1. Linearkombination

Addition von Vektoren:
Vektoren werden addiert, indem man die jeweiligen Komponenten addiert.
Geometrisch wird der nächstfolgende Vektor an die Spitze des vorhergehenden angehängt

Multiplikation mit einem Skalar (reeller Zahl) :
Vektoren werden mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede Komponente mit der reellen Zahl multipliziert.
Geometrisch wird der Vektor verlängert oder verkürzt, ist die Zahl negativ wird seine Orientierung umgekehrt.

Linearkombination:
Vektoren, die über Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl verbunden werden.
Geometrisch ist es eine Kette von aneinander hängenden Vektoren.

Das Ergebnis einer Linearkombination ist wieder ein Vektor.

Das ist eine Linearkombination:

$$5\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}2\\-5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\49\\9\end{pmatrix}$$

Interpretation:
Man muss den ersten Vektor um 5 verlängern, den zweiten Vektor um 3, den dritten Vektor um 4 und umkehren, den vierten Vektor nicht verändern, dann erhält man den Vektor auf der rechten Seite.

2. Gleichungssystem

1. Zeilenweise gesehen: Geradengleichungen im R² ; Ebenengleichungen im R³

$3x + 2y = 7$ 1. Geradengleichung
$-1x + 3y = 5$ 2. Geradengleichung

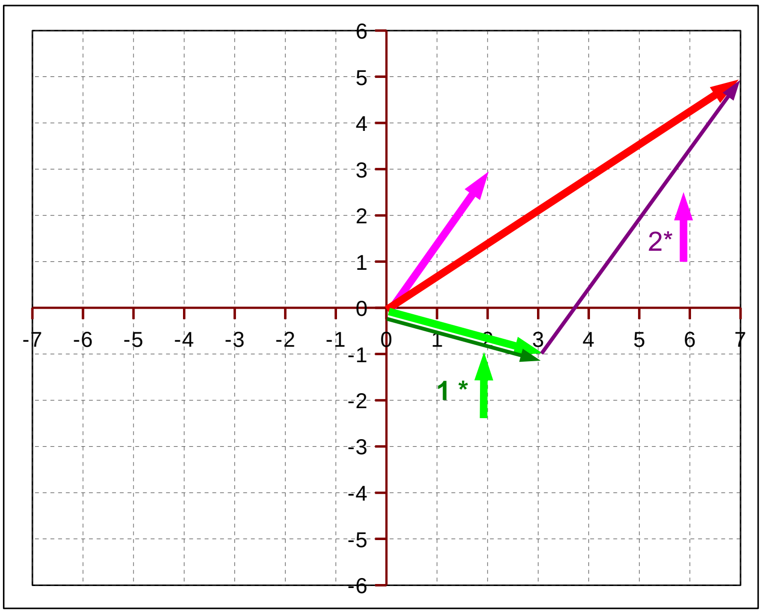
⇒ Die Lösung eines Linearen Gleichungssystems ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.
(zeilenweise Interpretation des Gleichungssystems)

2. Spaltenweise gesehen : Zerlegung des Vektors der rechten Seite in die Anteile der Spaltenvektoren

$$x\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

⇒ Die Lösung eines Linearen Gleichungssystems ist die Suche nach den Linearfaktoren, um aus vorgegebenen Vektoren einen Vektor als Linearkombination zu erzeugen.
(spaltenweise Interpretation des Gleichungssystems)

Lösung:
$x = 1$
$y = 2$



⇒ Wie viele Anteile vom Vektor $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ und vom Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ benötigt man, um den Vektor $\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ darzustellen.

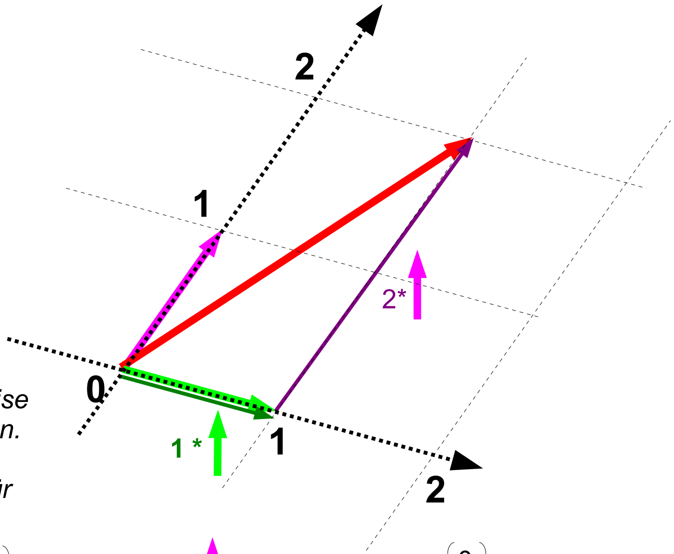
Die Vektoren und sind linear unabhängig

damit sind sie als Basis für den Vektorraum geeignet.

x + y =

Die Komponentendarstellung des Vektors

unter der Basis und ist: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



(Bei diesem Beispiel muss man sich von der Denkweise des üblichen rechtwinkligen Koordinatensystems lösen. Es gibt andere Basisvektoren, die ein anderes Koordinatensystem erzeugen. Es sind die Faktoren für diese Basis gesucht, die den roten Vektor erzeugen.)

In dieser Basis hat der Vektor die Komponenten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor die Komponenten $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ Die Lösung eines Linearen Gleichungssystems sind die einzelnen Komponenten die den Vektor der rechten Seite als Linearkombination der Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix darstellen.

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems: x = 1; y = 2
Der Vektor, der im rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponenten $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat

bei Änderung der Basis auf $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Komponenten $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Was ist das ?</u>

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Vektor der rechten Seite ist eine Linearkombination der Vektoren der linken Seite.
Die Vektoren der linken Seite sind die Basisvektoren des 3 dim Vektorraumes, indem jeder Vektor die Richtung einer Koordinatenachse angibt.

Schlußfolgerung:
Die Komponenten eines Vektors sind die reellen Zahlen (Skalarfaktoren) mit denen man die Basisvektoren multiplizieren muss, um den angegebenen Vektor zu erhalten. Im allgemeinen sind die Basisvektoren immer die Richtungsvektoren der Achsen.

<u>Was ist das ?</u>

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Gesucht sind diejenigen reellen Zahlen aus denen mit den Vektoren der linken Seite der Vektor der rechten Seite dargestellt werden kann.
- gesucht ist die Komponentendarstellung des Vektors der rechten Seite unter Benutzung der Vektoren der linken Seite als Basisvektoren
- was man berechnet ist ein Gleichungssystem. Interpretation des Gleichungssystems über die Spaltenvektoren und nicht über die Zeilen.

