x_{02} + t\,a_2 + s\,b_2$ $x_3 = 0 = x_{03} + t\,a_3 + s\,b_3$
x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$	$x_1 = 0 = x_{01} + t\,a_1 + s\,b_1$ $x_3 = 0 = x_{03} + t\,a_3 + s\,b_3$
x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$	$x_1 = 0 = x_{01} + t\,a_1 + s\,b_1$ $x_2 = 0 = x_{02} + t\,a_2 + s\,b_2$

$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

E ∩ x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$

$x_2 = 0 = -2 + 4\,t + s$
$x_3 = 0 = 4 + t\,(-2) - s1$

$t = -1 \qquad s = 6$

Schnittpunkt mit x_1-Achse

$x_1 = -4 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 = 3$

Treff Lernen
Christina Strauch

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Spurgeraden

Spurgeraden

Spurgeraden sind Schnittgeraden von Ebenen mit den Koordinatenebenen. .

Beispielhaft an der x_1-x_2-Koordinatenebene dargestellt.

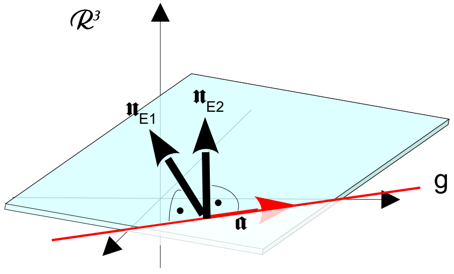
Ebene in Hessescher Normalform

(siehe „Schnittgerade“)

E_1: $\mathbf{x} \odot \mathfrak{n}_1 = d_1$

E_2: $\mathbf{x} \odot \mathfrak{n}_2 = d_2$

Der Normalenvektor $\mathfrak{n}_2$ der x_1-x_2-Koordinatenebene ist: $\mathfrak{n}_2 = (0|0|1)$



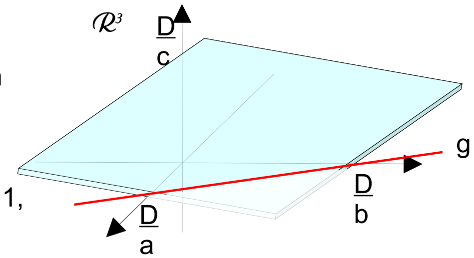
Der Richtungsvektor der Spurgeraden steht senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene E_1 und dem Normalenvektor der Koordinatenebene x_1-x_2 . Einen solchen Vektor erhält man über das Vektorprodukt: $\boxed{\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{a}}$

Einen Punkt der Geraden erhält man über den Spurpunkt der x_1 oder x_2 Achse.

Bei Schnittpunktberechnungen muss mindestens eins der Objekte in Parameterdarstellung vorhanden sein. Für die eindeutige Bestimmung eines Punktes müssen eindeutige Parameterwerte berechnet werden.

Ebene in Koordinatenform

E_1 : ax + by + cz = D



Diese Form entspricht der Hesseschen Normalform. Die Koeffizienten a, b, c kann man als die Koordinaten des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ ansehen. Es fehlt lediglich die Normierung auf die Länge 1, die aber sehr leicht durch Division der Ebenengleichung durch $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Für eine Spurgerade mit der x-y-Ebene muss der z-Wert immer 0 sein. Deshalb erhält man aus der Ebenengleichung die Koordinatendarstellung der Spurgeraden indem man die z-Komponente entfernt.

$\boxed{G_s : ax + by = D}$

Musterbeispiele

$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren dürfen durch einen konstanten Wert gekürzt werden, da sich dadurch nicht die Richtung, sondern nur die Länge ändert.

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist senkrecht zu beiden Normalenvektoren der Ebene, da er in beiden Ebenen liegen muss !

Es bleibt einen Punkt zu bestimmen, der auf der Schnittgeraden und damit in beiden Ebenen liegt. Die Bestimmung des Punktes mit Hilfe der Normalform der Ebenengleichungen, in Koordinatenform geschrieben

E_1: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

E_2: $x_1 + 4x_2 - 19 = 0$

Aus z.B $x_1 = 19$ und $x_2 = 0$ folgt $x_3 = -7{,}5$ $\Rightarrow$ $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -7{,}5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel: $\quad$ E: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6$

$E \cap x_1$-x_2-Ebene: $x_3 = 0$	g: $2x_1 + 3x_2 = 6$
$E \cap x_2$-x_3-Ebene: $x_1 = 0$	g: $3x_2 + 5x_3 = 6$
$E \cap x_1$-x_3-Ebene: $x_2 = 0$	g: $2x_1 + 5x_3 = 6$

Mathematatik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Spurgeraden

Gesetze und Regeln

☆ Ebene in Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Für die Spurgerade mit der x_1-x_2-Ebene müssen die Koordinaten von $x_3 = 0$ sein. Damit entsteht aus den x_3-Koordinaten der Ebenengleichung eine Gleichung mit zwei Unbekannten t und s.

$$\boxed{x_{03} + t\, a_3 + s\, b_3 = 0}$$

Diese Gleichung hat keine eindeutige Lösung. Die Gleichung muss nach einer Variablen aufgelöst werden.

$$\boxed{t = -\frac{x_{03}}{a_3} - \frac{b_{03}}{a_3}}$$

Dieser Ausdruck ist als Parameter t in die Ebenengleichung einzusetzen. Nach dem Zusammenfassen der einzelnen Koordinaten entsteht eine Gleichung mit einem Parameter (hier s). Eine solche Gleichung ist einen Geradengleichung.

☆ Spurgerade aus Spurpunkten erzeugen

Für die Spurgerade der x_1-x_2 Ebene benötigt man die Spurpunkte $\mathbf{S}_{x1}$ der x_1 Achse und $\mathbf{S}_{x2}$der x_2-Achse. Mithilfe dieser beiden Punkte kann man die Zwei-Punkte-Gleichung aufstellen.

$$\boxed{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} S_{x1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} S_{x1} \\ -S_{x2} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Musterbeispiele

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

E ∩ x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$

$$x_3 = 0 = 4 + t\,(-2) - s\; 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + (4 - 2t) \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s = 4 - 2t$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 + 4 \\ -2 + 4 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} + t \bullet \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 4 - 2 \\ -2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für t = – 1 wird der Achsenschnittpunkt (3,0,0) erreicht, für t = 0 wird der Achsenschnittpunkt (0,2,0) erreicht, also Gleichung der Spurgerade

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

Lagebeziehungen Gerade – Punkt

Abstand, Lotvektor, Fußpunkt des Lotes

$\mathfrak{d}$ Lotvektor
$d(P,g) = |\mathfrak{d}|$ Abstand des Punktes P zur Geraden g
$\mathfrak{x}_F$ Ortsvektor zum Fußpunkt des Lotes
t_F Parameterwert t von $\mathfrak{x}_F$ auf der Geraden g

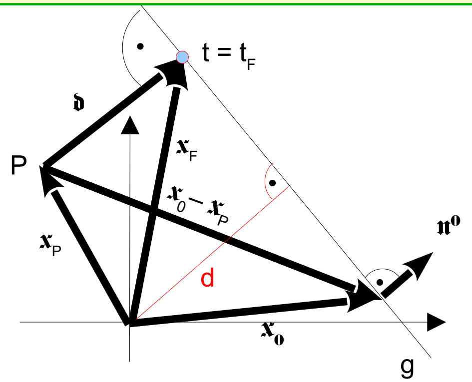
Die Lotebene ist eine senkrechte Ebene zur Gerade. s.dazu Lagebeziehung Ebene -Gerade

Gerade in Hessescher Normalform (nur R^2)

$$\left.\begin{array}{l} g:\ \mathfrak{x}\odot\mathfrak{n} = d \\ P:\ \mathfrak{x}_P \end{array}\right\}\ \text{nur } \mathcal{R}^2$$

Es gilt: $\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P - \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \parallel \mathfrak{n}^0 \end{array}}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} &= (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P)_{\mathfrak{n}^0} \\ &= ((\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P)\odot\mathfrak{n}^0)\ \mathfrak{n}^0 \\ &= (d - \mathfrak{x}_P \odot \mathfrak{n}^0)\ \mathfrak{n}^0 \end{aligned}$$



Die Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden im R^2 erfolgt identisch zur Abstandsberechnung eines Punktes im R^3 von einer Ebene und ist dort ausführlich erklärt. Die Ursache liegt darin, dass für eine Gerade im R^2 ein eindeutiger senkrechter Vektor existiert, genauso, wie bei einer Ebene im R^3.
Die Dimension des geometrischen Gebildes ist genau um 1 niedriger als der Raum, in dem das Gebilde dargestellt wird. Solche Gebilde nennt man Hyperebenen.

