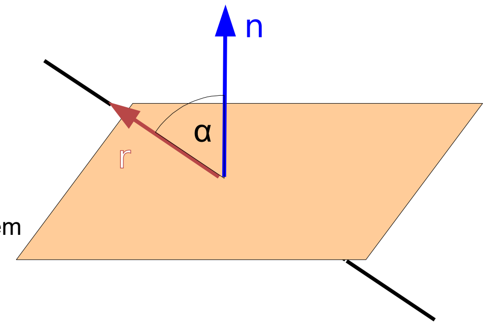
1. Das Skalarprodukt

1.1. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Ausgangspunkt dieser Untersuchungen sind fundierte Kenntnisse zur Geometrie des Skalarproduktes. In der Hauptsache sind Skalarprodukte zwischen den Normalenvektoren von Ebenen und Richtungsvektoren von Geraden zu bestimmen. Hierzu sollen die Winkel zwischen den Vektoren betrachtet werden.



$$\cos\alpha = \frac{n \circ r}{|n|\ |r|}$$

Über diese Formel wird der Winkel zwischen dem Normalenvektor und dem Richtungsvektor berechnet. Aus dem Funktionsbild des cos ist bekannt, wenn dieser wert > 0 ist, dann liegt der Winkel zwischen 0 und 90^0, wenn der Wert < 0 ist, liegt der Winkel zwischen 90 und 180^0 . Bei diesen Betrachtungen darf nicht mit dem Betrag gerechnet werden, weil dann diese Zusammenhänge verloren gehen.

1.2. Die Orientierung des Normalenvektors

In dem rechts angegebenen Beispiel ist der Winkel kleiner als 90^0 und damit das Skalarprodukt positiv. Das heißt aber auch, dass der Normalenvektor und der Richtungsvektor der Geraden auf die gleiche Seite der Ebene zeigen. Auf diese Art und Weise kann man den Normalenvektor ausrichten. Der Normalenvektor einer Ebene ist nicht eindeutig. Nur die Richtung ist eindeutig, die **Länge ist nicht eindeutig** und **die Orientierung ist nicht eindeutig**. Zeigt der Normalenvektor auf die andere Seite der Ebene, ist er anders orientiert, die Richtung ist nach wie vor die gleiche, das Skalarprodukt hat den gleichen Wert, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, der Schnittwinkel ist dann 180^0 – dem Winkel der bei dem positiven Wert sich ergibt.
Geht man davon aus, dass die Richtung der Geraden die Richtung der Lichtstrahlen ist, kann man die Ebene so orientieren, dass der Normalenvektor in den gleichen Halbraum von der Ebene zeigt, wie der Richtungsvektor oder er zeigt in den entgegengesetzten Halbraum. Um den Normalenvektor eine andere Orientierung zu geben müssen nur vor allen Komponenten die Vorzeichen geändert werden.
(Jede Ebene teilt den dreidimensionalen Raum in zwei Teile. Diese beiden Teile werden Halbräume bezeichnet.)

Jetzt bleibt die Frage, in welche Richtung zeigt der Normalenvektor, den man berechnet hat. Dazu gibt es nur eine Aussage über den Koordinatenursprung. Die allgemeine Form einer Koordinatengleichung lautet:

$$ax + by + cz = d$$

wobei die Werte a,b, c die Komponenten des Normalenvektors sind und x,y,z die Koordinaten eines Ebenenpunktes. Aussagen über die Orientierung gibt der Wert d.
Ist d eine positive Zahl zeigt der Normalenvektor in den Halbraum, in dem der Koordinatenursprung **nicht** ist.
Ist d eine negative Zahl zeigt der Normalenvektor in den Halbraum, in dem der Koordinatenursprung ist.

Der Wert von d ist ein Maß für den Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung. Dividiert man d durch den Betrag des Normalenvektors, erhält man den tatsächlichen Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung.

Für Aufgaben im Zusammenhang mit Schattenberechnungen sind deshalb Skizzen sehr nützlich um zu bestimmen, welche Richtung des Normalenvektors man benötigt.

Bei Schattenberechnungen ergibt sich auch die frage, welche Ecken und Kanten erzeugen den Schatten und welche Ecken und Kanten werfen ihren Schatten „in den Körper" und sind deshalb außen nicht als Schatten wahrzunehmen.

Wie verläuft der Schatten, wenn er wieder auf eine schräge Ebene fällt.

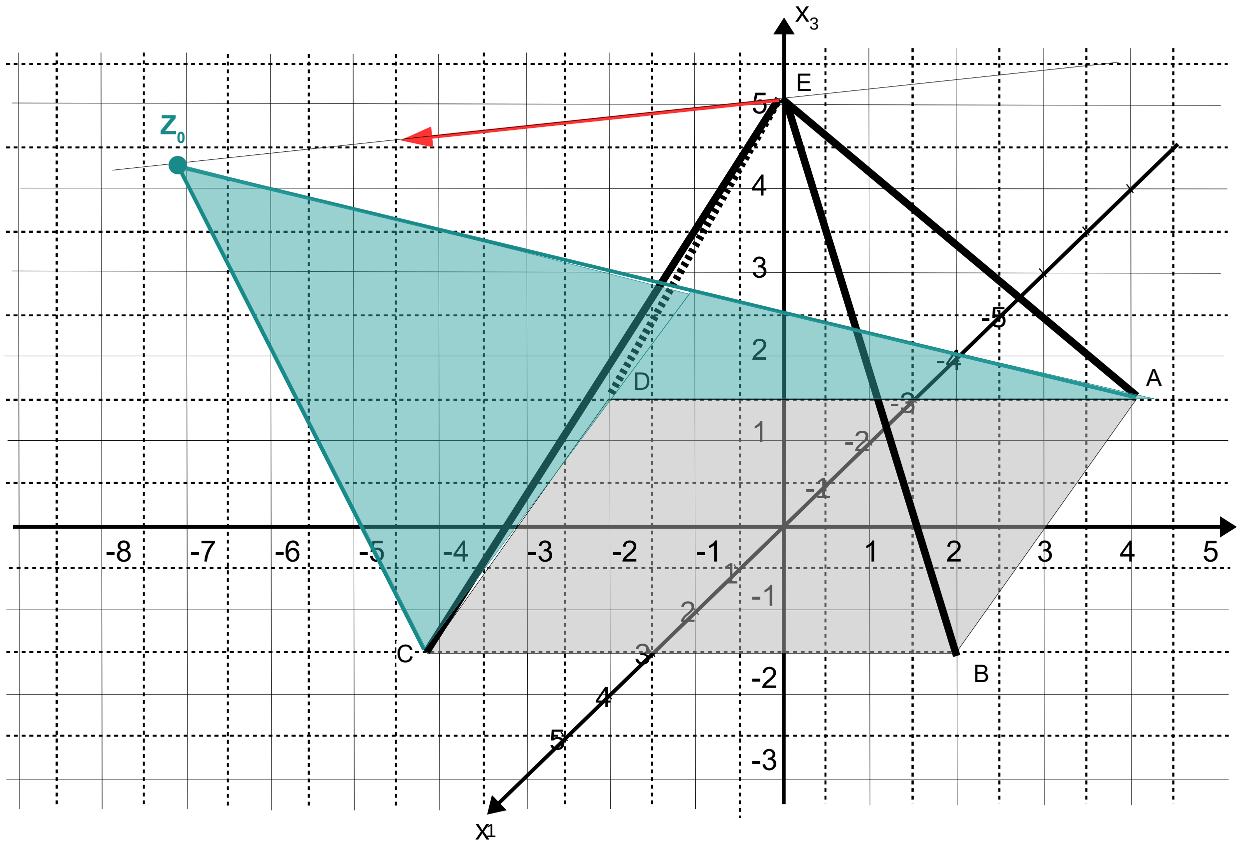
1.3. Schattenberechnung in $x_1 - x_2$ Ebene

Zunächst soll das Modell einer einzelnen Pyramide betrachtet werden. Die Ecken der Pyramide haben folgende Werte:
A (–3 | 3 | 0) , B (3 | 3 | 0) , C (3 | –3 | 0) , D (–3 | –3 | 0) , E (0 | 0 | 5)

Die Sonnenstrahlen treffen in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf die Pyramide auf.

Berechne den Schattenpunkt Z_0 der Spitze E und zeichne den Schatten so ein, wie er auf der x_1–x_2–Ebene aussehen würde.

Sonnenstrahlen sind paralleles Licht, so dass der angegebene Vektor der Richtungsvektor aller Lichtstrahlen ist. Für die Geradengleichung sind jeweils unterschiedliche Aufpunkte zu verwenden.



Für den Schattenpunkt des Punktes E ist damit folgende Geradengleichung zu benutzen: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

Der Schattenpunkt der Pyramidenspitze ist dort, wo diese Gerade die $x_1 - x_2$ Ebene schneidet, also dort, wo $x_3 = 0$ ist. Das liefert die Bedingung zur Berechnung des Schattenpunktes:

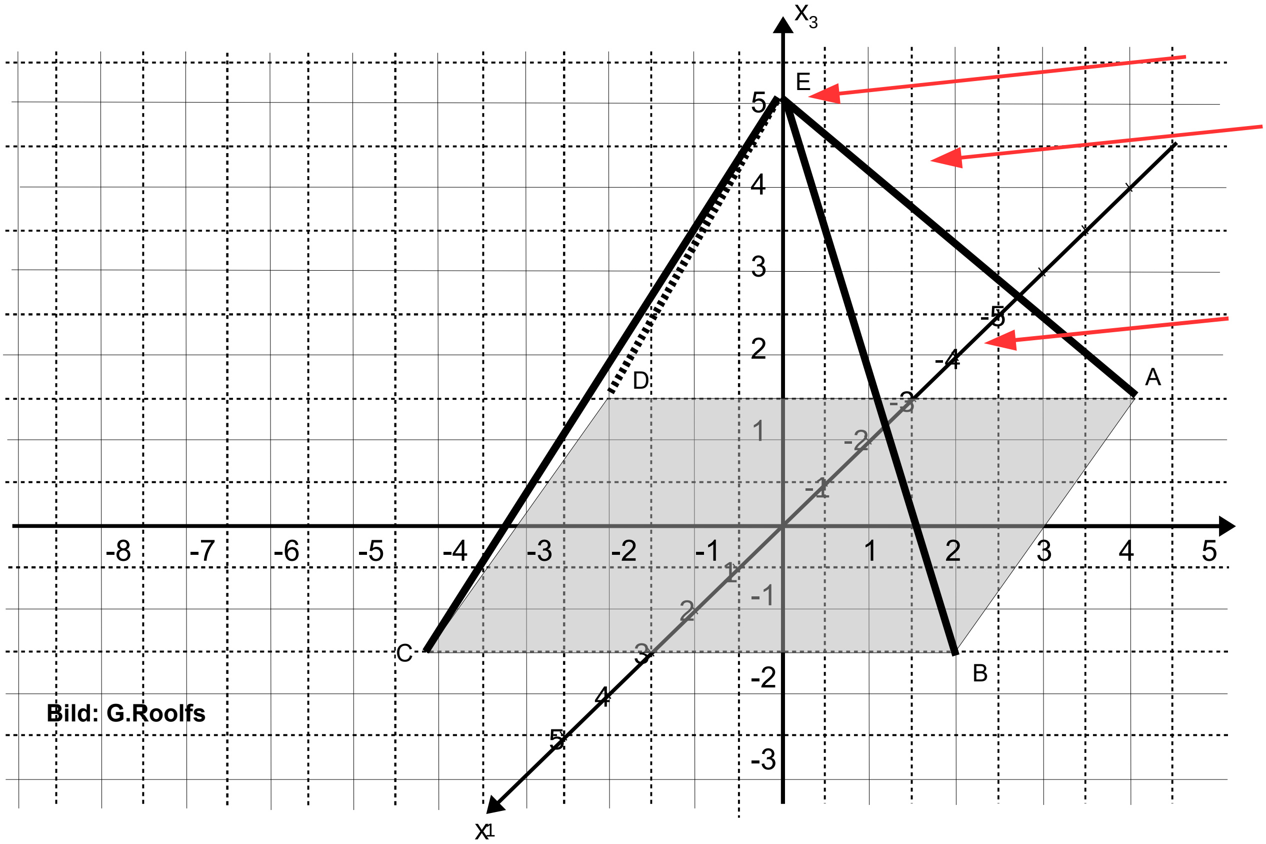
$$x_3 = 0 : \quad 5 - 7t = 0$$

Für $t = \frac{5}{7}$ wird der Durchstoßpunkt durch die x_1–x_2 Ebene erreicht. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{7} \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60/7 \\ -80/7 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -8,6 \\ -11,4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bei der Berechnung des Schattens von Pyramiden ist es ziemlich gleichgültig zu wissen, aus welcher Richtung das Licht kommt. Der Schatten wird durch den Schattenpunkt der Pyramidenspitze und zwei Eckpunkten der Pyramide gebildet.

<u>Frage: Welche Eckpunkte bilden die Ecken des Schattens</u>

1.4. Auf welche Fläche treffen die Lichtstrahlen



Auf grund der eingezeichneten Richtungspfeile treffen die Strahlen auf alle Fälle auch die Seite ABE.
Damit liegt die Seite CDE im Schatten, sie wird von keinen Strahlen erreicht.

Zu klären ist die Frage, treffen sie auf die Seite ADE oder auf die Seite CBE.
Dazu wird von beiden Seiten die Koordinatengleichung bestimmt, da der Normalenvektor benötigt wird.
Um den mühsamen Rechenweg über die Parametergleichung zu ersparen, wird aus den drei Punkten direkt die Koordinatengleichung über ein Gleichungssystem bestimmt. Für die Rechnung selbst wird der GTR zu Hilfe genommen.

A (–3 | 3 | 0) , D (–3 | –3 | 0) , E (0 | 0 | 5)

$$ax + by + cz = d$$
$$\begin{aligned} -3a + 3b &= d \\ -3a - 3b &= d \\ 5c &= d \end{aligned}$$

Die Ebene geht nicht durch den Ursprung, deshalb ist d ein von 0 verschiedener Wert. Für d kann ein beliebiger Wert vorgegeben werden. Auf Grund der 3. Zeile soll d = 5 gewählt werden. Rechnung zeigt, dass d=15 besser ist

Ebenengleichung:
$-5x + 3z = 15$ $\quad n_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

B (3 | 3 | 0) , C (3 | –3 | 0) , E (0 | 0 | 5)

$$ax + by + cz = d$$
$$\begin{aligned} 3a + 3b &= d \\ 3a - 3b &= d \\ 5c &= d \end{aligned}$$

Wird gleich mit d = 15 versucht

Ebenengleichung:
$5x + 3z = 15$ $\quad n_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Wert für d ist in beiden Ebenengleichungen positiv, also zeigen beide Normalenvektoren vom Ursprung weg, dh. in diesem Fall beide Normalenvektoren zeigen nach außen von der Pyramide.

Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren mit dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen v : $\begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

$n_1 \circ v = 60 - 21 = 39$

Skalarprodukt positiv

$n_2 \circ v = -60 - 21 = -81$

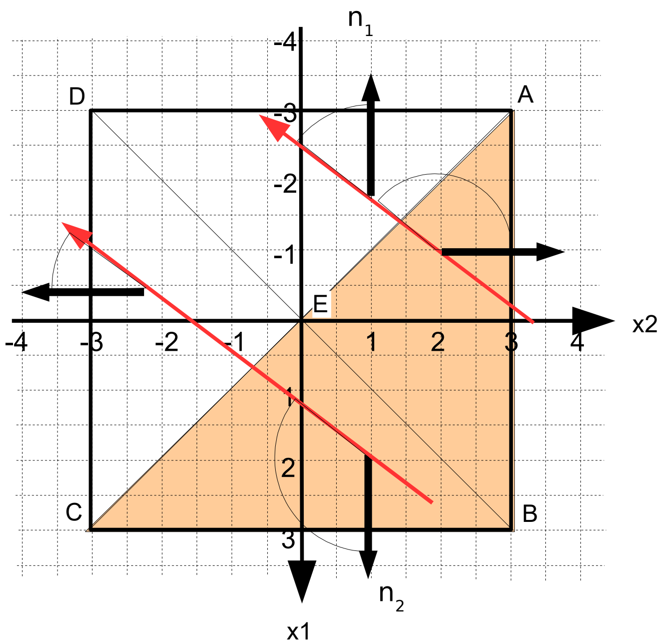
Skalarprodukt negativ

Im rechts dargestellten Bild sieht man die Draufsicht der Pyramide. Die roten Vektoren sind die Richtung aus der die Sonnenstrahlen kommen.
Die orange gekennzeichnete Fläche ist die Fläche, auf der das Licht scheint.
Die dicken schwarzen Pfeile sind die nach außen gerichteten Normalenvektoren der vier Ebenen, die die Mantelfläche der Pyramide bilden.
Dabei fällt folgendes auf:

Die Ebenen, auf die das Sonnenlicht fällt haben Normalenvektoren, die mit der Richtung des Lichtvektors einen stumpfen Winkel bilden, damit ein negatives Skalarprodukt erzeugen.

Die Ebenen, auf die das Sonnenlicht **nicht** fällt haben Normalenvektoren, die mit der Richtung des Lichtvektors einen spitzen Winkel bilden, damit ein positives Skalarprodukt erzeugen.

Dieses Kriterium kann man benutzen, wenn man feststellen will, welche Seite von dem Licht beschienen wird.

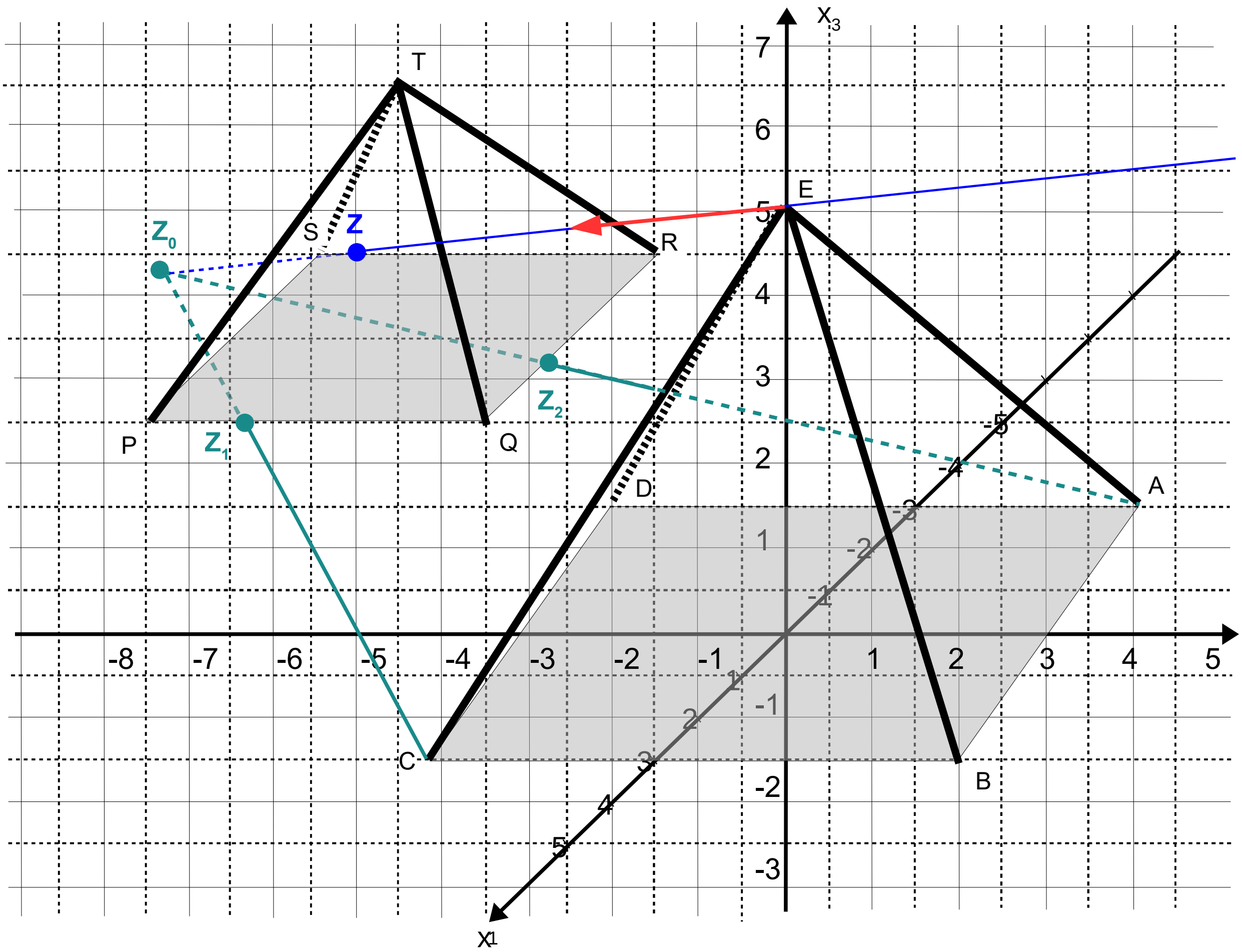


das Licht fällt auf die Pyramidenseite ABE und damit erzeugen die Kanten AE und CE die Schattenlinien.