Das ist die Lösung
des Gleichungssystems

x_1 = - 0,7119
x_2 = 1,7458
x_0 = 0,4068

$\begin{pmatrix} -0,7119 \\ 1,7458 \\ 0,4068 \end{pmatrix}$

Das sind die Komponenten des Vektors der rechten Seite unter Benutzung der Vektoren der linken Seite als Basis des Vektorraums.

 © Dipl.-Math. Armin Richter

3. Basis eines Vektorraums

Definition

Jede Menge von Vektoren heißt **Basis** des Vektorraums, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- die Menge der Vektoren ist linear unabhängig
- Jeder Vektor des Vektorraums ist eine Linearkombination der Vektoren der Basis

Schlussfolgerungen

- Eine Basis kann nie mehr Vektoren enthalten, als die Dimension des Raumes angibt.
- Die Vektoren einer Basis müssen nicht senkrecht aufeinander stehen
- Die Länge der Basisvektoren muss nicht 1 sein.

Daraus lässt sich schließen, dass die Menge der Basisvektoren

- der 2-dimensionalen Zeichenebene nicht mehr als 2 sein können, damit diese linear unabhängig sind, dürfen sie nicht parallel (**nicht kollinear**) sein
- des 3-dimensionalen Raumes nicht mehr als 3 sein können, damit diese linear unabhängig sind, dürfen sie nicht in einer Ebene liegen (**nicht komplanar**) sein .

Warum hat dieses Gleichungssystem keine Lösung.

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Im 3 dim Raum spannen zwei Vektoren eine Ebene auf. Im 3 dim Raum liegen nicht alle Vektoren in einer Ebene. Liegt der Vektor nicht in der Ebene der beiden anderen, kann es keine Linearkombination aus den beiden Vektoren geben, die den 3. Vektor darstellen.
(Gleichungssystem unlösbar)

Gaußscher Algorithmus im GTR:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die letzte Zeile zeigt die Unlösbarkeit des Gleichungssystems:
$0\,x_1 + 0\,x_2 = 1$
kann keine Lösung haben.

Warum hat dieses Gleichungssystem eine Lösung.

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Liegt der Vektor der rechten Seite ebenfalls in der Ebene der beiden anderen Vektoren gibt es eine Linearkombination, auch, wenn es im 3 dim Raum ist.
(Gleichungssystem eindeutig lösbar)

Gaußscher Algorithmus im GTR:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die letzte Zeile muss eine Nullzeile sein, wenn sich das Gleichungssystem lösen lassen soll. Warum : Es gibt nur 2 Unbekannte, aber 3 Gleichungen, das ist eine Gleichung zu viel. Eine Lösung kann es nur geben, wenn diese Gleichung in den anderen als Linearkombination mit enthalten ist.

Zeilen:
Es ist tatsächlich so, dass mit dem Faktor 23/14 für die 1. Zeile und mit 1/14 für die 2. Zeile sich die 3. Zeile ergibt. Das bedeutet, dass die 3. Zeile eigentlich überflüssig ist, da sie in den ersten beiden schon drinsteckt und keine neuen Einschränkungen der Lösungsmenge bewirkt.

	1. Zeile		2. Zeile		3.Zeile
1. Spalte	23/14 * 2	+	1/14 * (-4)	=	21/7 = 3
2. Spalte	23/14 * 3	+	1/14 * (1)	=	70/14 = 5
3. Spalte	23/14 * 10	+	1/14 * (-6)	=	112/7 = 16

Spalten:

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Schlußfolgerung
Im 3 dimensionalen Raum braucht man wenigstens 3 Vektoren, damit man jeden beliebigen Vektor darstellen kann. Diese 3 Vektoren bilden dann eine Basis des 3 dimensionalen Raumes.
Es gibt unendlich viel Möglichkeiten für eine Basis und nicht nur die eine bekannte.

Warum hat dieses Gleichungssystem keine Lösung.

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Gaußscher Algorithmus im GTR:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die letzte Zeile zeigt wieder die Unlösbarkeit des Gleichungssystems.

Begründung:
Der dritte Spaltenvektor ist bereits eine Linearkombination der beiden ersten. Solche Vektoren nennt man „linear abhängig“ weil sie sich gegenseitig als Linearkombination darstellen lassen. Mit 1 und -1 lassen sich die ersten beiden Vektoren multiplizieren, um den dritte Vektor zu erhalten. Damit spannen die drei Vektoren nicht wirklich einen 3 dimensionalen Raum auf, sondern nur einen zweidimensionalen. Der Vektor der rechten Seite liegt nicht in diesem zweidimensionalen Raum, deshalb kann man ihn nicht als Linearkombination der drei Vektoren darstellen.

Warum hat dieses Gleichungssystem eine Lösung.

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Gaußscher Algorithmus im GTR:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist lösbar mit den Lösungen $x_1 = 2$; $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$

Begründung:
Die drei Vektoren der linken Seite spannen einen dreidimensionalen Raum auf. (Es lässt sich kein Spaltenvektor als Linearkombination der beiden anderen darstellen.) Solche Vektoren nennt man „linear unabhängig“. Deshalb lässt sich jeder Vektor des 3 dimensionalen Raumes als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen. Für den Vektor der rechten Seite wären die Komponenten für die Basis der linken Seite :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Warum hat dieses Gleichungssystem eine Lösung, obwohl links die gleichen Vektoren wie oben stehen.

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Gaußscher Algorithmus im GTR:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die letzte Zeile zeigt , dass das Gleichungssystem eine Parameterlösung hat.

Begründung:
Der Vektor der rechten Seite liegt ebenfalls in der Ebene, in der die anderen drei Vektoren liegen. Für eine Ebene benötigt man aber nur zwei Vektoren, um jeden Vektor der Ebene darzustellen. Hier gibt es aber drei zur Auswahl. Damit gibt es unendlich viele Möglichkeiten der Zusammenstellung der linken Vektoren, damit der rechte Vektor entsteht.

Wählt man $x_3 = t$, dann ergibt sich für $x_2 = -1 + t$ und für $x_1 = 4 - t$. Gibt man t einen konkreten Wert, z.B t = 5 dann ergibt sich für $x_2 = 4$ und $x_1 = -1$.
Damit ist eine Möglichkeit den Vektor der rechten Seite zu erreichen:

$$-1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

© Dipl.-Math. Armin Richter

4. Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine der wichtigsten Beziehungen der Vektorrechnung. Gegenüber den anderen beiden Produkten, dem Vektorprodukt und dem Spatprodukt gilt das Skalarprodukt unabhängig von der Dimension des Raumes, während die anderen beiden Produkte nur im R^3 existieren.
Unabhängig von der Dimension des Raumes wird mit dem Skalarprodukt nachgewiesen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen. Für den R^2 und R^3 kann außerdem der Winkel zwischen den beiden Vektoren und der Abstand von Punkten, Geraden und Ebenen zueinander bestimmt werden.
Die folgenden Abschnitte sollen zeigen, warum das so ist und wie man das erreichen kann.