Musterbeispiel

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ P (4 / 9)

1. Lösungsweg: Schnittpunkt mit der senkrechten Geraden durch P

Normalenvektor von g: $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Geradengleichung durch P und senkrecht zu g: $g^{\perp}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Schnittpunkt:
$1 + 3t = 4 + 1s$ $3t - 1s = 3$ $t = 1/5$
$2 - 1t = 9 + 3s$ $-1t - 3s = 7$ $s = -12/5$

Schnittpunkt mit $g:\ \vec{x}_S = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1/5\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/5\\9/5\end{pmatrix}$

$g^{\perp}:\ \vec{x}_S = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} - 12/5\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/5\\9/5\end{pmatrix}$

Differenzvektor zwischen Schnittpunkt und P: S – P $\begin{pmatrix}-12/5\\-36/5\end{pmatrix}$

Abstand ist Länge des Differenzvektors:
$1/5\sqrt{144 + 1296} = 1/5\sqrt{144 + 9\cdot144} = 12/5\sqrt{10} = 7{,}59$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

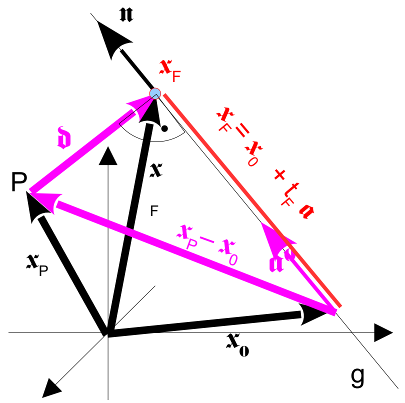
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

Gerade in Parameterform

$\left.\begin{array}{l} g:\ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} \\ P:\ \mathfrak{x}_P \end{array}\right\}$ $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Es gilt: $\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P + \mathfrak{d} \\ \mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_0 + t_F\,\mathfrak{a} \\ 0 = \mathfrak{a} \odot \mathfrak{d} \end{array}}$



1. Variante

Gesucht ist ein Vektor $\mathfrak{d}$ der senkrecht zu $\mathfrak{a}$ verläuft und durch den Punkt P geht. Nur, wenn das Skalarprodukt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ = 0, hat man den kürzesten Abstand gefunden und der Geradenpunkt, in dem das realisiert wird, ist der Fußpunkt des Lotes.

Man bildet den Differenzvektor von P und einem beliebigen Geradenpunkt und bestimmt den Wert t für die Gerade, für den dieser Differenzvektor senkrecht auf $\mathfrak{a}$ steht.

$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{x}_0 + t_F\,\mathfrak{a}) - \mathfrak{x}_P$$
$$\mathfrak{d} \odot \mathfrak{a} = ((\mathfrak{x}_0 + t_F\,\mathfrak{a}) - \mathfrak{x}_P) \odot \mathfrak{a}$$
$$0 = ((\mathfrak{x}_0 + t_F\,\mathfrak{a}) - \mathfrak{x}_P) \odot \mathfrak{a}$$

$$t_F = \frac{(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|^2}$$

Dieses t_F liefert auf der Geraden den Fußpunkt des Lotes.

2. Variante

Der Differenzvektor von $\mathfrak{x}_P$ und dem Stützvektor der Geraden $\mathfrak{x}_0$ wird auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors projiziert. Nach der geometrischen Interpretation des Skalarproduktes liefert das die Länge vom Stützvektor der Geraden bis zum Fußpunkt des Lotes.

$$(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0)_{\mathfrak{a}^0} = \mathfrak{x}_F - \mathfrak{x}_0 = t_F\,\mathfrak{a}^0$$
$$= ((\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{a}^0)\,\mathfrak{a}^0$$
$$\Rightarrow\ \mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_0 + ((\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{a}^0)\,\mathfrak{a}^0$$
$$= \mathfrak{x}_0 + \frac{(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|^2}\,\mathfrak{a}$$

Musterbeispiele

Beispiel:

P (2| –3|5) $\qquad g:\ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Variante

Differenzvektor:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2t \\ 6 + t \\ -2 - t \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt mit Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix} 2 + 2t \\ 6 + t \\ -2 - t \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2(2 + 2t) + 1(6+t) + (-1)(-2-t) = 0$$
$$4 + 4t + 6 + t + 2 + t = 0$$
$$6\,t = -12$$
$$t = -2$$

Fußpunkt

$$\mathfrak{x}_F = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Abstandsvektor von P zum Fußpunkt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Betrag des Vektors ist der Abstand: $\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2. Variante

$$t_F = (\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{a}^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-12}{\sqrt{6}}$$

Projektion von $P - x_0$ auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors.

$$\mathfrak{x}_F = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-12}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Fußpunkt

$$x_F = x_0 + t_F \qquad a^0$$

© Dipl.-Math.
Armin Richter

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

3. Variante

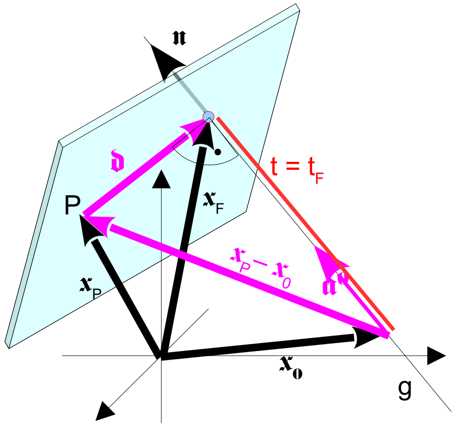
g: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$
P: $\mathbf{x}_P$ } nur $\mathbb{R}^3$

Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} &E:\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \odot \mathfrak{a} = 0 \\ &(\mathbf{x}_0 + t\,\mathfrak{a} - \mathbf{x}_P) \odot \mathfrak{a} = 0 \end{aligned}}$$

$$(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0) \odot \mathfrak{a} = t_F\, \mathfrak{a} \odot \mathfrak{a}$$

$$t_F = \frac{(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0) \odot \mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|^2}$$

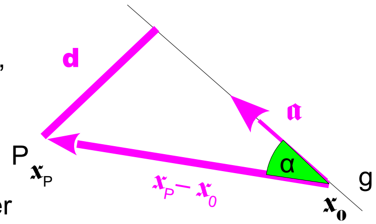


Gesucht ist ein Vektor $\mathfrak{d}$ in der Ebene $\mathscr{E}$, der senkrecht zu $\mathfrak{a}$ verläuft und durch den Punkt P geht.

Dann bestimmt man den Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene. Da diese senkrecht zur Geraden liegt, ist der gesuchte Abstandsvektor auf alle Fälle ein Richtungsvektor dieser Ebene. Der berechnete Durchstoßpunkt ist der gesuchte Lotfußpunkt.

> Bei Abstandsberechnungen von Geraden ist der Abstand nur über den Lotfußpunkt zu bestimmen. Damit muss ein Parameterwert t_F bestimmt werden. Alle drei Varianten bestimmen den Wert t_F und die Herleitung aller Formeln führt zu dem gleichen Ausdruck für t_F.

4. Variante



Grundsätzlich kann man auch davon ausgehen, dass eine Gerade und ein Punkt in einer Ebene liegen. (Konstruktionsmöglichkeit für eine Ebenengleichung). Deshalb soll die Problematik in dieser Ebene betrachtet werden. Der Winkel läßt sich aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren a und $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0$ berechnen. Der Betrag von $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0$ ist bekannt. Dann kann man den Abstand d (kein Vektor, nur Maßzahl) über die elementare Trigonometrie berechnen:

$$d = |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0| \sin\alpha$$

Dazu muss man noch nicht einmal den Winkel α berechnen, da nach dem Pythagoras der Trigonometrie gilt: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$d = |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0| \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0) \odot \mathfrak{a}}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0|\ |a|}\right)^2}$$

Beispiel:

P (2| –3|5)

$$g:\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Variante

Ebene, bei der der Richtungsvektor von g der Normalenvektor von E ist. Dabei ist die Verschiebung der Ebene unbekannt, deshalb ist das c zu bestimmen. In der Ebene muss aber unbedingt der Punkt P liegen also muss dieser die Ebenengleichung erfüllen:

$$E:\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c \qquad E:\ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$$

was zur Ebenengleichung $E:\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$ führt.