1.5. Schatten auf nebenstehenden Körper – Fußpunkte

Neben dieser Pyramide steht noch ein zweite, auf die der Schatten fällt, und nicht mehr vollständig in die x_1-x_2 Ebene.

P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0) , S (–9 | –10 | 0) , T (-7 | -8 | 3)



Ausgangspunkt der Berechnung ist der Schattenwurf ohne die zweite Pyramide.

Der Schatten der Spitze E trifft auf die x_1–x_2 Ebene im Punkt Z_0.

Die Verbindungslinie des Eckpunktes A zum Punkt Z_0 liefert die eine Begrenzung des Schattens

Die Verbindungslinie des Eckpunktes C zum Punkt Z_0 liefert die zweite Begrenzung des Schattens.

Auf diesem Weg der Schattenlinien steht jetzt die Pyramide 2. Damit endet zunächst die Schattenlinie an der Pyramidenkante und setzt sich irgendwie auf dem Pyramidenflächen fort. Die Punkte Z_1 und Z_2 stellen die Endpunkte der Schattenlinien an den Pyramidenkanten dar.

Umgesetzt in die Sprache der Vektorrechnung ist es der Schnittpunkt der Geraden AZ_0 mit der Geraden RQ, sowie der Schnittpunkt der Geraden CZ_0 mit der Geraden PQ. Alle diese Geraden verlaufen in der $x_1 – x_2$ Ebene und haben eine x_3 Koordinate von 0.

A (–3 | 3 | 0) , C (3 | –3 | 0) , Z_0 (-8,6 | -11,4 | 0)   P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0)

$$g_{AZ0}: \quad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5{,}6 \\ -14{,}4 \end{pmatrix}$$

$$g_{RQ}: \quad x = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3 - 5{,}6\,t &= -5 - 4s \\ 3 - 14{,}4\,t &= -6 \end{aligned}$$

t=0.625 ; s=0.375

$Z_1 = (-6.5,\ -6)$

$$g_{CZ0}: \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11{,}6 \\ -8{,}4 \end{pmatrix}$$

$$g_{PQ}: \quad x = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3 - 11{,}6\,t &= -5 \\ -3 - 8{,}4\,t &= -6 - 4s \end{aligned}$$

t=0.6896 ; s= 0.6982

$Z_2 = (-5,\ -8.8)$

1.6. Schattenpunkt auf nebenstehenden Körper

Schattenpunkt der Pyramidenspitze auf der zweiten Pyramide.

Von Seiten der Vektorrechnung ist das keine Problem. Es handelt sich dabei um den Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene. Das Problem liegt bei der Ebene, die durchstoßen wird.
Liegt der Durchstoßpunkt in der Ebene PQT oder in der Ebene QRT. Diese Entscheidung ist auch aus der Zeichnung schwer zu bestimmen. Tatsache ist, die Gerade hat Schnittpunkte mit beiden Ebene, aber welcher ist der Schattenpunkt.
Weiterhin ist klar, dass der Schattenpunkt in einem der Dreieck PQT oder QRT liegen muss.
Wenn es im Dreieck QRT einen Schattenpunkt gibt, dann kann es im Dreieck PQT keinen Schatten geben, da diese Seite dann hinter QRT liegt.

Es werden für beide Ebenen Parametergleichungen erstellt und als Aufpunkt bei beiden Ebenen der Punkt T verwendet.

P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0) , T (-7 | -8 | 3)

Ebene 1: $$x = T + t\,(Q - T) + s\,(P - T) \qquad x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ebene 2: $$x = T + t\,(Q - T) + s\,(R - T) \qquad x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Gerade des Lichtstrahls $$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt Gerade – Ebene 1

$$\begin{aligned} -12\,r &= -7 + 2t + 2s \\ -16\,r &= -8 + 2t - 2s \\ 5 - 7r &= 3 - 3t - 3s \end{aligned}$$

r = ½ ; t = ¼ ; s = ¼

Schattenpunkt der Pyramidenspitze $Z \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt Gerade – Ebene 2

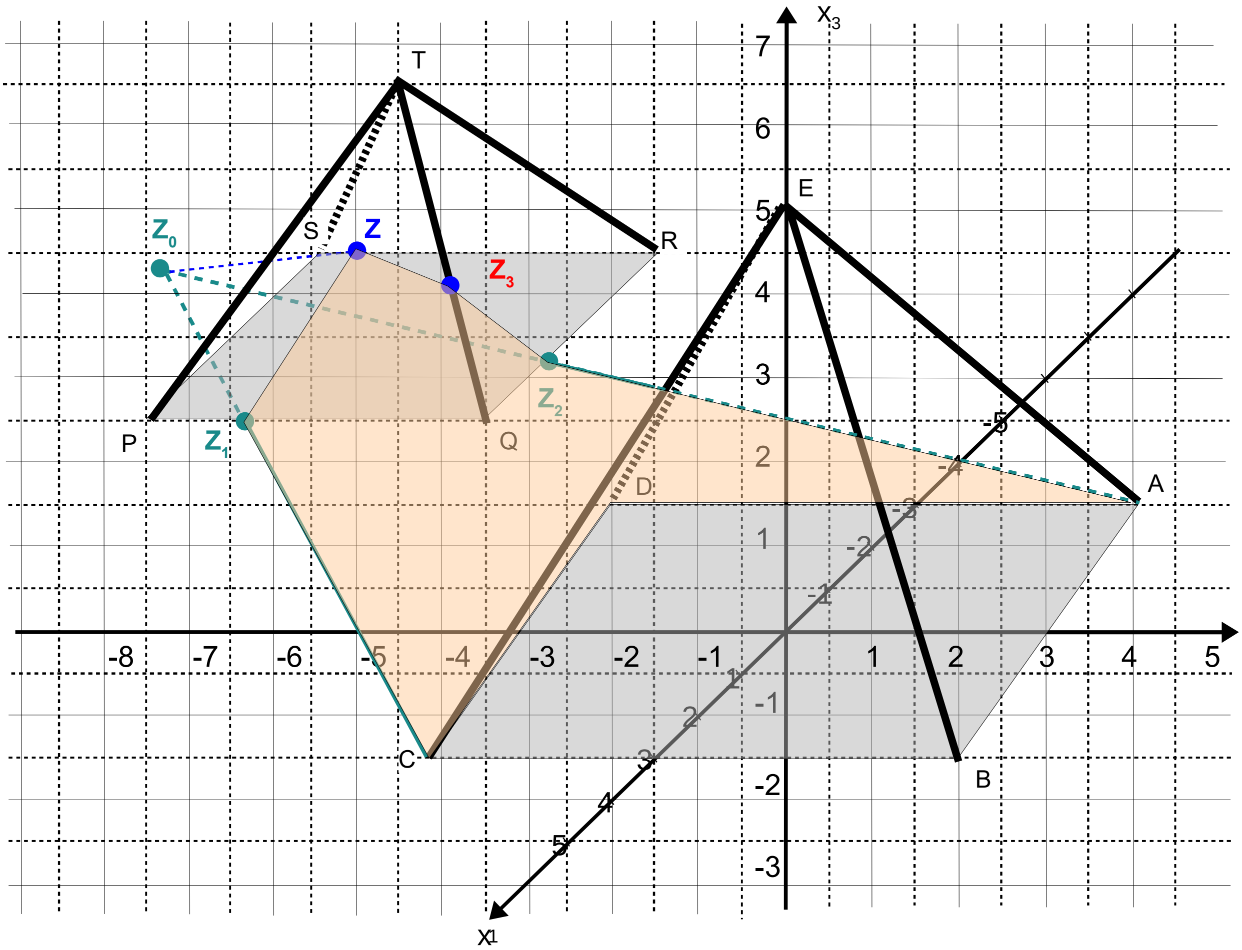
$$\begin{aligned} -12\,r &= -7 + 2t - 2s \\ -16\,r &= -8 + 2t + 2s \\ 5 - 7r &= 3 - 3t - 3s \end{aligned}$$

r = 14/31 ; s = −25/124 ; t = 73/124

Das kann nicht der gesuchte Schattenpunkt ein, da der Parameter von s negativ ist. da der Schattenpunkt in dem Dreieck QRT liegen muss, müssen die Koeffizienten der Richtungsvektoren positiv sein.

Da der Schattenpunkt der Pyramidenspitze auf der PQT Ebene liegt, kann die Schattenlinie von Z auch direkt mit Z_1 verbunden werden. Mit Z_2 geht das nicht, da dort noch die Knickkante der Pyramide dazwischen ist.
Es muss die Schattenlinie bis zu dieser Knickkante ermittelt werden, dann kann diese mit Z verbunden werden.

1.7. Schatten auf nebenstehenden Körper – Schattenlinie über Knickkante



Gesucht ist der Punkt Z_3, der die Verbindung der Schattenlinie zwischen Z und Z_2 herstellt.

Überlegung:

Die Pyramidenkante AE liefert mit der Richtung der Sonnenstrahlen eine Ebene, in der sich die Schattenlinie befindet. Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Kante QT liefert den Schnittpunkt.

Ebene der Schattenlinie: $x = A + t\,(E - A) + s\,v$ A (–3 | 3 | 0) , E (0 | 0 | 5) $v = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Gerade QT : $x = T + t\,(Q - T)$ Q (-5 | -6 | 0) , T (-7 | -8 | 3)

$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt Gerade – Ebene

$$\begin{aligned} -7 + 2r &= -3 + 3t - 12s \\ -8 + 2r &= 3 - 3t - 16s \\ 3 - 3r &= 0 + 5t - 7s \end{aligned}$$

r = 0.6037 ; s = 0.4494 ; t = 0.8670

Z_3 (−5.7926, −6.7926, 1.1889)

2. Die Berechnung komplett mit dem GTR ausführen (TI 84 PLUS)

Bei solchen komplizierten Berechnungen und damit verbundenen Ergebnissen die lange Dezimalzahlen erzeugen, möchte man die Rechnung auf dem GTR ausführen. Das ist tatsächlich möglich, aber die notwendigen Informationen werden in der Schule nicht erläutert. In diesem Abschnitt wird nicht auf die Berechnung und deren Begründung eingegangen, sondern nur auf die Umsetzung mit dem GTR.

Die Berechnung des Gleichungssystems unter 1.3 ist allgemein bekannt und wird hier nicht erläutert.

Es wird begonnen mit der Aufgabenstellung 1.4.

Eine grundlegende Voraussetzung für eine erfolgreiche Rechnung ist immer zu wissen, wo stehen welche Werte.

Die Geradengleichungen werden getrennt eingegeben. Jeder Aufpunkt und jeder Richtungsvektor wird in einer Matrix als 3 x 1 Matrix (=Spaltenvektor) gespeichert. Unter den Geradengleichungen werden die Matrix-Bezeichner angegeben unter denen sie gespeichert sind.