Definition
Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ im R^3 (für den R^2 ist eine Komponente wegzulassen)
dann versteht man unter dem Skalarprodukt den Wert, der durch die Summe der einzelnen Komponentenprodukte gebildet wird:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

(Üblicherweise wird das Multiplikationszeichen des Skalarprodukts als kleiner Kreis angegeben, um es deutlich von dem Produkt eines Vektors mit einem skalaren Wert zu unterscheiden.)

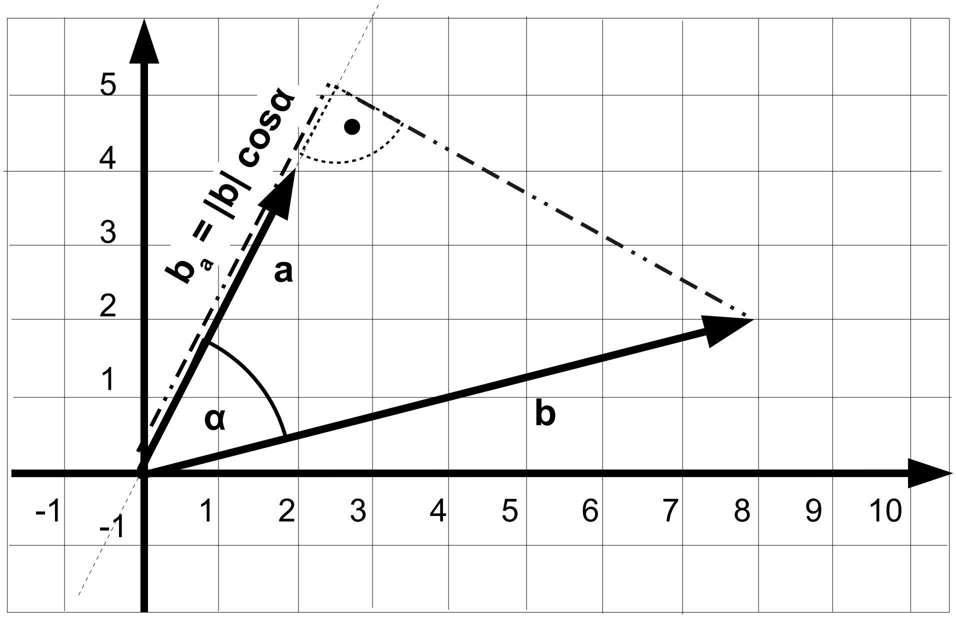
Wie es der Name schon sagt, ist das Ergebnis eine skalare Größe – reelle Zahl – und kein Vektor. Damit hat das Skalarprodukt auch keine Richtung und kann als solche nicht gezeichnet werden.

Rechenregeln für das Skalarprodukt

$\mathfrak{a} \odot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\odot\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\odot\mathfrak{c}$	Das Skalarprodukt ist distributiv
$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \odot \mathfrak{a}$	Das Skalarprodukt ist kommutativ
$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{a} = \lvert\mathfrak{a}\rvert^2 = a^2$	Das Skalarprodukt mit sich selbst ist das Quadrat des Betrages
$\lvert\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}\rvert \le \lvert\mathfrak{a}\rvert * \lvert\mathfrak{b}\rvert$	Der Betrag des Skalarproduktes aus zwei Vektoren ist immer kleiner als das Produkt der beiden Beträge
$(\alpha\, \mathfrak{a}) \odot b = \alpha\, (\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b})$	Ein skalarer Faktor kann ausgeklammert werden.
$\mathfrak{a}_b = (\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}^0)\, \mathfrak{b}^0$	Komponente von a in Richtung b
$\mathfrak{a}_b = \mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}^0 = \lvert\mathfrak{a}\rvert \cos \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^0)$	Projektion von a auf b
$\mathfrak{a}_b^{\perp} = \lvert\mathfrak{a}\rvert \sin \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^0)$	Projektion von a senkrecht zu b

4.1. Das Skalarprodukt und die Trigonometrie

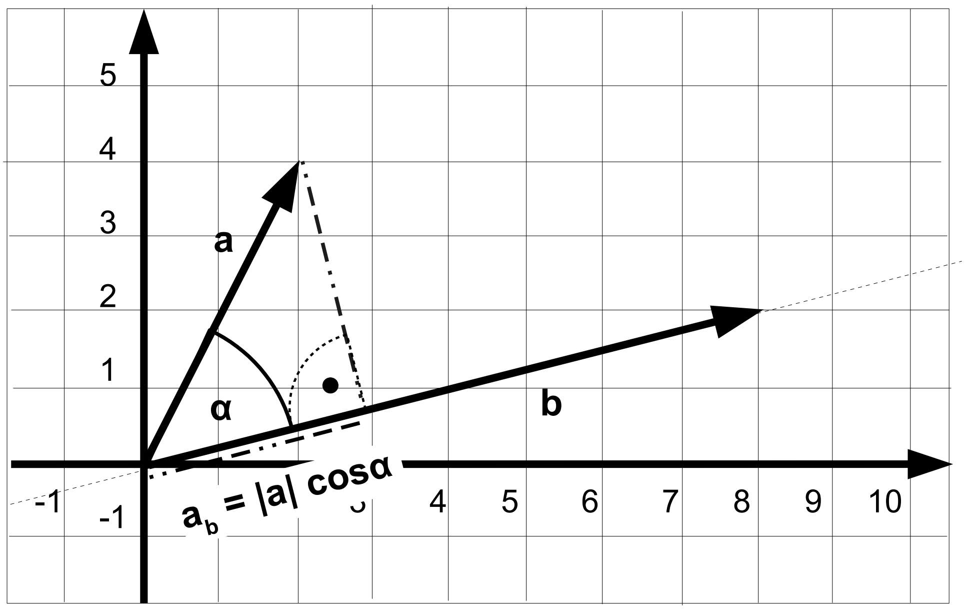
Die Darstellung von zwei Vektoren, die von einem Punkt ausgehen, kann man so ergänzen, dass rechtwinklige Dreiecke entstehen. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist dann immer ein Winkel zwischen einer Kathete und einer Hypotenuse. Da die Kathete anliegend ist handelt es sich um die Ankathete und die zugehörige trigonometrische Funktion zu Ankathete und Hypotenuse ist die cos – Funktion. Die Länge der Projektion eines Vektors auf die Trägergeraden des anderen Vektors liefert den Wert : Betrag des Vektors mal cos des eingeschlossenen Winkels. Das ist ein wesentlicher Bestandteil des Skalarproduktes. Für den Wert des Skalarproduktes selbst ist nur noch mit dem Betrag des Vektors zu multiplizieren, auf den projiziert wurde.