Einsetzen der Geradengleichung in die (Koordinatenform der) Ebenengleichung

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -4 \\ 2(4+2t) + (3+t) - (3-t) &= -4 \\ t &= -2 \end{aligned} \qquad \mathbf{x}_F = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die unterschiedlichen Werte für t resultieren daraus, dass einmal auf den Einheitsvektor Bezug genommen wird und einem auf den Origi- nalen Richtungsvektor. Der zuerst berechnete Wert dividiert durch die

Länge des Richtungsvektors ergibt: $\dfrac{-12}{\sqrt{6}}\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} = -2$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

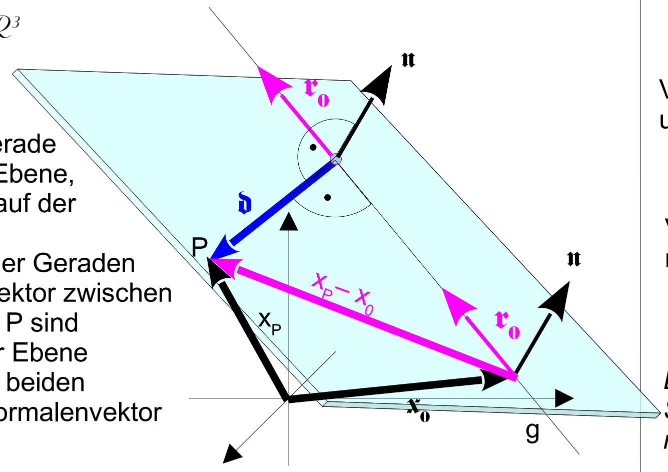
Lagebeziehungen Geraden

Gesetze und Regeln

5. Variante

Berechnung des Abstandes ohne Lotfußpunkt, dafür intensiv mit Vektorprodukt.

g: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$
P: $\mathfrak{x}_P$
} nur $\mathcal{R}^3$



- Ein Punkt und eine Gerade liegen immer in einer Ebene, wenn der Punkt nicht auf der Geraden liegt.
- Der Richtungsvektor der Geraden und der Verbindungsvektor zwischen Stützvektor und Punkt P sind Richtungsvektoren der Ebene
- das Vektorprodukt der beiden Vektoren liefert den Normalenvektor der Ebene

$$(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{r} = \mathfrak{n}$$

- das Vektorprodukt vom Normalenvektor mit dem Richtungsvektor der Geraden liefert einen Vektor $\mathfrak{d}$, der in der Ebene von g und P liegt (da senkrecht zu $\mathfrak{n}$) und der senkrecht zum Richtungsvektor $\mathfrak{r}$ ist.

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{r} = \mathfrak{d}$$

- das Skalarprodukt von $\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0$ auf den Einheitsvektor von d liefert den Abstand von P zur Geraden g

$$(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \circ \mathfrak{d}^0 = A$$

Musterbeispiele

5. Variante

P (2| –3|5) g: $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor zwischen Stützvektor und Punkt P : $(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0)$ $\begin{pmatrix} 2-4 \\ -3-3 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt des Verbindungsvektors mit dem Richtungsvektor der Geraden: $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{r} = \mathfrak{n}$$

Der Richtungsvektor der Geraden und der Verbindungsvektor des Stützvektors mit dem Punkt P liegen in einer Ebene. Der berechnete Vektor ist der Normalenvektor dieser Ebene.

Vektorprodukt des Normalenvektors mit dem Richtungsvektor der Geraden: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{r} = \mathfrak{d}$$

1) Da dieser Vektor senkrecht zum Normalenvektor ist, liegt er in der Ebene, in der der Richtungsvektor der Geraden und der Verbindungsvektor von Stützvektor und Punkt P liegt.
2) Da der Vektor auch senkrecht zur Geraden liegt, ist es der senkrechte Abstandsvektor von der Geraden zum Punkt P.

Das Skalarprodukt des Verbindungsvektors mit diesem Einheitsvektor liefert den Abstand von P zur Geraden

$$(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) \circ \mathfrak{d}^0 = A \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{10}{\sqrt{5}} = -2\sqrt{5}$$

(Vergleiche mit dem Abstand aus Variante 1.)

© Dipl.-Math.
Armin Richter

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

Lagebeziehungen Gerade – Gerade

Gegeben sind zwei Geraden im R^3

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ Parameterform

g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2$ Parameterform

1. Prüfung

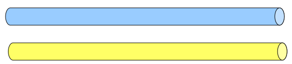
Sind die Richtungsvektoren linear abhängig:

$\mathfrak{a}_1 = k\,\mathfrak{a}_2$: $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{O}$?

$(\mathfrak{a}_1 \odot \mathfrak{a}_2) = |\mathfrak{a}_1|\ |\mathfrak{a}_2|$

Ja

Die Geraden können identisch oder parallel sein.



2. Prüfung

Sind ein Richtungsvektor und der Verbindungsvektor der beiden Festpunkte linear abhängig

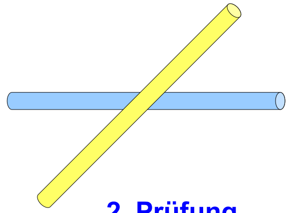
$\mathfrak{a}_1 = k\,(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)$:

$(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \times \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{O}$?

Ja	**Nein**
Die Geraden sind identisch.	Die Geraden sind parallel
$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{O}$	$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{O}$
$(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \times \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{O}$	$(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \times \mathfrak{a}_2 \neq \mathfrak{O}$

Nein

Die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.



2. Prüfung

Sind die beiden Richtungsvektoren und der Verbindungsvektor der beiden Festpunkte linear abhängig:

$\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = k\,\mathfrak{r}_1 + l\,\mathfrak{r}_2$:

$(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \odot (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) = 0$?

Ja	**Nein**
Die Geraden schneiden sich.	Die Geraden sind windschief
$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \neq \mathfrak{O}$	$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \neq \mathfrak{O}$
$(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \odot (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) = 0$	$(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \odot (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \neq 0$

im $\mathcal{R}^2$

identisch	parallel	schneiden sich	windschief
$\mathfrak{a}_1 = \lambda\,\mathfrak{a}_2$ $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = \mu\,\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1 = \lambda\,\mathfrak{a}_2$ $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 \neq \mu\,\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1 \neq \lambda\,\mathfrak{a}_2$	nicht möglich

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lagebeziehungen Geraden		

Schneidende Geraden

Schnittwinkel im R² und R³

$$\cos \measuredangle(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \frac{\mathfrak{a}_1 \odot \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1|\ |\mathfrak{a}_2|}$$

Schnittpunkt im R² (Parameterform /HNF)

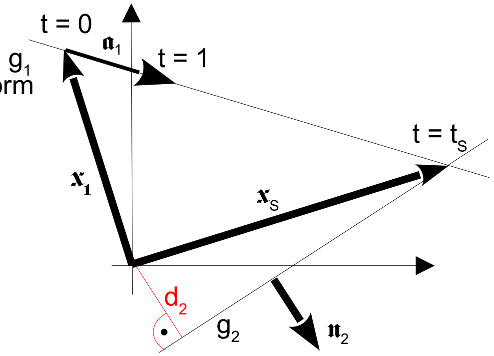
g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ Parameterform

g_2: $\mathbf{x} \odot \mathfrak{n}_2^0 = d_2$ Hessesche Normalform

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{x}_S = \mathbf{x}_1 + t_S\,\mathfrak{a}_1 \\ \mathbf{x}_S \odot \mathfrak{n}_2^0 = d_2 \end{array}}$$

$$\mathbf{x}_S \odot \mathfrak{n}_2^0 = (\mathbf{x}_1 + t_S\,\mathfrak{a}_1) \odot \mathfrak{n}_2^0 = d_2$$

$$\boxed{t_S = \frac{d_2 - \mathbf{x}_1 \odot \mathfrak{n}_2^0}{\mathfrak{a}_1 \odot \mathfrak{n}_2^0}}$$



Musterbeispiel:

Einsetzen der Parametergleichung in die Koordinatenform:

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, g_2: $y = -x + 2$

$$\begin{aligned} 0 = y + x - 2 = (-1+3t) + (2+t) - 2 &= 0 \\ 4t - 1 &= 0 \\ t &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Nach der links hergeleiteten Formel:

$$t_S = \frac{2 - (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1)}{(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1)} = \tfrac{1}{4}$$

Schnittpunkt: S(2¼ | –¼)

Schnittpunkt im R² (HNF /HNF)

g_1: $\mathbf{x} \odot \mathfrak{n}_1^0 = d_1$ Hessesche Normalform

g_2: $\mathbf{x} \odot \mathfrak{n}_2^0 = d_2$ Hessesche Normalform

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\mathbf{x} \odot \mathfrak{n}_1^0 = x\, n_{11}^0 + y\, n_{12}^0 = d_1$$
$$\mathbf{x} \odot \mathfrak{n}_2^0 = x\, n_{21}^0 + y\, n_{22}^0 = d_2$$

Wenn die Geraden nicht parallel sind, gibt es eine Lösung.