A (–3 | 3 | 0) , C (3 | –3 | 0) , Z_0 (-8,6 | -11,4 | 0)

P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0)

$$g_{AZ0}: \quad x = \underset{[A]}{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}} + t \underset{[B]}{\begin{pmatrix} -5,6 \\ -14,4 \end{pmatrix}}$$

$$g_{RQ}: \quad x = \underset{[C]}{\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}} + s \underset{[D]}{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$g_{CZ0}: \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11,6 \\ -8,4 \end{pmatrix}$$

$$g_{PQ}: \quad x = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$3 – 11,6\, t = – 5$

$–3 – 8,4\, t = – 6 – 4s$

t=0.6896 ; s= 0.6982

Z_2 = (−5, -8.8)

Die Berechnung des Punktes Z_2 bleibt zum selbständigen probieren.

Damit sieht das Gleichungssystem in Vektorform folgendermaßen aus:

[A] + t [B] = [C] + s [D]

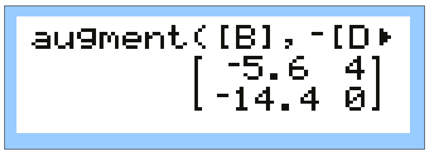
Und umgestellt aus korrektes Gleichungssystem:

t [B] – s [D] = [C] – [A]

Auf der linken Seite steht der Richtungsvektor der 2. Geraden mit einem Minus, auf der rechten Seite der Aufpunkt der 1. Geraden mit einem Minus

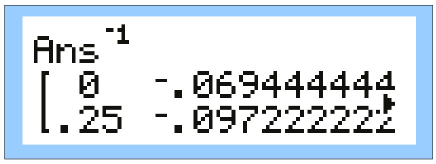
Wie bekommt man aus den Einzelvektoren das Gleichungssystem zusammen. Dazu hat der GTR die Funktion **augment(** aus dem Matrixmenü 2. Spalte Pos 7. augment verkettet Matrizen spaltenweise, es hängt die Matrizen mit gleicher Zeilenzahl einfach hintereinander. Damit entsteht das Gleichungssystem aus:

augment([B], – [D])

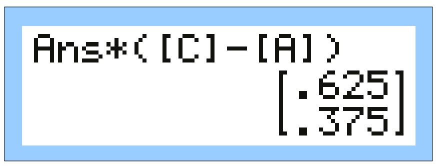


Beim Minuszeichen ist das Vorzeichenminus zu benutzen und nicht das Rechenzeichen.

An diese Matrix könnte man auch noch die rechte Seite anhängen, hier soll ein anderer Weg gewählt werden. Es ist bekannt, dass das Ergebnis eindeutig sein muss. Deshalb existiert vor die eben erzeugte Matrix eine Inverse Matrix, so etwas wie der Reziprokwert 1/[A] der auf diese Weise natürlich nicht berechnet werden kann. Für die Berechnung der Inversen Matrix wird ebenfalls die Taste X^{-1} benutzt. Der GTR erkennt selbständig, dass die Operation auf deine Matrix angewendet werden soll.



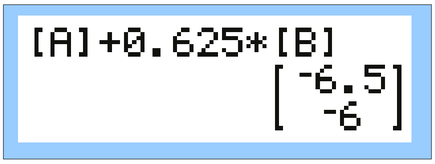
Diese Inverse Matrix wird dann mit dem Vektor **[C] – [A]** multipliziert: **Ans * ([C] – [A])**



Hier ist jetzt das Rechenzeichen Minus zu benutzen.

Das Ergebnis ist der Lösungsvektor für die Variablen t und s.

Jetzt macht sich der Vorteil der getrennten Eingabe bemerkbar. Über eine Vektorgleichung kann man mit dem ermittelten Parameter direkt den Schnittpunkt berechnen lassen.
Das sind die Koordinaten des Punktes Z1, der Fußpunkt an der zweiten Pyramide, an der der Schatten abgelenkt wird.



Aufgabenstellung 1.5.

P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0) , T (-7 | -8 | 3)

Gerade des Lichtstrahls $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

[A] **[B]**

Ebene 1: $x = T + t\,(Q - T) + s\,(P - T)$

$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

[C] **[D]** **[E]**

Schnittpunkt Gerade – Ebene 1

– 12 r = – 7 + 2t + 2s
– 16 r = – 8 + 2t – 2s
5 – 7r = 3 – 3t – 3s

r = ½ ; t = ¼ ; s = ¼

Ebene 2:

$x = T + t\,(Q - T) + s\,(R - T)$

$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

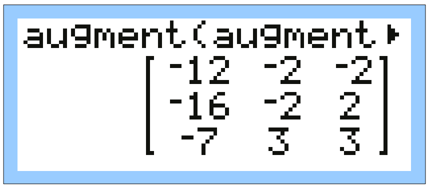
Schnittpunkt Gerade – Ebene 2

– 12 r = – 7 + 2t – 2s
– 16 r = – 8 + 2t + 2s
5 – 7r = 3 – 3t – 3s

r = 14/31 ; s = −25/124 ; t = 73/124

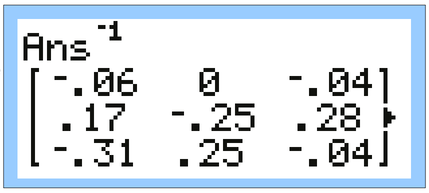
r [B] – t [D] – s [E] = [C] – [A]

Hier ist das Gleichungssystem aus drei Spalten zusammenzubauen. Der augment Befehl lässt aber nur das Verbinden von zwei Matrizen zu. Deshalb könnte man das in zwei Schritten machen. Aber der augment Befehl lässt sich auch verschachteln, so dass man einmalig folgendes eingeben kann:



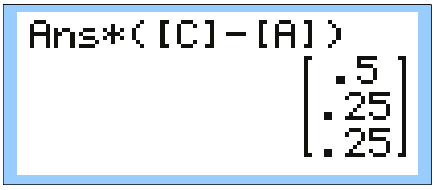
augment(augment([B], – [D]); – [E])

Man muss auf die Klammern achten und das Minuszeichen muss beide Male das Vorzeichen Minus sein.
Auch hier ist die Lösung eindeutig, so dass man wieder mit der Inversen Matrix arbeiten kann.



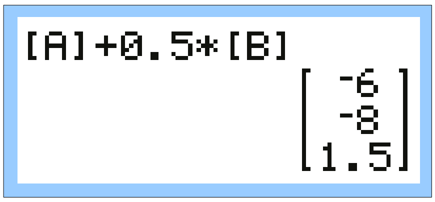
Diese Inverse Matrix wird dann mit dem Vektor **[C] – [A]** multipliziert: **Ans * ([C] – [A])**

Hier ist jetzt das Rechenzeichen Minus zu benutzen.



Der erste Wert der Lösung 0,5 ist der, der der Geraden zugeordnet ist.
Damit lässt sich über die Gerade der Durchstoßpunkt des Sonnenstrahls berechnen.

Das sind die Koordinaten den Punktes Z.
man kann auf den Wert von 5,0 auch direkt über Ans zugreifen mittels Ans[1], aber die direkte Eingabe geht wohl schneller



Aufgabenstellung 1.6.

Die Berechnung unter Punkt 1.6 ist ebenfalls die Berechnung eines Schnittpunktes von Gerade und Ebene und auf die gleiche Weise durchzuführen.

Aufgabe 2 :

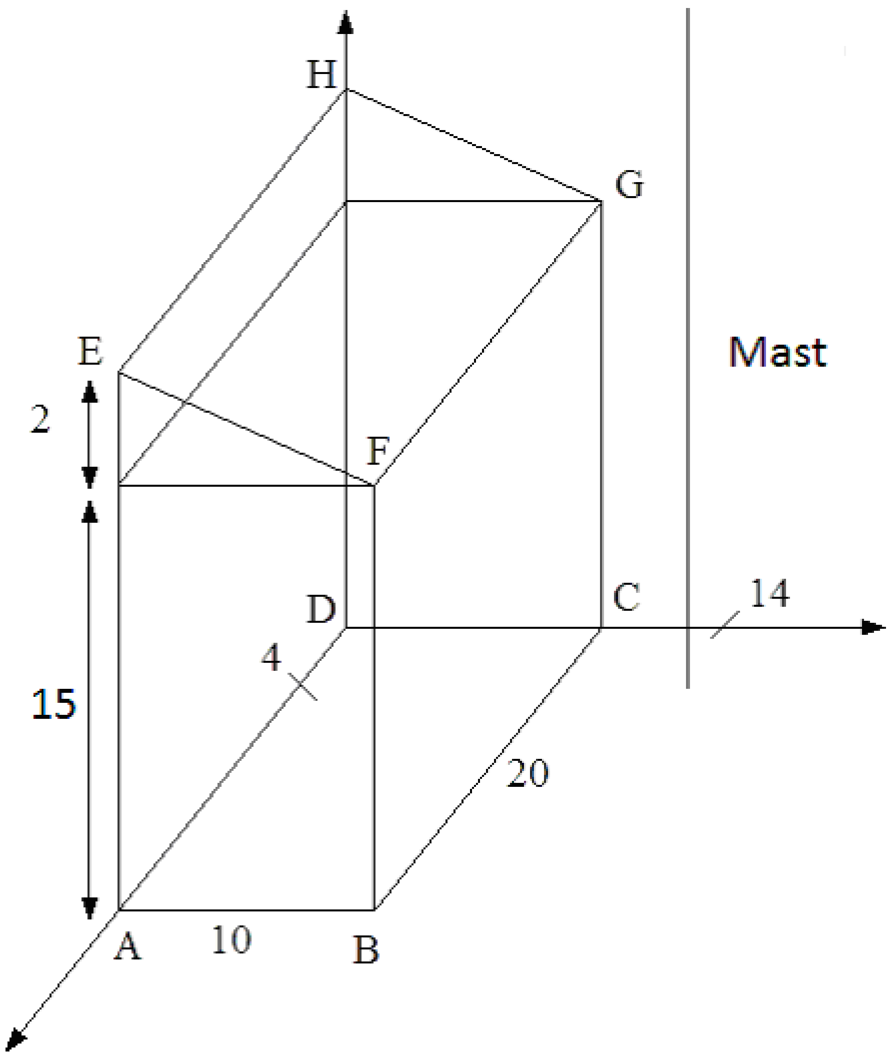
(1) Es sollen die Eckpunkte A bis H bestimmt werden.

(2) Wie lauten die Gleichungen der Ebene EFGH in Parameter- und Koordinatenform?

(3) Die Spitze des Mastes liegt in P(4/14/25). Wo liegt der Schattenpunkt P' von P auf dem Dach, wenn die Sonne in die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ scheint?