$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha = |\mathbf{a}|\, b_a \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b_a = 5{,}36 \quad |\mathbf{a}| = 4{,}47$$

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 23{,}97$$

(Die Werte von b_a und |a| sollen durch ausmessen bestimmt werden, auch, wenn dabei die Genauigkeit von zwei Stellen hinter dem Komma nicht erreicht wird. Für die Berechnung gilt, dass der eingeschlossene Winkel 49,4° beträgt)

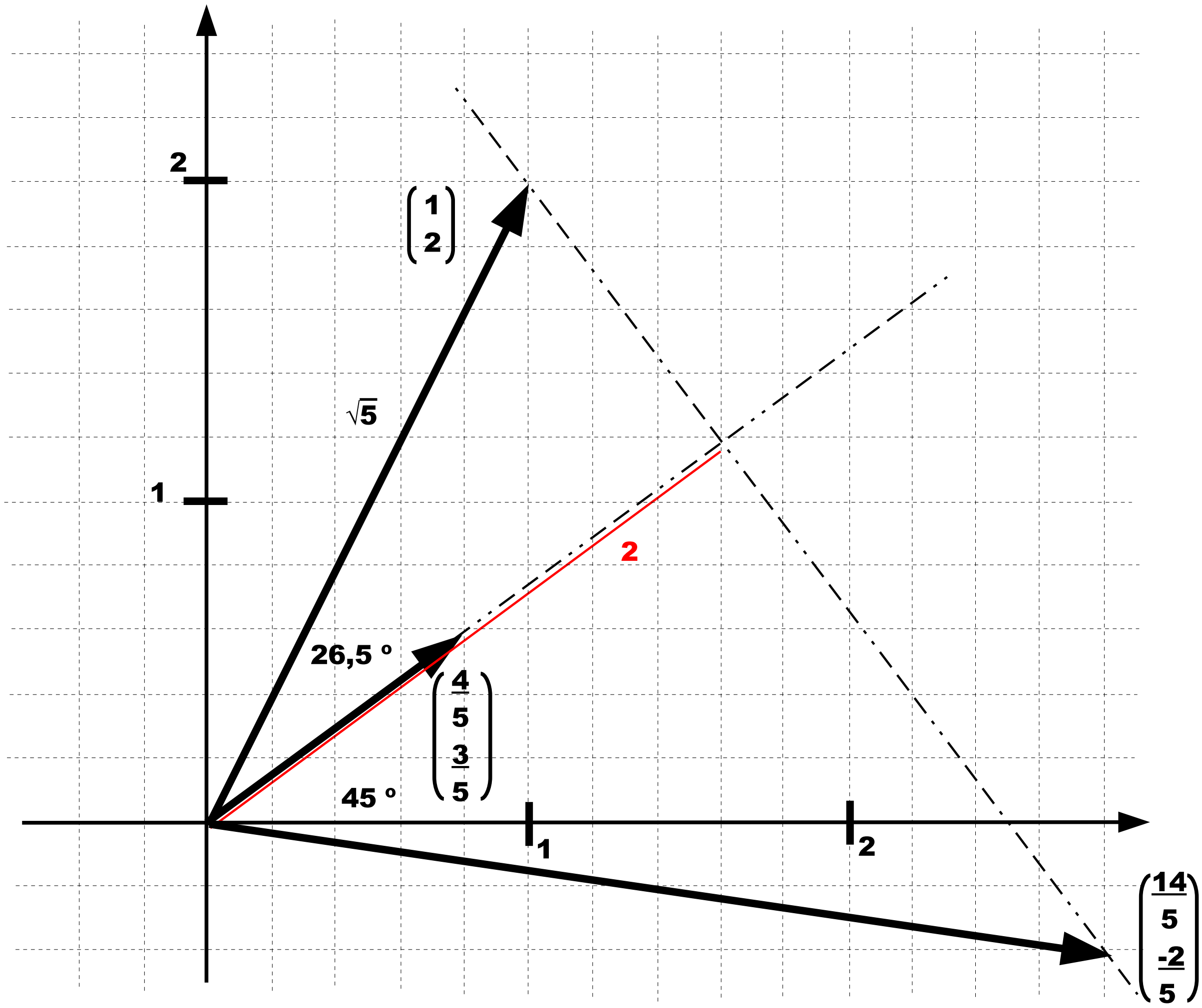


$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha = |\mathbf{b}|\, a_b \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad a_b = 2{,}91 \quad |\mathbf{b}| = 8{,}24$$

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 23{,}99$$

 © Dipl.-Math. Armin Richter

4.2. Das Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor



Der Vektor $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge 1 und damit ein Einheitsvektor.

Skalarprodukt mit : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4/5 • 1 + 3/5 • 2 = 10/5 = 2

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:

Hypotenuse: √5 eingeschlossener Winkel : 26,5 °

Ankathete: A = √5 • cos 26,5 ° = 2

Skalarprodukt mit $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$

4/5 • 14/5 - 3/5 • 2/5 = 50/25 = 10/5 = 2

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:

Hypotenuse: 2√2 eingeschlossener Winkel : 45º

Ankathete: A = 2√2 • cos 45 ° = 2

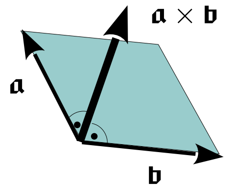
Ist der Vektor, auf den projiziert wird, der Einheitsvektor des Richtungsvektors, dann ist das Skalarprodukt identisch mit dem Abstand des Fußpunktes vom Aufpunkt.

5. Das Vektorprodukt

Während das Skalarprodukt unabhängig von der Dimension des betrachteten Raumes berechnet werden kann, existiert das Vektorprodukt nur im dreidimensionalen Raum. Es gibt kein Vektorprodukt in der Ebene.

Von zwei zweidimensionale Vektoren $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ lässt sich kein Vektorprodukt berechnen, von zwei dreidimensionalen Vektoren $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aber schon. Es sind nicht die gleichen Vektoren, die nur um eine Komponente erweitert wurden. Die Vektoren sind aus Räumen mit verschiedener Dimension.

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$



Die Berechnung des Vektorprodukts erfolgt über die Rechenregeln einer Determinante, insbesondere die Sarrussche Regel für dreireihige Determinanten, das Ergebnis ist der oben stehende Vektor.