Musterbeispiel:

g_1: $-3x + 2y = -5$ g_2: $x + 4y - 17 = 0$

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= -5 \\ x + 4y &= 17 \end{aligned}$$

Schnittpunkt: S($^{27}/_7$ | $^{23}/_7$)

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

Schnittpunkt im R² / R³ (Parameterform /Parameterform)

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ Parameterform

g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + u\,\mathfrak{a}_2$ Parameterform

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}_S &= \mathbf{x}_1 + t_S\,\mathfrak{a}_1 \\ \mathbf{x}_S &= \mathbf{x}_2 + u_S\,\mathfrak{a}_2 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x}_2 + u_S\,\mathfrak{a}_2 = \mathbf{x}_1 + t_S\,\mathfrak{a}_1}$$

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: zwei Gleichung mit zwei Unbekannten

Musterbeispiele

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7 - 7s &= 18 + 3t \\ 1 + s &= 9 - 10t \\ 8 - 3s &= 11 + 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -7s - 3t &= 11 \\ s + 10t &= 8 \\ -3s - 3t &= 3 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besitzt eine Lösung: $t = 1;\ s = -2$

Durch Einsetzen der ermittelten Parameter erhält man den Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

Parallele Geraden

Abstand

im $\mathbb{R}^2$

g_1: $\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_1^0 = d_1$ Hessesche Normalform
g_2: $\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_2^0 = d_2$ Hessesche Normalform

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir:
Für parallele Geraden können wir annehmen:
=> die Normalenvektoren
sind gleich $\mathfrak{n}_1^0 = \mathfrak{n}_2^0$

$\mathfrak{d} = ((\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \odot \mathfrak{n}_1^0)\, \mathfrak{n}_1^0$
$= (d_1 - d_2)\, \mathfrak{n}_1^0$

im $\mathbb{R}^3$

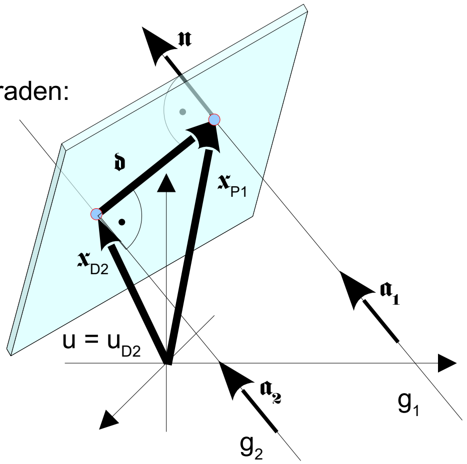
1. Variante

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\, \mathfrak{a}_1$ Parameterform
g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + u\, \mathfrak{a}_2$ Parameterform

Senkrechte Ebene zu den beiden Geraden:

E: $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{a}_1 = d$
Hessescher Normalform

Einsetzen der Geradengleichung 2 in die Ebenengleichung zur Bestimmung des Durchstoß-punktes. Für Geradengleichung 1 ist Stützvektor gleich Durchstoß-punkt, da mit diesem die Ebenengleichung erzeugt wurde.



$(\mathfrak{x}_2 + u_{D2}\, \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{a}_1 = d \quad \Rightarrow u_{D2} = \dfrac{d - (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_1 \odot \mathfrak{a}_2}$

Musterbeispiele

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$

Durchstoßpunkt für g_1:
$(-2 + 3s - 4)\, 3 + (-3 + 2s + 2)\, 2 + (-2 + 2s - 5)\, 2 = 0$
$-34 + 17s = 0$
$s = 2 \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt für g_2:
$(4 + 3t - 4)\, 3 + (-2 + 2t - +2)\, 2 + (5 + 2t - 5)\, 2 = 0$
$t = 0$

(Da die Ebenengleichung mit dem Stützvektor von g_2 erstellt wurde, ist dieser Stützvektor auch gleichzeitig Durchstoßpunkt von g_2 durch die Ebene.)

Der Differenzvektor der beiden Durchstoßpunkte gibt den Abstandsvektor. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Der Abstand ist der Betrag dieses Vektors: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

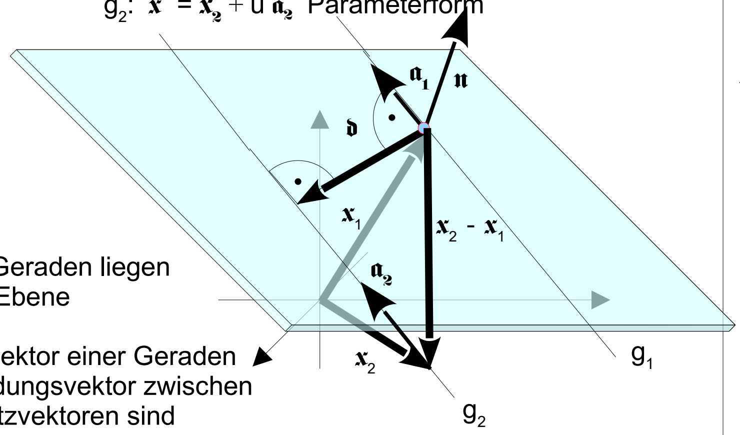
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

2. Variante im R^3

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ Parameterform

g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + u\,\mathfrak{a}_2$ Parameterform



- Zwei parallele Geraden liegen immer in einer Ebene
- Der Richtungsvektor einer Geraden und der Verbindungsvektor zwischen den beiden Stützvektoren sind Richtungsvektoren der Ebene
- das Vektorprodukt der beiden Vektoren liefert den Normalenvektor der Ebene

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{n}$$

- das Vektorprodukt vom Normalenvektor mit dem Richtungsvektor der Geraden ($\mathfrak{a}_1$) liefert einen Vektor $\mathfrak{d}$, der in der Ebene liegt (da senkrecht zu $\mathfrak{n}$) und der senkrecht zum Richtungsvektor $\mathfrak{a}_1$ ist.

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}$$

- das Skalarprodukt von $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0$ auf den Einheitsvektor von $\mathfrak{d}$ liefert den Abstand von g_2 zur Geraden g_1.

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \circ \mathfrak{d}^0$$

Musterbeispiele

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor der beiden Stützvektoren: $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene, in der die beiden Geraden liegen: $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{n}$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Senkrechter Abstandsektor zwischen den beiden Geraden: $\mathfrak{n} \times \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Projektion des Verbindungsvektors auf den Einheitsvektor des Abstandsvektors:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$$

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \circ \mathfrak{d}^0$$

(Vergleiche Berechnung des Abstandes auf der vorhergehenden Seite.)

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

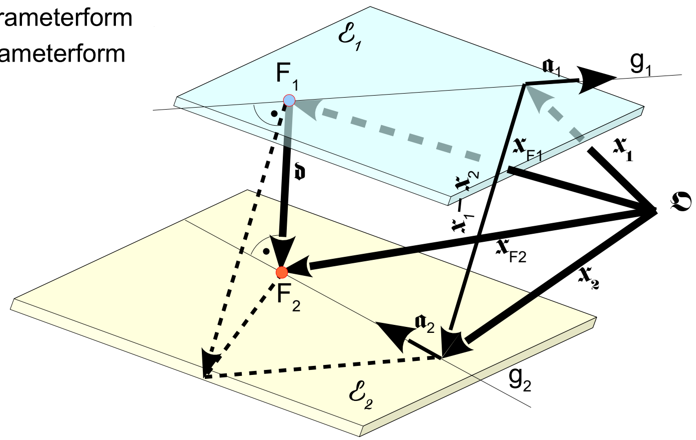
Lagebeziehungen Geraden

Windschiefe Geraden im R^3

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ Parameterform

g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2$ Parameterform

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x}_{F1} = \mathfrak{x}_1 + t_{F1}\,\mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{x}_{F2} = \mathfrak{x}_2 + t_{F2}\,\mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{x}_{F2} = \mathfrak{x}_{F1} + \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_2 = 0 \\ E_1 \parallel E_2 \end{array}}$$



Abstand und Lotvektor

1. Variante

$\mathfrak{d} - s_F\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + t_F\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{O} \quad |\odot(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)$

$\mathfrak{d}\odot(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2) = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)\odot(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)$

$= \mathfrak{x}_1\odot(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2) - \mathfrak{x}_2\odot(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)$

$= \mathfrak{a}_2\odot(\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_1\odot(\mathfrak{x}_2\times\mathfrak{a}_2)$

$|\mathfrak{d}||\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2| = |\mathfrak{a}_2\odot(\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_1\odot(\mathfrak{x}_2\times\mathfrak{a}_2)|$

(Die Richtung von $\mathfrak{d}$ ist $\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2$)

2. Variante

$\mathfrak{d} \odot \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d} \odot \mathfrak{a}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{d} \parallel \mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2$

$\mathfrak{d} = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \odot (\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)^0$

$(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)^0 = \mathfrak{n}^0$

$\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2$ ist der Normalenvektor einer Ebene, in der g_1 oder g_2 liegt, da zwei windschiefe Geraden in zwei parallele Ebenen gelegt werden können.

$\mathfrak{d} = ((\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)\odot(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)^0)\,(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)^0$

$\mathfrak{d} = \frac{1}{|\mathfrak{n}|^2}\,((\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \odot \mathfrak{n})\,\mathfrak{n}$

$|\,\mathfrak{d}\,|$ ist der Abstand der beiden Geraden.

Musterbeispiele

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$

Prüfung, ob die Geraden windschief sind, sind nicht nur über die Frage nach dem Schnittpunkt, sondern auch über die lineare Abhängigkeit des Verbindungsvektors der beiden Aufpunkte mit den beiden Richtungsvektoren der beiden Geraden:

$$k\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} + m\left(\begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} k + 2l + 13m &= 0 \\ 2k - 3l + 7m &= 0 \\ -3k + m &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat nur die Nulllösung, damit linear unabhängig und damit windschief !

Beispiel nach Variante 2, da für Variante 1 intensiv mit dem Vektorprodukt gearbeitet werden muss. Für (a_1 x a_2) kann man den Vektor n setzen.