(4) Wo trifft der Schatten auf die Dachkante $\overline{FG}$.

(5) In welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf den Boden?



Lösung Aufgabe 2 :

(1) A(20|0|0)
B(20|10|0)
C(0|10|0)
D(0|0|0)
E(20|0|17)
F(20|10|15)
G(0|10|15)
H(0|0|17)

(2) E: x = H + r HE + s HG (Wenn man die Eckpunkte E, G und H verwendet.)

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung des Daches: E: $y + 5z = 85$

(3) Schatten des Punktes P auf Dach:

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung in Vektorform: $x \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 85$

Das Einsetzen der Geradengleichung kann man auch als Skalarprodukte rechnen:

$$\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 85 \qquad \begin{matrix} 139 - 6r = 85 \\ r = 9 \end{matrix} \qquad P'(\,13 \mid 5 \mid 16\,)$$

(4) Dachkante: g : $x = G + r \cdot FG$

$$g:\ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 20r &= 4 &&+ s \\ 10 &= 14 &&- s \\ 15 &= 25 + &&t - s \end{aligned}$$

$r = 0.4$; $t = -6$; $s = 4$

Der Schatten des Mastes liegt in der Ebene, in der der Mast liegt und der Richtungsvektor der Lichtstrahlen.

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fußpunkt und Richtung des Mastes. Richtungsvektor des Lichts

$$S \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

(5) Boden ist x-y-Ebene: Koordinatengleichung der Ebene E : $z = 0$

Normalenvektor dieser Ebene: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektor des Lichtstrahls: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bei der Berechnung des Schnittwinkels zwischen einer Ebene und einer Geraden verwendet man am besten den Sinus:

$$\sin(\alpha) = \frac{n_1 \circ v}{|n_1| \circ |v|} = \frac{-1}{\sqrt{3} \cdot 1} = |-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}| \quad \Rightarrow \alpha \approx 35{,}26°$$

Aufgabe 3

Abitur Baden-Württemberg Lk Mathematik 1998 II

Die Grundfläche eines Spielplatzes liegt in der x1-x2-Ebene. Auf ihm steht eine innen begehbare, senkrechte, quadratische Pyramide aus Holz mit den Eckpunkten
A (3 | 8 | 0), B (12 | 11 | 0), C (9 | 20 | 0), D (0 | 17 | 0) und der Spitze S (6 | 14 | 10).

Paralleles Sonnenlicht fällt in Richtung v = (0 | – 4 | – 3) auf den Spielplatz

a) Zeichne in einem Koordinatensystem das Schrägbild der Pyramide. (Querformat; Längeneinheit 1 cm; Verkürzungsfaktor in x1-Richtung ½ √2; Zeichenbereich $-8 \le x_2 \le 18$; $-7{,}5 \le x_3 \le 7{,}5$)
b) Berechne die Koordinaten des Punktes S0, auf den der Schatten der Pyramidenspitze fällt. Zeichne den Pyramidenschatten in das vorhandene Koordinatensystem.

Auf dem Spielplatz wird ein Hang aufgeschüttet, der in der Ebene

$$E: \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 14 = 0$$

liegt.

c) Veranschauliche die Ebene E mithilfe ihrer Spurgeraden.
d) Der Schatten S*der Pyramidenspitze fällt jetzt auf den Hang. Bestimme S*
Zeichne den neuen Pyramidenschatten ein.

Lösung Aufgabe 3 :

geg: A (3 | 8 | 0), B (12 | 11 | 0), C (9 | 20 | 0), D (0 | 17 | 0), S (6 | 14 | 10),

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad E: \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 14 = 0$$

a) Zeichnung der Pyramide auf der Folgeseite.

b) Der Schattenpunkt der Pyramidenspitze wird als Durchstoßpunkt der Geraden, die durch die Pyramidenspitze geht und den Richtungsvektor des parallelen Lichts hat, durch die $x_1 - x_2$ Ebene bestimmt.

Gerade des Lichtstrahls $\quad x = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

[A] [B]

$x_1 - x_2$ Koordinatenebene E_{12}: $x_3 = 0$

Normalenvektor der Ebene: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Durchstoßpunkt ist dort, wo die x_3 Komponente gleich 0 ist: $10 - 3r = 0$; $r = 10/3$

Schattenpunkt S' : $\quad S' = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{10}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Zeichnung des Hangs auf der Folgeseite.

d) Der Durchstoßpunkt der Geraden von der Pyramidenspitze mit der Ebene des Hangs:

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad E: \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 14 = 0$$

[A] [B] [C]

Das Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung lässt sich auch über das Skalarprodukt ausführen.
Dazu speichert man die Koeffizienten der Ebenengleichung (= Normalenvektor) als Vektor in die Matrix [C].
Die notwendige Rechnung wäre dann:

[A]○[C] + r [B]○[C] = 0

Die Skalarprodukte sollten einzeln ausgeführt werden und die Gleichung dann manuell im GTR gelöst werden, oder sogar von Hand.

Für den Parameter r ergibt sich der Wert 3 und damit für den Punkt S* $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

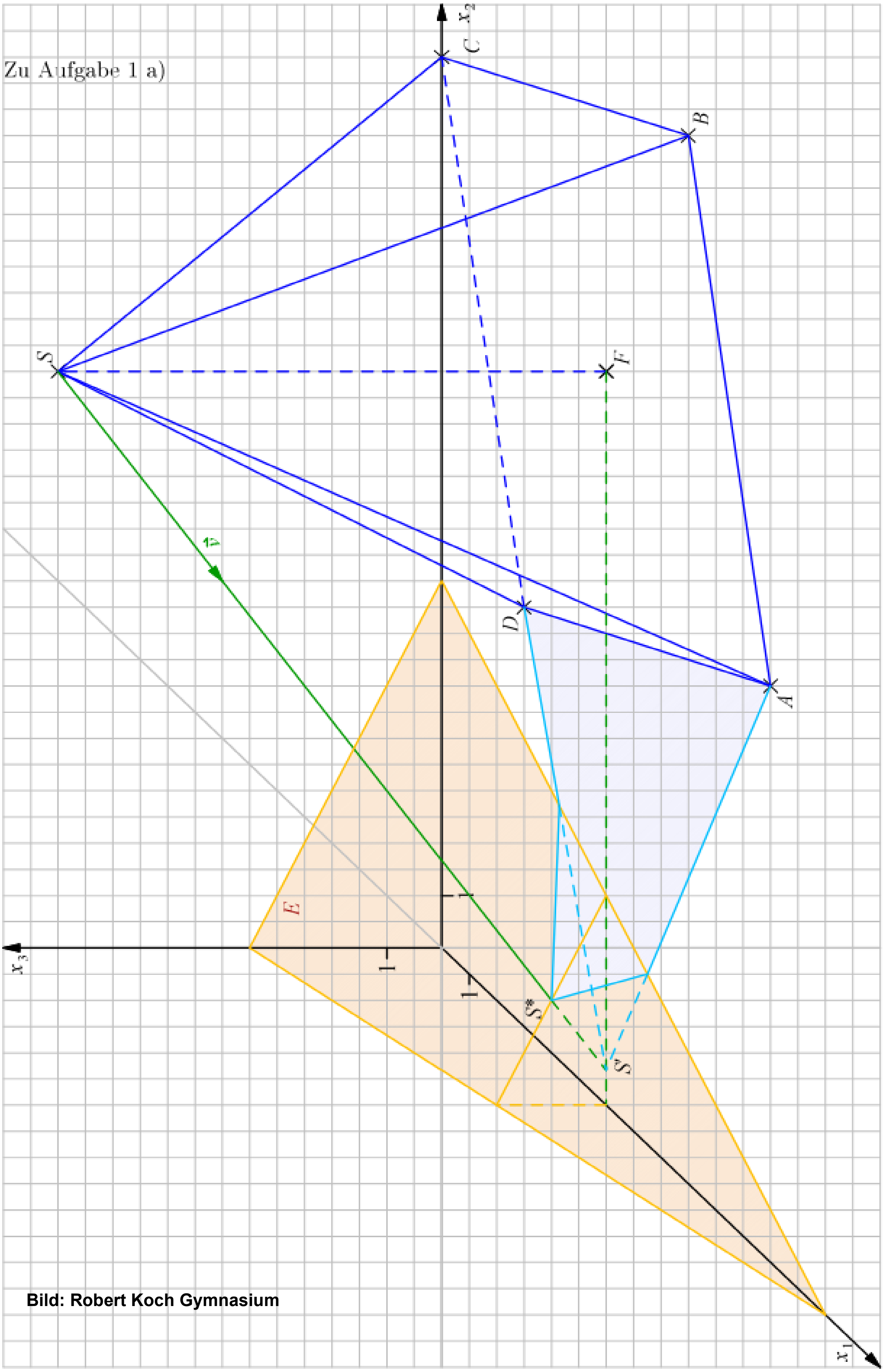


Bild: Robert Koch Gymnasium

Nicht in der Aufgabenstellung enthalten sind die Schnittpunkte der Schattenlinie mit der unteren Kante des Hanges. Hier sollen die Schnittpunkte noch einmal bestimmt werden.
Es geht um den Schnittpunkt der Geraden DS' mit der Spurgeraden des Hangs in der $x_1 - x_2$ Ebene.

1. Variante:

Gerade DS'

D (0 | 17 | 0) ; S' (6 | ⅔ | 0).

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -16\tfrac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

[A] [B]

r = ¾

Spurgerade

E_{S1} (14 | 0 | 0) ; E_{S2} (0 | 7 | 0).

$$x = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[C] [D]

s = 19/28

$$S_2 = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Variante:

Schnittpunkt der drei Ebenen:

$x_1 - x_2$ Koordinatenebene: $x_3 = 0$

Hangebene : $x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 14 = 0$

Ebene durch D und S und als zweiten Richtungsvektor die Richtung des Lichtstrahls:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$49 x_1 + 18x_2 - 24x_3 - 306 = 0$

Zur Berechnung der Koordinatengleichung für die 3. Ebene kann man folgendes Gleichungssystem benutzen:
ax + by + cz = d

$+ 17b = d$	Der 1. Vektor ist Aufpunkt und muss die Koordinatengleichung mit dem Wert d erfüllen.
$6a - 3b + 10c = 0$	Der 2. Vektor ist Richtungsvektor und muss mit n ein Skalarprodukt von 0 ergeben.
$- 4b - 3c = 0$	Der 3. Vektor ist Richtungsvektor.