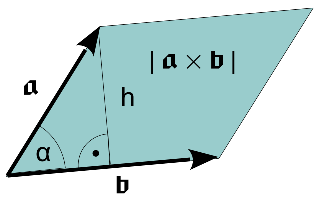
Das Ergebnis des Vektorproduktes ist ein Vektor, der senkrecht auf der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Ebene steht. Diese Eigenschaft ist besonders interessant für die Arbeit mit Ebenen im R^3.
Der Betrag dieses Vektors (Betrag des Vektorproduktes) ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms , das von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ erzeugt wird

5.1. Der Betrag des Vektorprodukts

Der Vektor des Vektorprodukts aus zwei Vektoren: $|\, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \,| = \left| \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \right|$

$\boxed{|\, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \,| = |a|\ |b| \sin \alpha}$

5.2. Geometrische Interpretation des Betrages



Zwei Vektoren spannen immer ein Parallelogramm auf. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnet sich aus Grundseite * Höhe.

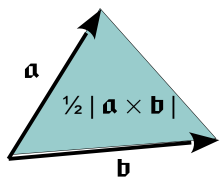
Die Grundseite dieses Parallelogramms wäre etwa der Vektor b und die Länge der Grundseite |b|. α ist der von den Vektoren a und b eingeschlossene Winkel. Damit gilt für α in dem rechtwinkligen Dreieck.

$\sin \alpha = \frac{h}{|a|}$ oder $h = |a| \sin \alpha$ und für den Flächeninhalt des Parallelogramms:

$A = |b| \cdot h = |b|\ |a| \sin \alpha$

Der Betrag des Vektorproduktes aus den Vektoren a und b
ist gleich
dem Flächeninhalt des Parallelogramms,
das von den Vektoren a und b aufgespannt wird.

Nebeneffekt : Die Hälfte des Betrages ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks, das von a und b gebildet wird.

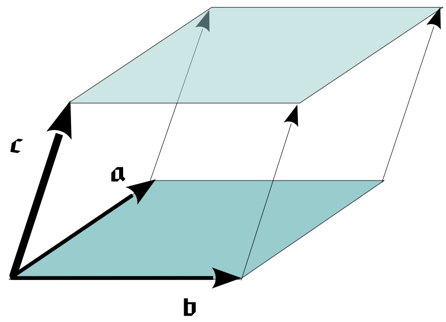


 © Dipl.-Math. Armin Richter

6. Das Spatprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3$$

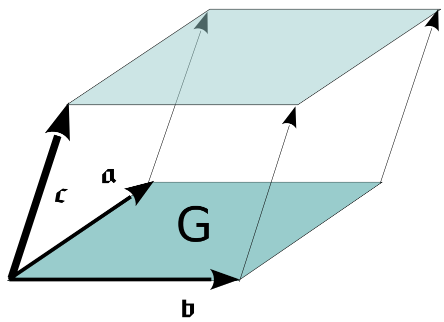


Der Spat ist ein Körper, dessen Seitenflächen aus Parallelogrammen bestehen (Wenn man mit einem Spaten ein Stück feste Erde ausgräbt, hat das ausgegrabenen Stück etwa diese Form). Im letzten Abschnitt über das Vektorprodukt wurden die Flächen eines Parallelogramms berechnet, so dass es möglich ist, die Oberfläche dieses Körpers mit Hilfe der Vektorrechnung zu bestimmen. Jetzt soll die Frage geklärt werden, ob man auch das Volumen mit Hilfe der Vektorrechnung bestimmen kann.

Damit wäre es möglich, Oberflächen und Volumen von Körpern mit viereckigen Seitenflächen allein auf der Basis der Vektorrechnung zu bestimmen. Alle Körper mit runden Seitenflächen (Kegel, Kugel, Zylinder) entziehen sich ohnehin der Vektorrechnung. Würfel, Quader eventuell auch Pyramiden besitzen aber ebene Seitenflächen.

6.1. Das Volumen eines Spates

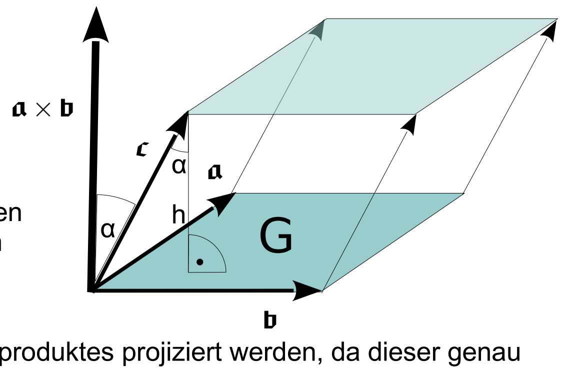
Nach dem Prinzip des Cavalierie berechnen sich die Volumen aller ebenen Körper nach der Formel Grundfläche mal Höhe. Wenn es sich nicht um Quader oder Würfel handelt, sondern um Pyramiden, ist noch ein zusätzlicher konstanter Faktor zu berücksichtigen, da Pyramiden Teile eines Quaders sind. Bei Pyramiden (und Kegeln) ist dieser Faktor ⅓ .



Aus dem Vektorprodukt ist klar, dass sich die Grundfläche aus dem Vektorprodukt der beiden Vektoren a und b berechnen lässt.

$$G = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Damit ist die Aufgabe, die Höhe des Körpers zu bestimmen. Aus dem Vektorprodukt ist weiter klar, dass das Ergebnis des Vektorproduktes ein Vektor ist, der senkrecht auf a und b steht und damit die Richtung der Höhe besitzt, aber nicht die richtige Länge.



Der Vektor des Vektorproduktes schließt mit der nach oben gerichteten Kante des Spats einen Winkel α ein. Mit Hilfe des Skalarproduktes könnte dieser Winkel berechnet werden.
Andererseits ist das Skalarprodukt auch die Projektion des einen Vektors auf den anderen Vektor. Ist der Vektor, auf den projiziert wird, ein Einheitsvektor, handelt es sich genau um den senkrechten Abstand der Spitze des Vektors auf den projizierten Einheitsvektor.

Deshalb soll der Vektor c auf den Einheitsvektor des Vektorproduktes projiziert werden, da dieser genau die Richtung der Höhe besitzt. und dir Projektion auf de0ssen Einheitsvektor genau die senkrechte Höhe angibt.

$$h = \mathbf{c} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\circ = \mathbf{c} \odot \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

Diese Höhe ist mit dem Betrag der Grundfläche zu multiplizieren, um das Volumen zu erhalten:

$$V = G \bullet h = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \bullet \left(\mathbf{c} \odot \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \right) = \mathbf{c} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Achtung bei der Multiplikation: • ist das Multiplikationszeichen zwischen zwei reellen Zahlen
⊙ ist das Multiplikationszeichen für ein Skalarprodukt
x ist das Multiplikationszeichen für ein Vektorprodukt.

Die Reihenfolge dieser Multiplikationen können nicht beliebig vertauscht werden, deshalb ist es vorteilhaft Klammern zu setzen.