Teil 1: Bestimme die Ebenengleichungen

Aufpunkt einer Ebene und die Richtungsvektoren beider Geraden: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene, $n = \begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix}$

Normalform oder Koordinatenform: $E_1: \begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\right) = 0$

Teil 2: Bestimme den Abstand

$$\frac{1}{\sqrt{9^2+6^2+7^2}}\begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\right) = d$$

$$\frac{1}{\sqrt{9^2+6^2+7^2}}\begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9^2+6^2+7^2}}(117+42+7)$$

$$= \frac{166}{\sqrt{166}} \approx 12{,}88$$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

Windschiefe Geraden im R^3

Berechnung der Fußpunkte

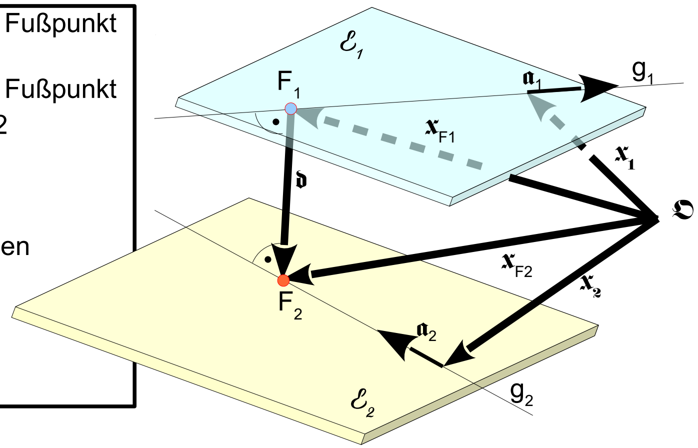
(Berechnung der Fußpunkte windschiefer Geraden ist das schlimmste, was die Vektorrechnung zu bieten hat, deshalb macht man das nur, wenn es notwendig ist, und nicht bei der Berechnung des Abstandes.)

$\boldsymbol{x}_{F1}$ Ortsvektor zum Fußpunkt der Geraden g1
$\boldsymbol{x}_{F2}$ Ortsvektor zum Fußpunkt der Geraden G2

$\boldsymbol{x}_{F2} = \boldsymbol{x}_{F1} + \mathfrak{d}$

$\mathfrak{d}$ senkrecht zu beiden Richtungsvektoren
$\mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_2 = 0$

$E_1 \parallel E_2$



Für diese Berechnung muss $\mathfrak{d}$ von $\boldsymbol{x}_{F1}$ nach $\boldsymbol{x}_{F2}$ gerichtet sein, was gleichbedeutend ist mit $\boldsymbol{x}_{F2} = \boldsymbol{x}_{F1} + \mathfrak{d}$. Die Fußpunkte müssen auf alle Fälle ihre jeweilige Geradengleichung erfüllen:

$$\boldsymbol{x}_{F2} = \boldsymbol{x}_2 + t_{F2}\mathfrak{a}_2 = \boldsymbol{x}_1 + s_{F1}\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{d} = \boldsymbol{x}_{F1} + \mathfrak{d} \qquad |\odot\mathfrak{b}_1 := \boldsymbol{x}_1 \times \mathfrak{a}_1$$

$$\boldsymbol{x}_2\odot\mathfrak{b}_1 + t_{F2}\mathfrak{a}_2\odot\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d}\odot\mathfrak{b}_1 \qquad \text{da } \boldsymbol{x}_1 \perp \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{a}_1 \perp \mathfrak{b}_1$$

$$\Rightarrow t_{F2} = \frac{(\mathfrak{d} - \boldsymbol{x}_2)\odot\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_2\odot\mathfrak{b}_1} \qquad \Rightarrow s_{F1} = \frac{(\mathfrak{d} + \boldsymbol{x}_1)\odot\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_1\odot\mathfrak{b}_2}$$

Die Bestimmung der Fußpunkte in denen der kürzeste Abstand erreicht wird ist etwas aufwendig. Da in der Schulausbildung die notwendigen mathematische Voraussetzungen fehlen (Vektorprodukt) wird es sehr selten behandelt und dann über einen aufwendigen Weg.

Dazu soll wieder die obere Zeichnung betrachtet werden. Für die Fußpunkte F_1 und F_2 gelten folgende Bedingungen, aus denen die notwendigen Gleichungen generiert werden:
(1) F_1 ist ein Punkt auf der Geraden g_1
(2) F_2 ist ein Punkt auf der Geraden g_2
(3) $F_2 - F_1$ ist senkrecht zu beiden Richtungsvektoren der Geraden.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Die gleichen Geraden, wie im vorhergehenden Abschnitt)

Für beide Gleichungen benötigt man den Differenzvektor der beiden Geradengleichungen

$$F_2 - F_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor von g_1:

$$(13 + 2s - t)\ 1 + (7 - 3s - 2t)\ 2 + (1 + 0s + 3t)\ (-3) = 0$$

Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor von g_2:

$$(13 + 2s - t)\ 2 + (7 - 3s - 2t)\ (-3) + (1 + 0s + 3t)\ 0 = 0$$

Führt zu dem Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} 24 - 4s - 14t &= 0 \\ 5 + 13s + 4t &= 0 \end{aligned}$$

oder umgestellt:
$$\begin{aligned} 24 &= 4s + 14t \\ 5 &= -13s - 4t \end{aligned}$$

liefert die Lösung: $s = -1$; $t = 2$

Das führt zu den Fußpunkten
$$g_1 : \vec{x}_{F1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x}_{F2} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und zu einem Abstandsvektor $F_2 - F_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

und zu einer Entfernung $d = \sqrt{9^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{166} \approx 12{,}88$

(Punkte lassen sich in der Vektorrechnung nur über Parameterdarstellungen und Gleichungssystemen bestimmen. Punkte sind Ortsvektoren; Skalarprodukte und Vektorprodukt liefern nur relative Abstände oder verschiebbare Vektoren.)

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Geraden

Spiegeln eines Punktes an einer Geraden im R^3

Das Spiegeln eine Punktes im R^2 läuft wie das Spiegeln eines Punktes an einer Ebene im R^3, da die senkrechte Richtung feststeht.

Soll ein Punkt an einer Geraden gespiegelt werden, benötigt man unbedingt den Fußpunkt des senkrechten Abstandes vom Punkt P zur Geraden, den Fußpunkt des Lotes auf die Gerade.
Diese Berechnung wurde bereits beim Abstand eines Punktes von einer Geraden gezeigt.
Jetzt berechnet man den Richtungsvektor vom Punkt P zum Fußpunkt (auf die richtige Richtung achten!) dieser Vektor wird verdoppelt und zum Punkt P addiert. Dadurch erhält man den gespiegelten Punkt P'.

$$P + PX_F = A + t_F\, u$$

unter der Bedingung, dass $PX_F \circ u = 0$

Wie bei der Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden im R^3 ist hier mehr Aufwand zu treiben, als im R^2. Das liegt daran, dass die notwendige senkrechte Richtung nicht eindeutig festgelegt ist, da zu einer Geraden eine ganze Ebene senkrecht ist. Deshalb muss hier erst der Fußpunkt bestimmt werden, damit von diesem die Verbindung zum Punkt P gebildet werden kann. dazu kann man die beiden Verfahren nutzen, die schon beim Berechnen des Lotes auf eine Gerade benutzt wurden:
1. Ebene senkrecht zur Gerade und durch P, dann Durchstoßpunkt durch die Ebene berechnen. Dieser Durchstoßpunkt ist der gesuchte Fußpunkt.
2. Projektion des Verbindungsvektors des Geradenaufpunktes auf den Richtungs**einheits**vektor der Geraden. Der berechnete Abstand ist der Abstand des Fußpunktes vom Aufpunkt der Geraden.

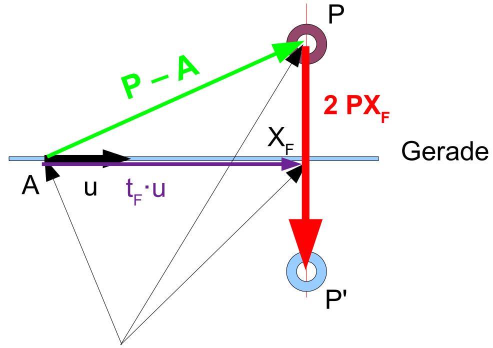
Hier soll der 2. Weg beschritten werden.
Zur Auflösung der ersten Gleichung nach t_F müssen die Vektoren dieser Gleichung das Skalarprodukt mit u gebildet werden.

$$P \circ u + PX_F \circ u = A \circ u + t_F\, |u|^2$$

was aufgelöst nach t_F liefert: $t_F = \dfrac{(P-A)\circ u}{|u|^2} = [\,(P-A)\circ u^0\,] \bullet \dfrac{1}{|u|}$

$X_F = A + t_F\, u$ *Das bei der Berechnung von t_F „noch übrige $1/|u|$“ sichert, dass hier das t_F eigentlich mit dem Einheitsvektor u^0 multipliziert wird. Was auch so sein muss, da durch die Länge von u keine zusätzliche Längenänderung entstehen darf.*

$X_F - P$ liefert den Abstandvektor.