Lösung des Gleichungssystems liefert die Koordinatenform.

für d = 51 : a = 49/6 b = 3 c = –4
multipliziert mit 6:
d = 306: a = 49 b = 18 c = -24

Das daraus entstehende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 14 \\ 49 x_1 + 18x_2 - 24x_3 &= 306 \end{aligned}$$

$x_1 = 4{,}5$
$x_2 = 4{,}75$
$x_3 = 0$

Schnittpunkt der drei Ebenen

Es geht um den Schnittpunkt der Geraden AS' mit der Spurgeraden des Hangs in der $x_1 - x_2$ Ebene.

Gerade AS'

A (3 | 8 | 0) ; S' (6 | ⅔ | 0).

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -7\tfrac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

[A] [B]

r = 3/7

Spurgerade

E_{S1} (14 | 0 | 0) ; E_{S2} (0 | 7 | 0).

$$x = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[C] [D]

s = 34/49

$$S_2 = \begin{pmatrix} 30/7 \\ 34/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Variante:

Schnittpunkt der drei Ebenen:

$x_1 - x_2$ Koordinatenebene: $x_3 = 0$

Hangebene : $x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 14 = 0$

Ebene durch A und S und als zweiten Richtungsvektor die Richtung des Lichtstrahls:

A (3 | 8 | 0), S (6 | 14 | 10).

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$22x_1 + 9x_2 - 12x_3 - 138 = 0$

$ax + by + cz = d$

$$\begin{aligned} 3a + 8b &= d \\ 3a + 6b + 10c &= 0 \\ -4b - 3c &= 0 \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems liefert die Koordinatenform.

für d = 69 : a = 11 b = 9/2 c = –6
multipliziert mit 2:
d = 138: a = 22 b = 9 c = –12

Das daraus entstehende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 14 \\ 22x_1 + 9x_2 - 12x_3 &= 138 \end{aligned}$$

$x_1 = 30/7$
$x_2 = 34/7$
$x_3 = 0$

Aufgabe 4

Abitur Baden-Württemberg Lk Mathematik 1997 B

Vor einem größeren Gebäude befindet sich ein Pavillon, der als gläserne Pyramide ausgeführt ist.
Die Punkte A (4 | 2 | 0), B (10 | − 6 | 0), C (18 | 0 | 0) und D (12 | 8 | 0)
sind Ecken der Pyramidengrundfläche. Die Spitze der Pyramide befindet sich im Punkt S (11 | 1 | 10).

a) Zeichne in einem Koordinatensystem das Schrägbild der Pyramide.
(Längeneinheit 0, 5 cm; Verkürzungsfaktor in x_1 – Richtung 1/2√2)

Am Abend wird die Pyramide von außen mit einem punktförmigen Strahler beleuchtet, der sich im Punkt P (22 | 0 | 0) befindet. Die Vorderfront des benachbarten Gebäudes liegt in der $x_2 - x_3$ –Ebene. Auf ihr ist dann der Schatten der Pyramide vollständig zu sehen.

b) Bestimme die Koordinaten des Schattens S_0 der Pyramidenspitze S.

c) Der Strahler befindet sich nun im Punkt P* (a | 0 | 0) mit a > 22. Bestimme die Koordinaten des Schattens S_{0a} der Pyramidenspitze S in Abhängigkeit von a. Untersuche, wohin der Schatten von S wandert, wenn der Strahler auf der x_1 – Achse immer weiter von der Pyramide entfernt wird.

Lösung Aufgabe 4 :

A (4 | 2 | 0), B (10 | − 6 | 0), C (18 | 0 | 0), D (12 | 8 | 0), S (11 | 1 | 10), P (22 | 0 | 0)

a) Zeichnung auf der Folgeseite

b) Bei einer Punktförmigen Lichtquelle entstehen die Geradengleichungen aus einer Zwei-Punkte-Gleichung. Damit ist der eine Punkt die Lichtquelle und der zweite Punkt der auf dem Objekt beschienene Punkt.
Hier werden die Geraden PB, PS und PD benötigt.

P (22 | 0 | 0)
B (10 | −6 | 0)

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[A] [B]

P (22 | 0 | 0)
S (11 | 1 | 10)

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

[A] [C]

P (22 | 0 | 0)
D (12 | 8 | 0)

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[A] [D]

Die Schattenfläche entsteht auf der $x_2 - x_3$ Koordinatenebene, damit bei $x_1 = 0$.

r = 6/11 $\quad B' \begin{pmatrix} 0 \\ -36/11 \\ 0 \end{pmatrix}$

s = 2 $\quad S' \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix}$

t = 5/11 $\quad D' \begin{pmatrix} 0 \\ 40/11 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Geradengleichung aufstellen

P (a | 0 | 0)
S (11 | 1 | 10)

$$x = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 11-a \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

11 + s (11 – a) = 0

$$s = -\frac{11}{11-a}$$

s in die Geradengleichung einsetzen

$$x = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{11}{11-a} \begin{pmatrix} 11-a \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{11}{11-a} \\ 10 - \frac{110}{11-a} \end{pmatrix}$$

Für a → geht der Schattenpunkt gegen die Koordinaten: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

was nicht verwunderlich ist, da es sich dann um paralleles Licht handelt.

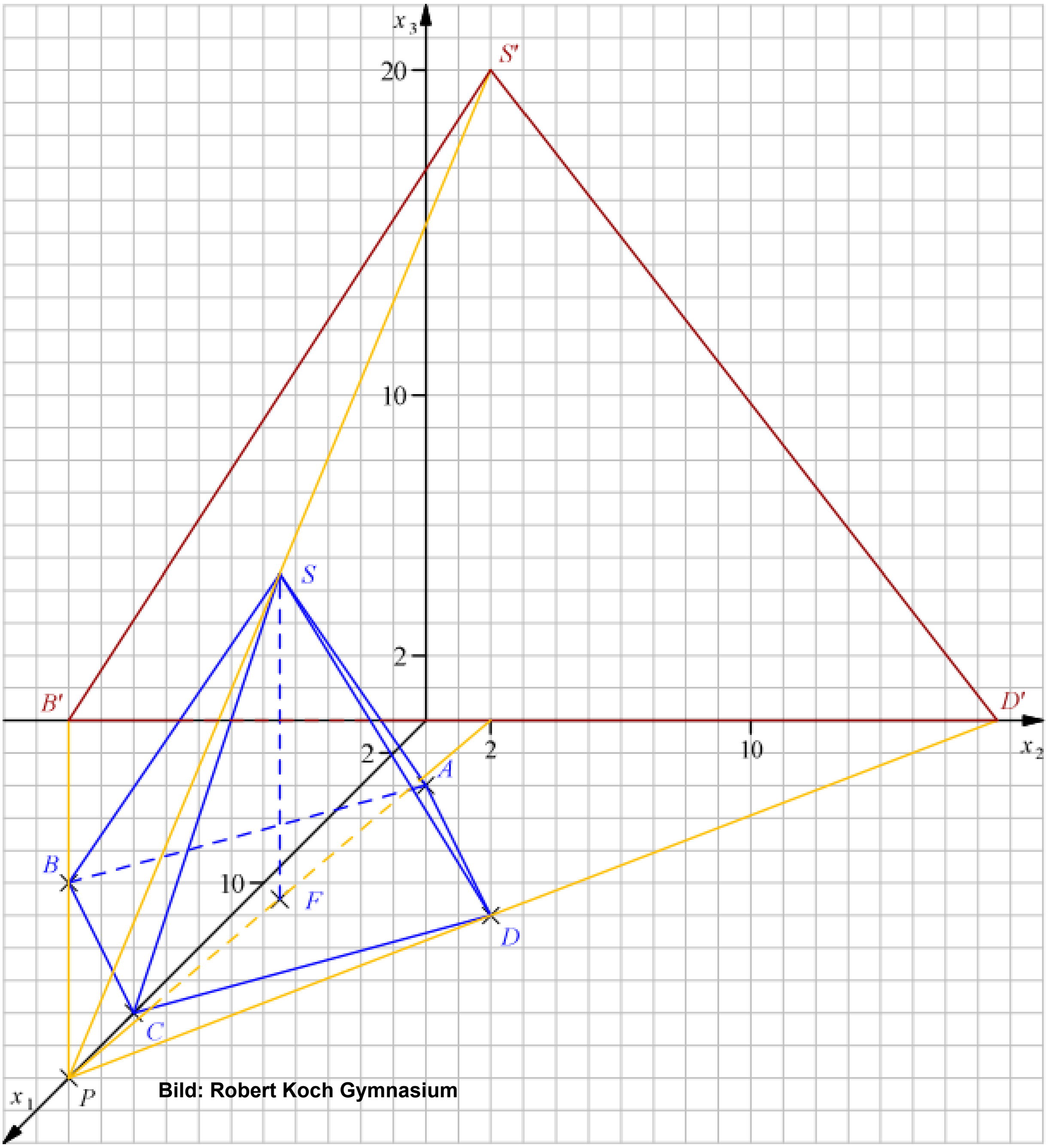


Bild: Robert Koch Gymnasium

Festlegung der Licht – und Schattenseiten

Auch, wenn hier klar ist, auf welche Seiten das Licht fällt und welche Seiten im Schatten liegen, ist genau das ein guter Test um zu überprüfen, ob die Theorie zur Bestimmung der Licht – und Schattenseiten auch hier funktioniert.

A (4 | 2 | 0), B (10 | − 6 | 0), C (18 | 0 | 0), D (12 | 8 | 0), S (11 | 1 | 10)

Der Mantel der Pyramide wird aus 4 Seitenflächen gebildet. $ax + by + cz = d$

ABS	BCS	CDS	DAS
$4a + 2b = d$ $10a - 6b = d$ $11a + b + 10c = d$	$10a - 6b = d$ $18a = d$ $11a + b + 10c = d$	$18a = d$ $12a + 8b = d$ $11a + b + 10c = d$	$12a + 8b = d$ $4a + 2b = d$ $11a + b + 10c = d$
für $d = 22$: $a = 4$ $b = 3$ $c = -2{,}5$ multipliziert mit 2: $d = 44$: $a = 8$ $b = 6$ $c = -5$	für $d = 36$: $a = 2$ $b = -8/3$ $c = 5/3$ multipliziert mit 3: $d = 108$: $a = 6$ $b = -8$ $c = 5$	für $d = 36$: $a = 2$ $b = 1{,}5$ $c = 1{,}25$ multipliziert mit 4: $d = 144$: $a = 8$ $b = 6$ $c = 5$	für $d = 36$: $a = 27$ $b = -36$ $c = -22{,}5$ multipliziert mit 2/3: $d = 72$: $a = 54$ $b = -72$ $c = -45$
$8x + 6y - 5z = 44$	$6x - 8y + 5z = 108$	$8x + 6y + 5z = 144$	$6x - 8y - 5z = 8$

Alle Normalenvektoren zeigen auf die Seite, auf der der Koordinatenursprung **nicht** ist.
Das bedeutet für ABS und DAS, dass der Normalenvektor nach innen zeigt und deshalb die Orientierung geändert werden muss

$-8x - 6y + 5z = -44$	$6x - 8y + 5z = 108$	$8x + 6y + 5z = 144$	$-6x + 8y + 5z = -8$
$\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ein Punkt auf der Ebene legt den Richtungsvektor des Strahlen fest. Der Punkt S liegt auf allen Ebene, so dass man die Strahlen von P nach S verfolgen kann.