Das Ergebnis $\mathfrak{c} \odot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ in der Klammer ist eine reelle Zahl, der Betrag des Vektorproduktes ebenfalls. Damit dürfen die beiden Faktoren $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ gekürzt werden, da es sich dabei um reelle Zahlen handelt. Aber es darf z.B nicht $(\mathfrak{c} \odot \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b}$ gerechnet werden, da $\mathfrak{c} \odot \mathfrak{a}$ kein Vektor ist und somit kein Vektorprodukt mit b gebildet werden kann.

Mathematisch gesehen ist der Wert $\mathfrak{c} \odot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ das Ergebnis einer Determinante, deren Behandlung keinen Schulstoff darstellt. Trotzdem lässt sich auch dieser Wert über den GTR berechnen, indem man die in allen GTR implementierte Funktion „Det“ dazu benutzt. Die drei Vektoren werden spalten oder zeilenweise in eine 3x3 Matrix übertragen und von dieser die Determinante berechnet.
Eventuelle negative Vorzeichen sind der Orientierung der drei Vektoren untereinander geschuldet und und stellen allein keinen Rechenfehler dar.

Das Volumen eines Spates aus drei Vektoren a, b , c ist gleich

dem Skalarprodukt des einen Vektors

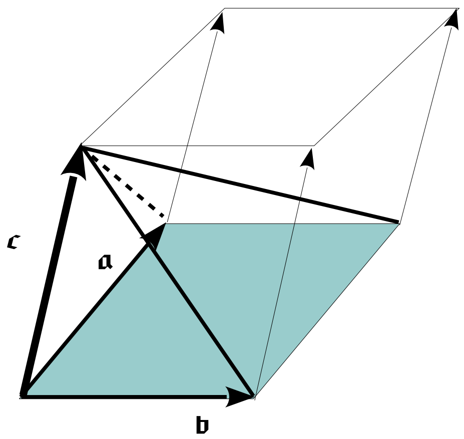
mit dem

Vektorprodukt der beiden anderen Vektoren

Das Ergebnis des Spatproduktes ist eine reelle Zahl.

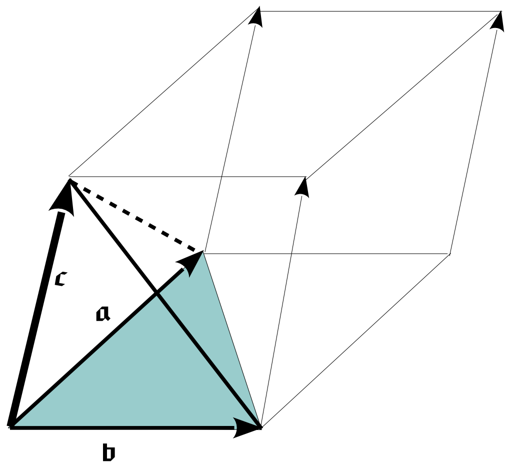
6.2. Das Volumen einer vierseitigen Pyramide

$$V = \frac{1}{3} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \odot \mathfrak{c}$$



6.3. Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide

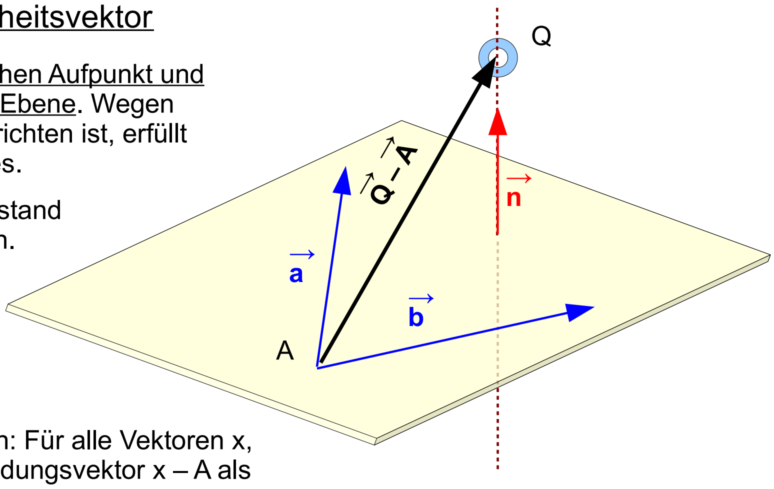
$$V = \frac{1}{6} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \odot \mathfrak{c}$$



 © Dipl.-Math. Armin Richter

7. Abstandsberechnung bei Ebenen

7.1. Projektion auf den Normaleneinheitsvektor



Wir projizieren den Verbindungsvektor zwischen Aufpunkt und Punkt auf den senkrechten Unterraum einer Ebene. Wegen der Orthogonalität, die an einen Abstand zu richten ist, erfüllt dieser Raum die Bedingungen des Abstandes.

Betrachten wir die Ebene und wollen den Abstand eines Punktes Q zu dieser Ebene bestimmen.

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$$

$$\vec{x} - \vec{A} = u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$$

Man kann die zweite Gleichung interpretieren: Für alle Vektoren x, die in der Ebene liegen, lässt sich der Verbindungsvektor x – A als Linearkombination der beiden Richtungsvektoren darstellen.

Für die Punkte, für die man den Abstand berechnen soll, wird das nicht möglich sein. Um den Verbindungsvektor von A mit einem beliebigen Punkt Q als Linearkombination von A und b darzustellen benötigt man zusätzlich einen Vektor, der nicht in der Ebene liegt, der "die dritte Richtung" mit abdeckt. Man nimmt für diesen Fall den Normalenvektor, der senkrecht auf a und b ist.

Mit n = a x b enthält man eine vollständige Basis für den gesamten dreidimensionalen Vektorraum. Damit ist

$$\underbrace{\underbrace{\left((\vec{x} - \vec{A}) \circ \vec{n}^\circ \right)}_{(1)} \bullet \vec{n}^\circ}_{(2)}$$

Das erste Produkt (1) in der Klammer ist ein Skalarprodukt, das Produkt der Klammer mit dem zweiten Normalenvektor (2) ein Produkt einer reellen Zahl mit einem Vektor.

(1) Setzt man für x gleich Q ein, erhält man die Projektion auf den Normalenvektor der Ebene. Nach der Erklärung des Skalarproduktes muss auf den Einheitsvektor projiziert werden, damit sich der Abstand ergibt.

Das Produkt innerhalb der äußeren runden Klammer entspricht genau dem Wert, den man bei Benutzung der Koordinatenform erhält und stellt die Länge des Abstandes dar.

(2) Multipliziert mit dem Normaleneinheitsvektor ist es der Abstandsvektor des Punktes Q zur Ebene.

$$(\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{n}^\circ$$

Berechnet den Abstand eines Punktes Q von einer Ebene, da es direkt die Projektion auf den senkrechten Raum berechnet

Musterbeispiel

Projektion des Verbindungsvektors auf den Normaleneinheitsvektor der Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q\,(1 \,|\, -1 \,|\, 2)$$

$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalform der Ebene:
$$\left[x - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Zur Abstandsberechnung muss der Normalenvektor, auf den projiziert wird, ein Einheitsvektor sein.

$$\left[x - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \circ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Zur Berechnung des Abstandes von Q zur Ebene muss der Verbindungsvektor vom Stützvektor der Ebene zum Punkt Q auf den Normaleneinheitsvektor projiziert werden.