Musterbeispiel

Der Punkt P ist an der Geraden g zu spiegeln. $P = \begin{pmatrix}7\\7\\-6\end{pmatrix}$

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\11\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

$AP = \begin{pmatrix}-1\\-4\\-14\end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{AP\circ u}{|u|} = \dfrac{-2-12-14}{\sqrt{14}} = \dfrac{-28}{\sqrt{14}}$

$$X_F = A + t_F\, u^0 = \begin{pmatrix}8\\11\\8\end{pmatrix} + \frac{-28}{\sqrt{14}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}}_{u^0} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

Hier ist auf die genaue Richtung zu achten !

Abstandsvektor $PX_F : \begin{pmatrix}-3\\-2\\12\end{pmatrix}$

$$P' = P + 2PX_F = \begin{pmatrix}7\\7\\-6\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-3\\-2\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\18\end{pmatrix}$$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Ebenen

Lagebeziehungen Ebene – Punkt

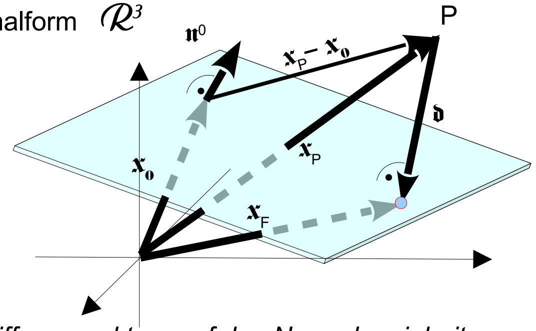
Alle Abstandsberechnungen zur Ebene gehen über die Normaleneinheitsvektor der Ebene. Der Einheitsvektor ist entscheidend, da alle Abstände auf einen Vektor mit der Länge 1 bezogen werden müssen.
Beim Berechnen von Abständen wird der Differenzvektor zweier Punkt mittels Skalarprodukt auf den Normalenvektor projiziert.
(s.dazu geometrische Deutung des Skalarproduktes)

Abstand, Lotvektor, Fußpunkt des Lotes

E: $\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = d$ Hessescher Normalform

P: P: $\mathfrak{x}_P$

Es gilt: $\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P - \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \parallel \mathfrak{n}^0 \end{array}}$



1. Variante

Abstand: $|\mathfrak{d}| = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P)_{\mathfrak{n}^0}$

$= (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P) \odot \mathfrak{n}^0$

(Abstand ist die Projektion des Differenzvektors auf den Normaleneinheits-vektor.)

Abstandsvektor: $\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|\, \mathfrak{n}^0$

$= ((\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P) \odot \mathfrak{n}^0)\, \mathfrak{n}^0$

$= (d - \mathfrak{x}_P \odot \mathfrak{n}^0)\, \mathfrak{n}^0$

(Abstandsvektor ist die Verlängerung des Normaleneinheitsvektors auf die Länge des Abstandes.)

Fußpunkt: $\mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P \pm \mathfrak{d}$

Dabei ist auf die Orientierung von n zu achten, sonst liegt der Fußpunkt nicht auf der Ebene. Wenn bei der Abstandsberechnung der orientierte Abstand benutzt wird, vereinfacht sich die Rechnung.

2. Variante *(Schulvariante)*

Geradengleichung durch P mit dem Normalenvektor n als Richtungsvektor der Geraden. g: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_P + t\, \mathfrak{n}$

E: $\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = d$

Durchstoßpunkt durch die Ebene bestimmen liefert den Fußpunkt.
Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen.

E: $(\mathfrak{x}_P + t\, \mathfrak{n}) \odot \mathfrak{n} = d$

Auflösen nach t liefert den Parameter für den Durchstoßpunkt.

Musterbeispiele

P (1|6|2)

E: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$ Hessescher Normalform

Das Skalarprodukt ist eine Projektion des Vektors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ auf den Normalenvektor. Diese Projektion hat für alle Ortsvektoren, die in der Ebene liegen den gleichen Wert, dafür ist es ja die Ebenengleichung, die ein Merkmal für alle Punkte der Ebene ist.
Für Punkte außerhalb der Ebene entstehen andere Werte. Bringt man den konstanten Wert mit auf die linke Seite, erhält man für die Ebene die Gleichung

E: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 = 0$

äquivalent dazu kann man die Koordinatenform der Ebene benutzen

$x_1 - 2x_2 + 4\, x_3 = 1$

Für alle Ortsvektoren, deren Ende nicht auf der Ebene liegt wird die Gleichung auf der rechten Seite keine 0 liefern. Da der Normalenvektor senkrecht auf der Ebene steht, werden die Ortsvektoren auf den senkrechten Abstand projiziert und geben so ein Maß für den Abstand an. Hat der Normalenvektor die Länge 1, dann ist der exakte metrische Abstand bestimmt.

$$\frac{1}{\sqrt{21}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \right) = \frac{-4}{\sqrt{21}}$$

Der mit dem Vorzeichen orientierte Abstand zeigt, dass der Normalen-vektor und er Ortsvektor einen Winkel über 90^0 miteinander bilden (cos negativ), damit liegt der Punkt nicht auf der Seite, in die der Normalenvektror zeigt. Hat der Abstand zum Nullpunkt das gleiche Vorzeichen liegt der Punkt in dem Halbraum, in dem auch der Ursprung liegt.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Ebenen

Lagebeziehungen Ebene – Gerade

Schnittbedingung

$g:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$

$E:\ \boldsymbol{x} \odot \mathfrak{n} = D$

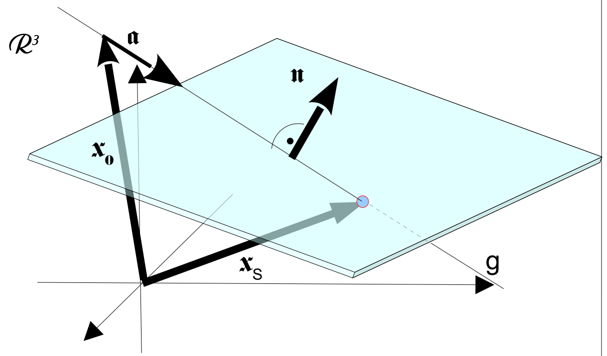
$$\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n} \begin{cases} = 0 \begin{cases} \boldsymbol{x}_0 \odot \mathfrak{n} = D & g \subset E \quad \text{Gerade liegt in der Ebene} \\ \boldsymbol{x}_0 \odot \mathfrak{n} \neq D & g \parallel E \quad \text{Gerade parallel zur Ebene} \end{cases} \\ \neq 0 & \text{g schneidet E} \end{cases}$$

Durchstoßpunkt $\quad \mathfrak{a}\odot\mathfrak{n} \neq 0$

Ebene Parameterfrei /Gerade Parameterdarstellung

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_S = \boldsymbol{x}_0 + t_S\,\mathfrak{a} \\ \boldsymbol{x}_S \odot \mathfrak{n} = D \end{array}}$$

$$\boldsymbol{x}_S \odot \mathfrak{n} = (\boldsymbol{x}_0 + t_S\,\mathfrak{a}) \odot \mathfrak{n}$$
$$= \boldsymbol{x}_0 \odot \mathfrak{n} + t_S\,\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n} = D$$
$$\Rightarrow t_S = \frac{D - \boldsymbol{x}_0\odot\mathfrak{n}}{\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}}$$



Ebene Parameterdarstellung / Gerade Parameterdarstellung

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_S = \boldsymbol{x}_1 + u_S\,\mathfrak{a} + v_S\,\mathfrak{b} \\ \boldsymbol{x}_S = \boldsymbol{x}_0 + t_S\,\mathfrak{r} \end{array}}$$

$$\boldsymbol{x}_0 + t_S\,\mathfrak{r} = \boldsymbol{x}_1 + u_S\,\mathfrak{a} + v_S\,\mathfrak{b}$$
$$t_S\,\mathfrak{r} - u_S\,\mathfrak{a} - v_S\,\mathfrak{b} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$$

Gleichungssystem 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten: t, u, v.