S (11 | 1 | 10),
P (22 | 0 | 0)

$PS = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Man muss den Richtungsvektor von P nach S benutzen, denn das ist der Lichtstrahl.

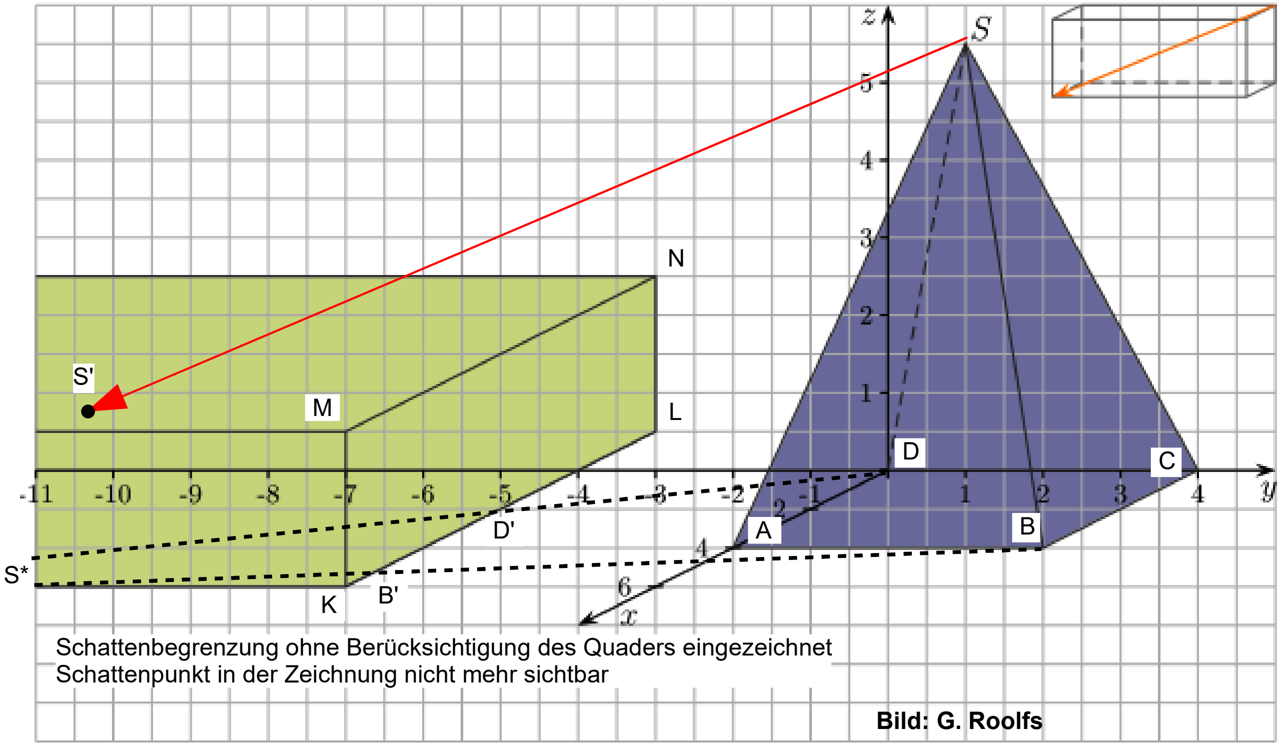
Skalarprodukte:

= 132	= – 24	= – 32	= 124
Fläche im Schatten	Vom Licht beschienen	Vom Licht beschienen	Fläche im Schatten

Aufgabe 5

Die Richtung des einfallenden Sonnenlichts ist $v = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bestimme den Schatten der Pyramide



Eckpunkte der Pyramide: A (4 | 0 | 0), B (4 | 4 | 0), C (0 | 4 | 0), D (0 | 0 | 0), S (2 | 2 | 6)

Eckpunkte des Quaders: K(6 | –4 | 0) L(–1 | –4 | 0) M(6 | –4 | 2) N(–1 | –4 | 2)

Lösung Aufgabe 5 :

Gerade des Sonnenlichts durch die Spitze der Pyramide: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt S* mit der x – y Ebene bei r = 6 : $\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung der oberen Quaderfläche: z = 2

Schnittpunkt S' des Sonnenstrahls mit der Quaderoberfläche bei r = 4: $\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Geraden DS* mit der Geraden LK :

$$x = \underset{[A]}{\overset{D}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} + r \underset{[B]}{\overset{\overrightarrow{DS^*}}{\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}}} \qquad x = \underset{[C]}{\overset{L}{\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}} + s \underset{[D]}{\overset{\overrightarrow{LK}}{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

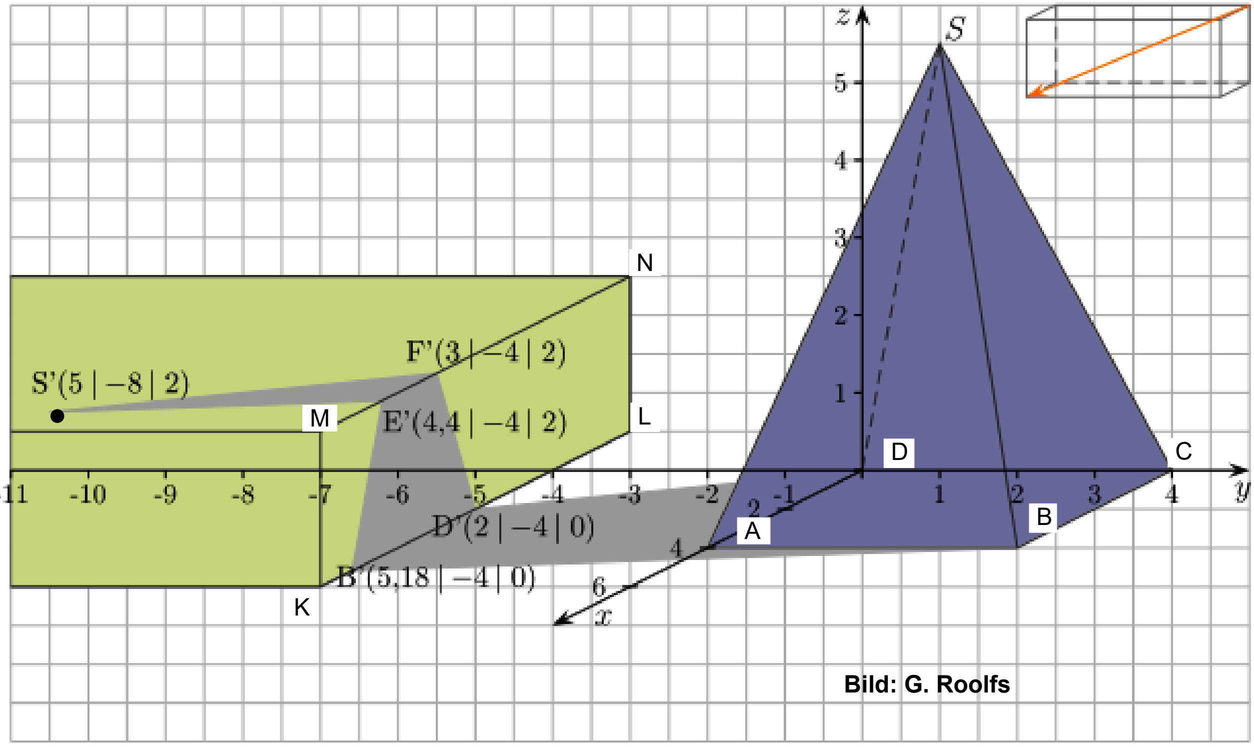
$r = \frac{4}{13}$ $s = \frac{3}{7}$ D' $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Geraden BS* mit der Geraden LK :

$$x = \underset{[A]}{\overset{B}{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}} + r \underset{[B]}{\overset{\overrightarrow{BS^*}}{\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -17 \\ 0 \end{pmatrix}}} \qquad x = \underset{[C]}{\overset{L}{\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}} + s \underset{[D]}{\overset{\overrightarrow{LK}}{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$r = \frac{8}{17}$ $s = \frac{15}{17}$ B' $\begin{pmatrix} {}^{88}/_{17} \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Der Vorteil: Die Matrizen [A] und [B] werden überschrieben, die Rechnungen sind vom Bildschirm kopierbar und können einfach neu aufgerufen werden.)



Für die Punkte E' und F' muss die Ebenengleichung der Pyramidenkante SD und des Lichtstrahls, bzw. die Ebenengleichung der Pyramidenkante SB und des Lichtstrahls erstellt werden. Für diese Ebenen ist dann der Durchstoßpunkt mit der Geraden NM zu bestimmen.
Damit kann man diese Ebenen auch nutzen, um den Duchstoßpunkt mit der Geraden LK zu bestimmen. Man spart sich die Berechnung der Schnittpunkte als Geradenschnittpunkte, wie auf der vorherigen Seite.

Ebene 1 : S, D, V

$$\begin{array}{ccccccc} & D & & \overrightarrow{DS^*} & & v \\ x = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + r & \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix} & + s & \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & [A] & & [B] & & [C] \end{array}$$

Gerade LK:

$$\begin{array}{ccccc} & L & & \overrightarrow{LK} \\ x = & \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} & + t & \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & [D] & & [E] \end{array}$$

$r = \frac{4}{13}$

$s = 0$

$t = \frac{3}{7}$

D' $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mit der Geraden NM werden neue Matrizen angelegt, da die Gerade LK noch einmal für eine andere Ebene benutzt werden muss, bleiben die Werte erhalten.

Gerade NM:

$$\begin{array}{ccccc} & N & & \overrightarrow{NM} \\ x = & \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} & + t & \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & [F] & & [G] \end{array}$$

$r = \frac{9}{13}$

$s = -2$

$t = \frac{4}{7}$

F' $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Ebene 1 wird nicht mehr benötigt und kann deshalb überschrieben werden.