Q (1 | –1 | 2)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \circ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\frac{1}{3}\,(-6 + 1 - 4) = -3$$

7.2. Die Berechnung über die Koordinatengleichung ist der gleiche Rechenweg

(Günstigster Rechenweg, auch in der Schule am häufigsten praktiziert)

Koordinatengleichung:
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 16$

$x \circ n = P \circ n$

links steht das Skalarprodukt $x \circ n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

rechts steht das Skalarprodukt $P \circ n$: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 16$

$$\frac{(x - P) \circ n}{|\,n\,|} = 0$$

$$\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 16}{3} = 0$$

dividiert durch den Betrag des Normalenvektors und bringt damit den Normalenvektor auf den Einheitsvektor.
Anschließend wird der Punkt Q für den Punkt x eingesetzt.

$$\frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 16}{3} = \frac{2 + 1 + 4 - 16}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

7.3. Die Berechnung über die Lotgerade durch den Punkt Q

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q\,(1 \,|\, -1 \,|\, 2)$$

Für die Lotgerade wird der Normalenvektor sowieso gebraucht, deshalb ist es sinnvoll, die Ebenengleichung in die Koordinatenform zu überführen.

$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung:
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 16$

Lotgerade durch Q : $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

 © Dipl.-Math. Armin Richter

Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene:

$$\begin{aligned} 2(1+2s) - (-1-s) + 2(2+2s) &= 16 \\ 2 + 4s + 1 + s + 4 + 4s &= 16 \\ 9s + 7 &= 16 \\ 9s &= 9 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

Lotfußpunkt von Q : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$Q - X_F$ ergibt den Abstandsvektor und der Betrag davon den Abstand.

$Q - X_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Abstand : $\sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

7.4. Zerlegen des Verbindungsvektors Q – A in die Basis a, b und n

a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, b $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und n $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Vektoren und bilden damit eine Basis des 3dim Raumes.

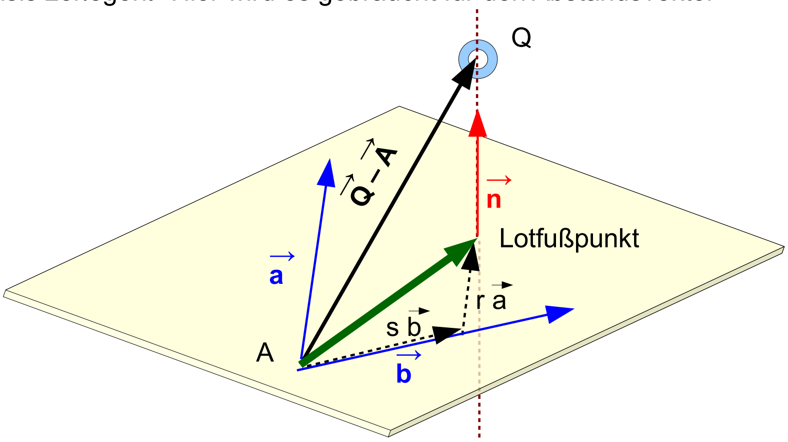
Damit lässt sich jeder Vektor in diese Basis zerlegen. Hier wird es gebraucht für den Abstandsvektor

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems:
r = - 0,2 ; s = - 0,4 ; t = - 1

Man benötigt für die Zerlegung also 1 Einheit des Normalenvektors n um den Verbindungsvektor darzustellen.



Eine Einheit des Normalenvektors n hat aber die Länge | n| = 3. Der Abstand des Punktes ist 3.

So ganz nebenbei erhält man über A + r a + s b = $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 0{,}2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 0{,}4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ den Lotfußpunkt.

Unterschied bei der Berechnung des Abstandes vom Lotfußpunkt nach Q und der Berechnung der Koordinaten des Lotfußpunktes.

Berechnung des Abstandes von Q zum Lotfußpunkt (zur Ebene)

Betrachtet man das gesamte Gebilde Ebene , Richtungsvektoren und Q, so kann man das gesamte Gebilde verschieden, ohne, dass sich an den Werten etwas ändert. Diese Werte bestimmt man „relativ“ zur Ebene. Man arbeitet in einem neuen Koordinatensystem, bei dem der Punkt A der Nullpunkt ist und a, b und n die Koordinatenachsen. In diesem Koordinatensystem ist der Abstand von Q zur Ebene immer konstant.

Berechnung des Lotfußpunktes

Die Koordinaten des Lotfußpunktes liegen im äußeren Koordinatensystem, das von den Achsen x_1 , x_2 und x_3 bestimmt wird. Diese Koordinaten ändern sich, wenn man das ganze Gebilde verschiebt. Deshalb benötigt man einen festen Punkt in dem Gebilde, hier A, von dem aus man den anderen Punkt berechnen kann.

8. Abstandsberechnung bei Geraden

8.1. Projektion auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors

Bei dieser Berechnung wird eine andere Eigenschaft der Projektion benutzt. Wir projizieren den Verbindungsvektor zwischen Aufpunkt und Punkt auf den Unterraum der Geraden selbst.

Für die Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden muss man unbedingt den Fußpunkt berechnen, da man nicht die senkrechte Richtung von der Geraden zu Punkt Q kennt.
Gesucht ist also der t Wert, der vom Stützvektor zum Fußpunkt des Lotes X_F führt.

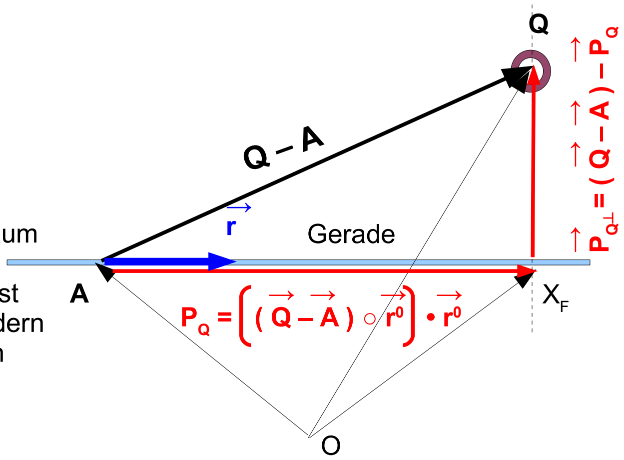
Außer dem üblichen Rechenweg über die Hilfsebene und dem Durchstoßpunkt der Geraden mit dieser Ebene kann man auch die Projektion von Q – A auf den Einheitsvektor der Geraden durchführen.