Schnittwinkel Ebene - Gerade

$g:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$ $\quad = 0$

$E:\ \boldsymbol{x}\odot\mathfrak{n} = D$

$$\cos\measuredangle(\mathfrak{n},\mathfrak{a}) = \frac{\mathfrak{n}\odot\mathfrak{a}}{|\mathfrak{n}|\,|\mathfrak{a}|}$$

Anschließend ist der ermittelte Winkel von 90⁰ zu subtrahieren, da bei der Ebenen mit dem Normalenvektor und nicht mit Richtungsvektoren gearbeitet wurde

Musterbeispiele

Ebenengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} + t \bullet \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + s \bullet \begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix} + r \bullet \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Ebene in Normalform:

$$E_1:\ \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right] = 0 \quad \text{oder} \quad E_1:\ \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \circ \vec{x} = -8$$

$$t_s = \frac{D - \boldsymbol{x}_0\odot\mathfrak{n}}{\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}} = \frac{-8 - (4\bullet1 + 4\bullet(-3) + 6\bullet2)}{(2\bullet1 + 1\bullet(-3) + (-1)\bullet2)} = \frac{-8-4+12-12}{2-3-2}$$

$$t_s = \frac{-12}{-3} = 4$$

Eingesetzt in die Geradengleichung führt zum Durchstoßpunkt

$$\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix} + 4 \bullet \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\8\\2\end{pmatrix}$$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Ebenen

Ebene senkrecht zu einer Geraden

g : $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$

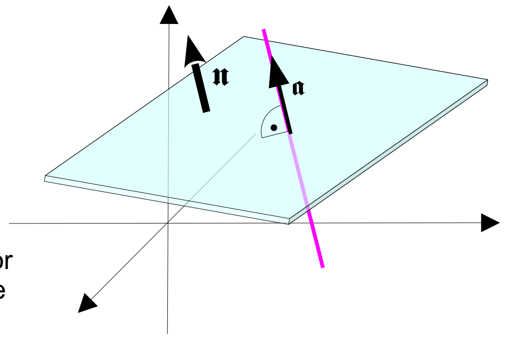
P : $\mathbf{x}_P$

Setzt man den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor der Ebene ein erzeugt man so die linke Seite der HNF der Ebene: $\mathbf{x} \odot \mathfrak{a}$

Da der vorgegebene Punkt die Ebenengleichung erfüllen soll, setzt man in die linke Seite den Ortsvektor von P ein und erhält die rechte Seite der Gleichung:

$\mathbf{x}_P \odot \mathfrak{a} = D$

E : $\mathbf{x} \odot \mathfrak{a} = D$



Geradengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix} + r \bullet \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

P (1|6|2)

Ebene senkrecht zur Geraden und durch den Punkt P:

$$E_1 : \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}\right] = 0$$

Gerade senkrecht zu einer Ebene

E : $\mathbf{x} \odot \mathfrak{n} = D$

P : $\mathbf{x}_P$

In diesem Fall ist der Normalenvektor der Ebene der Richtungsvektor der Geraden. Der vorgegebene Punkt liegt auf der geraden und man erhält die Punkt-Richtungsform der Geraden:

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_P + t\,\mathfrak{n}$

Abstand Ebene – Gerade für $\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n} = 0$

Ebene Parameterfrei /Gerade Parameterdarstellung

Das ist nur möglich, wenn Ebene und Gerade parallel verlaufen

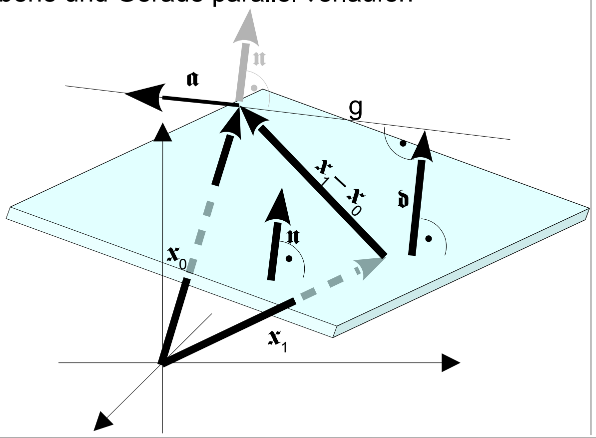
$\boxed{\begin{array}{l} g\!: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathfrak{a} \\ E\!: (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \odot \mathfrak{n}^0 = 0 \end{array}}$

$|\mathfrak{d}| = |(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1) \odot \mathfrak{n}^0|$

$= |\mathbf{x}_0 \odot \mathfrak{n}^0 - d\,|$

(Die Richtung von $\mathfrak{d}$ ist $\mathfrak{n}$)

$\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|\,\mathfrak{n}^0$



Benutze den Stützvektor der Geraden und den Normaleneinheitsvektor der Ebene

Ebene in Normalform: $E_1 : \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right] = 0$

Geradengleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix} + r \bullet \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$|d| = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right] = \frac{12}{\sqrt{14}}$$

© Dipl.-Math.
Armin Richter

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Ebenen

Lagebeziehungen Ebene – Ebene

Schnittbedingungen

Gegeben sind zwei Ebenen im R^3

E_1: $\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_1 = D_1$ Hessesche Normalform
E_2: $\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_2 = D_2$ Hessesche Normalform

1. Prüfung

Sind die Normalenvektoren linear abhängig:

$\mathfrak{n}_1 = k\,\mathfrak{n}_2$: $\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{O}$?

$(\mathfrak{n}_1 \odot \mathfrak{n}_2) = |\mathfrak{n}_1|\ |\mathfrak{n}_2|$

Ja

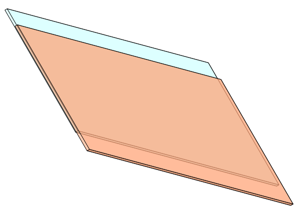
Die Ebenen können identisch oder parallel sein.

2. Prüfung

Sind die Werte D1 und D2 bezogen auf den Normaleneinheitsvektor gleich oder unterscheiden sie sich ?

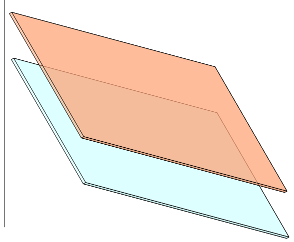
Ja

$D_1 = D_2$
$E_1 \equiv E_2$
Ebene identisch



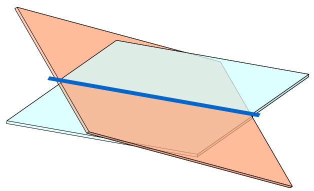
Nein

$D_1 \neq D_2$
$E_1 \parallel E_2$
Ebenen parallel



Nein

Die Ebenen müssen sich schneiden



$$\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 \begin{cases} = \mathfrak{O} & \mathfrak{n}_1^0 = \mathfrak{n}_2^0 \begin{cases} D_1 = D_2 & E_1 \equiv E_2 \quad \text{Ebene identisch} \\ D_1 \neq D_2 & E_1 \parallel E_2 \quad \text{Ebene parallel} \end{cases} \\ \neq \mathfrak{O} & E_1 \text{ schneidet } E_2 \end{cases}$$

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Ebenen

Schnittwinkel zweier Ebenen

E_1: $\mathbf{x}\odot\mathfrak{n}_1 = D_1$
E_2: $\mathbf{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

$$\cos\measuredangle(\mathfrak{n}_1,\mathfrak{n}_2) = \frac{\mathfrak{n}_1^0\odot\mathfrak{n}_2^0}{|\mathfrak{n}_1^0|\,|\mathfrak{n}_2^0|}$$

Schnittgerade

Beide Ebenen in parameterfreier Darstellung

1. Variante

E_1: $\mathbf{x}\odot\mathfrak{n}_1 = D_1$
E_2: $\mathbf{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

$\mathbf{x}\odot\mathfrak{n}_1 = x\,n_{11} + y\,n_{12} + z\,n_{13} = d_1$
$\mathbf{x}\odot\mathfrak{n}_2 = x\,n_{21} + y\,n_{22} + z\,n_{23} = d_2$

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: zwei Gleichung mit drei Unbekannten – 1 wahlfreier Parameter

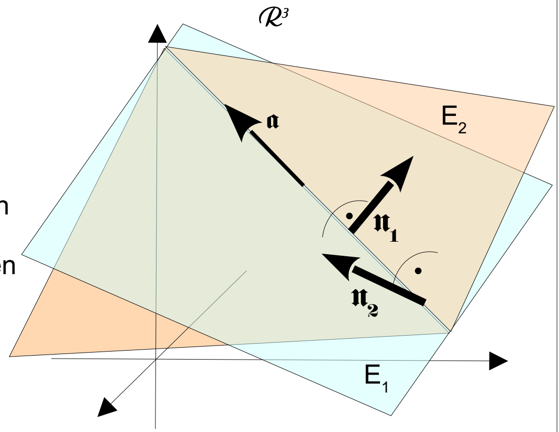
2. Variante

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ergibt sich aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren der Ebenen:

$\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2$

da der Richtungsvektor in beiden Ebenen liegen muss.
Ein Punkt aus der Schnittgeraden muss beide Ebenengleichungen erfüllen:

$\mathbf{x}\odot\mathfrak{n}_1 - D_1 = 0$
$\mathbf{x}\odot\mathfrak{n}_2 - D_2 = 0$



Musterbeispiele

1. Variante

E_1: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$
E_2: $x_1 + 4x_2 = 19$

$x_2 = t$
$x_1 = 19 - 4t$
$x_3 = -7 + t$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}19\\0\\-7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$$

2. Variante

Normalenvektoren der Ebenen:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$$

Richtungsvektor der Ebene: $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\2\\2\end{pmatrix}$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$
$x_1 + 4x_2 = 19$

Punkt auf der Schnittgeraden: $x_1 = 3$ $x_2 = 4$ $x_3 = -3$

Gleichung der Schnittgeraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor ist mit dem aus der 1. Variante identisch. Für u = – 4 kann man den Aufpunkt der Geraden aus Variante 1 erzeugen. Also sind die beiden Geraden identisch.