Ebene 2 : S, B, V

$$\begin{array}{ccccccc} & B & & \overrightarrow{BS^*} & & v \\ x = & \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} & + r & \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -17 \\ 0 \end{pmatrix} & + s & \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & [A] & & [B] & & [C] \end{array}$$

Gerade LK:

$$\begin{array}{ccccc} & L & & \overrightarrow{LK} \\ x = & \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} & + t & \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & [D] & & [E] \end{array}$$

$r = \frac{8}{13}$

$s = 0$

$t = \frac{15}{17}$

B' $\begin{pmatrix} ^{88}/_{17} \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebene 2 : S, B, V

$$\vec{x} = \underset{[A]}{\overset{B}{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}} + r \underset{[B]}{\overset{\overrightarrow{BS^*}}{\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -17 \\ 0 \end{pmatrix}}} + s \underset{[C]}{\overset{v}{\begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Gerade NM:

$$\vec{x} = \underset{[F]}{\overset{N}{\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}} + t \underset{[G]}{\overset{\overrightarrow{NM}}{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$r = \frac{13}{17}$

$s = -2$

$t = \frac{92}{119}$

$E' \begin{pmatrix} ^{75}/_{17} \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Damit sind alle Punkte des Schattens auf dem Quader bestimmt.

Eckpunkte der Pyramide: A (4 | 0 | 0), B (4 | 4 | 0), C (0 | 4 | 0), D (0 | 0 | 0), S (2 | 2 | 6)

ABS

$$\begin{aligned} 4a \qquad\quad &= d \\ 4a + 4b \qquad &= d \\ 2a + 2b + 6c &= d \end{aligned}$$

für d = 12 : a = 3, b = 0, c = 1

BCS

$$\begin{aligned} 4a + 4b \qquad &= d \\ 4b \qquad &= d \\ 2a + 2b + 6c &= d \end{aligned}$$

für d = 12 : a = 0, b = 3, c = 1

CDS

Da D der Ursprung ist, muss d = 0 sein

$$\begin{aligned} 4b \qquad &= 0 \\ &= 0 \\ 2a + 2b + 6c &= 0 \end{aligned}$$

DAS

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 4a \qquad &= 0 \\ 2a + 2b + 6c &= 0 \end{aligned}$$

Koordinatengleichungen:

$3x + z = 12$	$3y + z = 12$	$3x - z = 0$	$3y - z = 0$
Normalenvektor zeigt nach außen (vom Nullpunkt weg)		zeigt nach innen, da positive x_1 Komponente	zeigt nach innen, da positive x_2 Komponente

Nach außen zeigende Normalenvektoren:

$3x + z = 12$	$3y + z = 12$	$-3x + z = 0$	$-3y + z = 0$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor des Lichts: $\begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Skalarprodukte:

= 1,25	= – 8,5	= – 3,25	= 6,5
Fläche im Schatten	Vom Licht beschienen	Vom Licht beschienen	Fläche im Schatten

2. Die Berechnung komplett mit dem GTR ausführen (CASIO)

Bei solchen komplizierten Berechnungen und damit verbundenen Ergebnissen die lange Dezimalzahlen erzeugen, möchte man die Rechnung auf dem GTR ausführen. Das ist tatsächlich möglich, aber die notwendigen Informationen werden in der Schule nicht erläutert. In diesem Abschnitt wird nicht auf die Berechnung und deren Begründung eingegangen, sondern nur auf die Umsetzung mit dem GTR.

Die Berechnung des Gleichungssystems unter 1.3 ist allgemein bekannt und wird hier nicht erläutert.

Es wird begonnen mit der Aufgabenstellung 1.4.

Eine grundlegende Voraussetzung für eine erfolgreiche Rechnung ist immer zu wissen, wo stehen welche Werte.

Die Geradengleichungen werden getrennt eingegeben. Jeder Aufpunkt und jeder Richtungsvektor wird in einer Matrix als 3 x 1 Matrix (=Spaltenvektor) gespeichert. Unter den Geradengleichungen werden die Matrix-Bezeichner angegeben unter denen sie gespeichert sind.

A (–3 | 3 | 0) , C (3 | –3 | 0) , Z_0 (-8,6 | -11,4 | 0)
P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0)

g_{AZ0} : $x = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5,6\\-14,4\end{pmatrix}$

[A] [B]

g_{RQ} : $x = \begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

[C] [D]

g_{CZ0} : $x = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-11,6\\-8,4\end{pmatrix}$

g_{PQ} : $x = \begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

3 – 11,6 t = – 5
–3 – 8,4 t = – 6 – 4s

t=0.6896 ; s= 0.6982

Z_2 = (−5, -8.8)

Die Berechnung des Punktes Z_2 bleibt zum selbständigen probieren.

Damit sieht das Gleichungssystem in Vektorform folgendermaßen aus:

[A] + t [B] = [C] + s [D]

Und umgestellt aus korrektes Gleichungssystem:

t [B] – s [D] = [C] – [A]

Auf der linken Seite steht der Richtungsvektor der 2. Geraden mit einem Minus, auf der rechten Seite der Aufpunkt der 1. Geraden mit einem Minus

Wie bekommt man aus den Einzelvektoren das Gleichungs-system zusammen. Dazu hat der GTR die Funktion **augment(** aus dem Matrixmenü 2. Spalte Pos 7. augment verkettet Matrizen spaltenweise, es hängt die Matrizen mit gleicher Zeilenzahl einfach hintereinander. Damit entsteht das Gleichungssystem aus:

augment([B], – [D])

Beim Minuszeichen ist das Vorzeichenminus zu benutzen und nicht das Rechenzeichen.

Mat Aug

OPTN F2 F5

```
Augment(Mat B,-Mat D)
           [-5.6   4]
           [-14.4  0]
```

Aufruf der Matrizen erfolgt über

Mat Mat Matrix Buchstabe

OPTN F2 F1 ALPHA

nach dem Wechsel in OPTN Mat benötigt man nur noch die letzten drei Tasten

An diese Matrix könnte man auch noch die rechte Seite anhängen, hier soll ein anderer Weg gewählt werden. Es ist bekannt, dass das Ergebnis eindeutig sein muss. Deshalb existiert vor die eben erzeugte Matrix eine Inverse Matrix, so etwas wie der Reziprokwert 1/[A] der auf diese Weise natürlich nicht berechnet werden kann. Für die Berechnung der Inversen Matrix wird ebenfalls die Taste X^{-1} benutzt. Der GTR erkennt selbständig, dass die Operation auf deine Matrix angewendet werden soll.

Mat Ans X^{-1}

F1 SHIFT (–) SHIFT)

```
Mat Ans^-1
[ 0     -0.06944444444]
[0.25   -0.09722222222]
```

Diese Inverse Matrix wird dann mit dem Vektor **[C] – [A]** multipliziert: **Ans * ([C] – [A])**

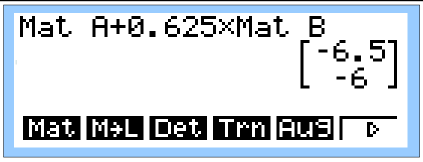
```
Mat Ans×(Mat C-Mat A)
                 [0.625]
                 [0.375]
```

Hier ist jetzt das Rechenzeichen Minus zu benutzen.

Das Ergebnis ist der Lösungsvektor für die Variablen t und s.

Vor dem Matrix-Buchstaben ist immer die Taste F1 – MAT zu drücken.

Jetzt macht sich der Vorteil der getrennten Eingabe bemerkbar. Über eine Vektorgleichung kann man mit dem ermittelten Parameter direkt den Schnittpunkt berechnen lassen.
Das sind die Koordinaten des Punktes Z1, der Fußpunkt an der zweiten Pyramide, an der der Schatten abgelenkt wird.



Aufgabenstellung 1.5.

P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0) , T (-7 | -8 | 3)

Gerade des Lichtstrahls $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

[A] [B]

Ebene 1: $x = T + t\,(Q - T) + s\,(P - T)$

$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

[C] [D] [E]

Schnittpunkt Gerade – Ebene 1

– 12 r = – 7 + 2t + 2s
– 16 r = – 8 + 2t – 2s
5 – 7r = 3 – 3t – 3s

r = ½ ; t = ¼ ; s = ¼

Ebene 2:

$x = T + t\,(Q - T) + s\,(R - T)$

$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt Gerade – Ebene 2

– 12 r = – 7 + 2t – 2s
– 16 r = – 8 + 2t + 2s
5 – 7r = 3 – 3t – 3s

r = 14/31 ; s = −25/124 ; t = 73/124

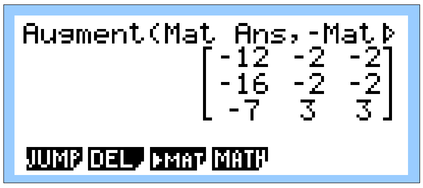
r [B] – t [D] – s [E] = [C] – [A]

Mat Aug

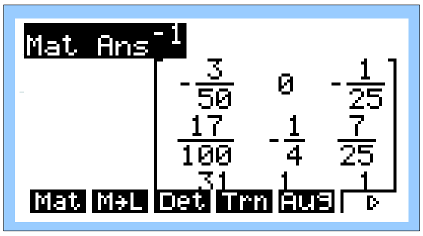
OPTN F2 F5

Hier ist das Gleichungssystem aus drei Spalten zusammenzubauen. Der augment Befehl lässt aber nur das Verbinden von zwei Matrizen zu. Deshalb muss man das in zwei Schritten machen:

augment (MAT B, – MAT D)
augment (MAT Ans, – MAT E)

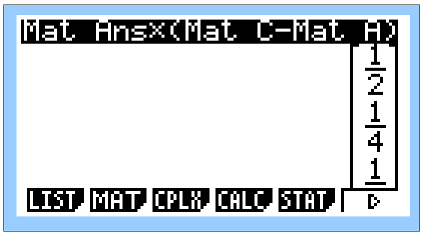


Man muss auf die Klammern achten und das Minuszeichen muss beide Male das Vorzeichen Minus sein.
Auch hier ist die Lösung eindeutig, so dass man wieder mit der Inversen Matrix arbeiten kann.



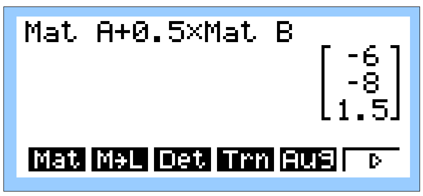
Diese Inverse Matrix wird dann mit dem Vektor **[C] – [A]**
multipliziert: **Ans * ([C] – [A])**

Hier ist jetzt das Rechenzeichen Minus zu benutzen.



Der erste Wert der Lösung 0,5 ist der, der der Geraden zugeordnet ist. Damit lässt sich über die Gerade der Durchstoßpunkt des Sonnenstrahls berechnen.

Das sind die Koordinaten den Punktes Z.



Aufgabenstellung 1.6.

Die Berechnung unter Punkt 1.6 ist ebenfalls die Berechnung eines Schnittpunktes von Gerade und Ebene und auf die gleiche Weise durchzuführen.