Mathematik – Intensivkurs: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lagebeziehungen Ebenen

Eine Ebene in Parameterdarstellung – Eine Ebene in parameterfreier Darstellung

E_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$

E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

(I) $\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x}_P = \mathfrak{x}_1 + t_P\,\mathfrak{a} + s_P\,\mathfrak{b} \\ \mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{n}_2 = D_2 \end{array}}$ $\Rightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_P + k\,\mathfrak{r}$

$\mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2 + t_P\,\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2 + s_P\,\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

1. Variante

$\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2 \neq 0$ setze $s_P=0$

$\Rightarrow t_P = \dfrac{D_2 - \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2}$

2. Variante

$\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2 \neq 0$ setze $t_P=0$

$\Rightarrow s_P = \dfrac{D_2 - \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2}$

(II) $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2 = (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2) - \mathfrak{n}_2(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{b})$

Beide Ebenen in Parameterdarstellung

$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2 + r\,\mathfrak{b}_2 \end{array}}$

$\mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2 + r\,\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{x}_1 + u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1$

$t\,\mathfrak{a}_2 + r\,\mathfrak{b}_2 - u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$

Gleichungssystem 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten: t, r, u, v.

Die Lösung führt zu einer Parameterlösung, die geometrisch eine Gerade darstellt. das ist die Schnittgerade.

Abstand paralleler Ebenen

E_1: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_1^0 = D_1$

E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2^0 = D_2$

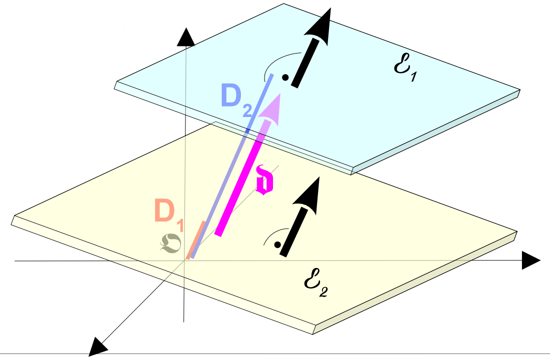
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir:

$\mathfrak{n}_1^0 = \mathfrak{n}_2^0$ (Parallele Ebenen haben identische Normaleneinheitsvektoren)

Es gilt: $\boxed{\mathfrak{n}_1^0\times\mathfrak{n}_2^0 = \mathfrak{o}}$

$|\mathfrak{d}| = |\,d_1 - d_2|$

$\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|\,\mathfrak{n}_1^0$



Musterbeispiele

Parameterform von Ebene 1

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}15\\1\\-6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\-9\end{pmatrix}$

Normalform von Ebene 2

$E_2 \quad \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = 0$

Lösung über Einsetzung und Gleichung

Parameterform von Ebene 1 einsetzen

Daraus entsteht eine Gleichung mit zwei Unbekannten.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \left(\underbrace{\begin{pmatrix}15\\1\\-6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\-9\end{pmatrix}}_{E_1} - \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = 0$$

$1\,(15 + 4t + 4s - 4) + 2\,(1 - t - s - 1) + 2(-6 - t - 9s + 1) = 0$

$1 + 0\,t - 16\,s = 0$

$s = \dfrac{1}{16}$

1. Variante

Nach dieser Variante kann nicht gearbeitet werden, weil die Bedingung $\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2 \neq 0$ nicht erfüllt ist. Beim Lösen über Gleichungssystem führt das dazu, dass die Variable sich herauslöscht.

2. Variante $t_P = 0$

$$\frac{D_2 - \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2} = \frac{4 - (15\cdot1 + 1\cdot2 + (-6)\cdot2)}{(4\cdot1 + (-1)\cdot2 + (-9)\cdot2)} = \frac{4 - 15 - 2 + 12}{4 - 2 - 18}$$

$s_P = \dfrac{-1}{-16} = \dfrac{1}{16}$ (Vergleich mit oben)

$$E_1: \vec{x}_P = \begin{pmatrix}15\\1\\-6\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{16}\begin{pmatrix}4\\-1\\-9\end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}244\\15\\-105\end{pmatrix}$$

$$E_2 \quad \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \left(\frac{1}{16}\begin{pmatrix}244\\15\\-105\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \frac{1}{16}\begin{pmatrix}180\\-1\\-89\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}(180 - 2 - 178) = 0$$

Der Punkt liegt auf beiden Ebenen.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

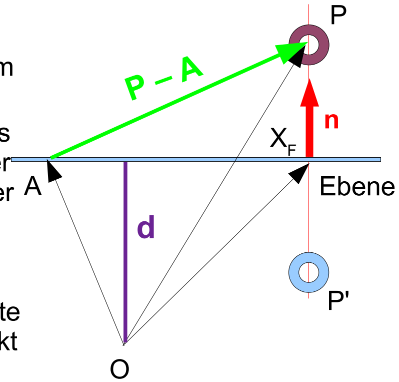
Lagebeziehungen Ebenen

Punkt an Ebene spiegeln

Soll ein Punkt an einer Ebene gespiegelt werden, hat man gegenüber der Geraden den Vorteil dass man die Richtung des senkrechten Abstandes durch den Normalenvektor kennt. Andererseits muss man aufgrund der Orientierung des Normalenvektors unterscheiden, ob der Punkt auf der selben Seite von der Ebene wie der Ursprung liegt, oder auf der anderen Seite, wie der Ursprung.
Alle Abstandsberechnungen mit Ebenen laufen über die HNF oder die Koordinatengleichung der Ebene.

Eine Unterscheidung der Formel, auf welcher Seite der Ebenen der Punkt liegt ist nicht notwendig. Beide Fälle führen zur gleichen Formel.

$d_P = (P–A) \circ n^0$



d_P ist ein Vektor, der von der Ebene weg zum Punkt P zeigt. Der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist immer kleiner als 90^0. Damit auch wirklich der Abstand von der Ebene zum Punkt genommen wird, muss der Abstand mit n^0 multipliziert werden.
Außerdem benötigt man von P aus die Richtung zur Ebene und dann den gleichen Abstand noch einmal in die entgegengesetzte Richtung. Damit erhält man den Spiegelpunkt von P durch:

$P' = P – 2\,[(P–A) \circ n^0]\, n^0$

Berücksichtigen muss man die Orientierung des Normalenvektors, denn der muss „vom Ursprung weg" zeigen. Um das zu sichern betrachtet man die Koordinatenform in der folgenden Schreibweise: $ax + by + cz = d$
Wenn in dieser Form das $d > 0$ ist, dann zeigt der Normalenvektor vom Ursprung weg. Ist $d < 0$ muss die ganze Gleichung mit -1 durchmultipliziert werden, um den notwendigen Zustand herzustellen.

Musterbeispiel

Der Punkt P ist an der Ebene E zu spiegeln.

Ebenengleichung: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$ $\quad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Normalenvektor und damit senkrechte Richtung: $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\, n \,| = 3$

Erster Lösungsweg

Um den Differenzvektor AP auf den Normalen**einheits**vektor zu projizieren müsste erst ein Punkt auf der Ebene bestimmt werden. Deshalb wird hier ein anderer Weg gewählt. Es wir der Abstand des Punktes von der Ebene bestimmt und der mit dem Nomalen**einheits**vektor multipliziert.

$d = ⅓\,(2•7 + 6 + 2•9 – 20) = 6$

Der orientierte Abstand ist positiv, der Punkt liegt auf der anderen Seite des Nullpunktes. Der Normalenvektor zeigt auf die Seite, auf der P liegt, deshalb ist der entgegengesetzte Normalenvektor zu nehmen.

$$P' = P + 2\,d\,n^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 • 6 • ⅓ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zweiter Lösungsweg

Es wird jetzt ein Punkt bestimmt, der auf der Ebene liegt und dann der Verbindungsvektor zu P auf den Normaleneinheitsvektor projiziert.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \frac{AP \circ n}{|n|} = \frac{8 – 2 + 12}{3} = 6$$

$$P' = P – 2\,\frac{[(P–A) \circ n]}{|n|}\, n^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} – 2 • 6 • ⅓ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dritter Lösungsweg

Es wird eine zur Ebene senkrechte Gerade erzeugt, die durch den Punkt P geht. Damit ist die notwendige Richtung festgelegt. Auf dieser Geraden muss auch der Spiegelpunkt P' liegen. Der Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene ist der Fußpunkt des Lotes.

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt durch die Ebene:

$$\begin{aligned} 2(7 + 2s) + (6 + s) + 2(9 + 2s) &= 20 \\ 14 + 4s + 6 + s + 18 + 4s &= 20 \\ 38 + 9s &= 20 \\ 9s &= –18 \\ s &= –2 \end{aligned}$$

$$X_F = P + t_F\, u = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} – 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hier ist auf die genaue Richtung zu achten !

Abstandsvektor PX_F : $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$P' = P + 2PX_F = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$