$$g:\ \vec{x} = \vec{A} + t\,\vec{r}$$

$$\vec{x} - \vec{A} = t\,\vec{r}$$

$$P_Q = \left((\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{r}^{\circ} \right) \bullet \vec{r}^{\circ}$$

Projektion des Differenzvektors Q - A auf den Vektorraum des Richtungsvektors.
Die Formel ist die gleiche, wie die bei der Ebene, nur ist jetzt die Projektion nicht auf den Normalenvektor, sondern auf die Gerade selbst. Man erhält aber damit nicht den Abstand, sondern den Fußpunkt, über den man den Abstand berechnen kann, wie bei der Hilfsebene



$$\left((\vec{x} - \vec{A}) \circ \vec{r}^{\circ} \right) \bullet \vec{r}^{\circ}$$ **Berechnet die Projektion eines Punktes Q auf die Gerade.**

Musterbeispiel

Projektion des Verbindungsvektors auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q\,(5 / -1 / 2)$$

$$\vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = \sqrt{6} \qquad \vec{r}^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_Q = \left((\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{r}^{\circ} \right) \bullet \vec{r}^{\circ}$$

$$P_Q = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \bullet \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{14}{\sqrt{6}} \bullet \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{14}{6} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7}{3} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ -7/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Projektion des Vektors Q – A auf die Gerade und damit der Vektor vom Stützvektor A zum Lotfußpunkt X_F.
Die Projektion auf die Gerade ist der Abstand des Lotfußpunktes vom Aufpunkt der Geraden.
Addiert man diesen Vektor zum Aufpunkt, erhält man den Lotfußpunkt.

$$X_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14/3 \\ -7/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 \\ 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$Q - X_F$ ergibt den Abstandsvektor und der Betrag davon den Abstand.

$$Q - X_F = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{Abstand: } \tfrac{1}{3}\sqrt{30}$$

 © Dipl.-Math. Armin Richter

8.2. Schnittpunkt der Geraden mit einer senkrechten Hilfsebene

(in der Schule angegebener Rechenweg)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q\ (5 / -1 / 2)$$

Ebene durch den gegebenen Punkt Q und senkrecht zur Geraden g in Normalform mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor der Ebene:

$$E: \left(x - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform: $2x_1 - x_2 + x_3 - 13 = 0$

Schnittpunkt der Geraden mit der Hilfsebene liefert den Lotfußpunkt zur Berechnung des Abstandes:

$$2\,(1 + 2s) - (3 - s) + (0 + s) - 13 = 0$$
$$2 + 4s - 3 + s + s - 13 = 0$$
$$6s = 14$$
$$s = 7/3$$

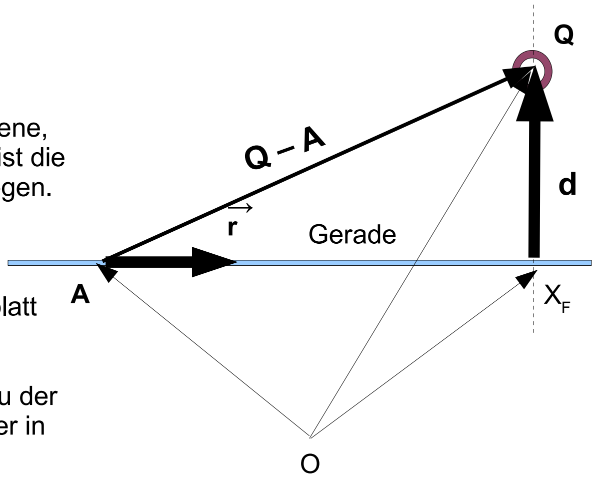
Lotfußpunkt X_F: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 7/3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 \\ 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ *(gleicher Lotfußpunkt, wie im Abschnitt 8.1.)*

$Q - X_F$ ergibt den Abstandsvektor und der Betrag davon den Abstand.

$$Q - X_F = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{Abstand: } \tfrac{1}{3}\sqrt{30}$$

8.3. Projektion des Verbindungsvektors auf den Abstandvektor zur Geraden

Der Vektor d ist der tatsächliche Abstandsvektor von Q zur Geraden g. Bei einer Geraden ist dieser nur nicht so einfach zu berechnen.



1. Eine Gerade und ein Punkt liegen immer in einer Ebene, so lange der Punkt nicht auf der Geraden liegt. Das ist die hier dargestellte Ebene, in der die beiden Objekte liegen.
2. Aus dem Vektor r und dem Vektor Q – A lässt sich der Normalenvektor der Ebene berechnen. (Der Normalenvektor würde senkrecht aus dem Zeichenblatt herausragen)
3. Das Vektorprodukt von diesem n und dem r ist genau der Abstandsvektor. Er ist senkrecht zu n, deshalb liegt er in der Ebene und er ist senkrecht zu r damit ist er ein Abstandsvektor. $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{r}}$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q\ (5 / -1 / 2) \qquad \vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$n = r \times (Q - A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad n \times r = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Abstand ist die Projektion von Q – A auf den Einheitsvektor von n x r .

$$\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = A \qquad \frac{1}{\sqrt{30}}\,(8 - 20 + 2) = \frac{10}{\sqrt{30}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{30}$$

8.4. Zerlegen des Verbindungsvektors Q – A in die Basis r, n und n x r

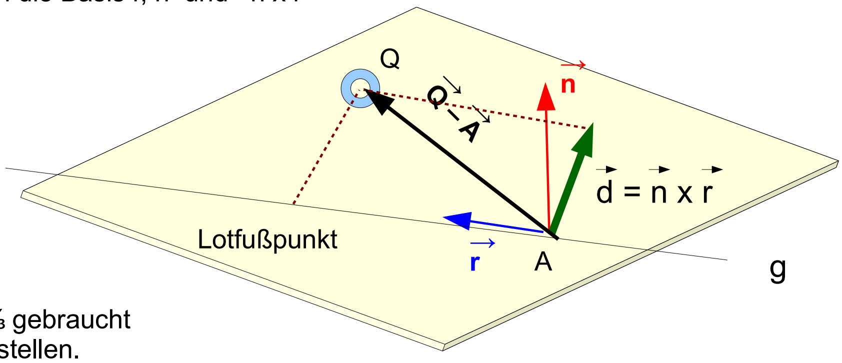
Diese drei Vektoren sind linear unabhängig und sogar noch paarweise senkrecht.

$$\vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad n \times r = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor Q – A liegt in der Ebene, die von Q und der Geraden g aufgespannt wird.

Zerlegen des Verbindungsvektors Q – A in die Basis r, n und n x r

$$\begin{array}{ccccccc} & r & & n & & n \times r & & Q–A \\ t & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & + r & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} & + s & \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

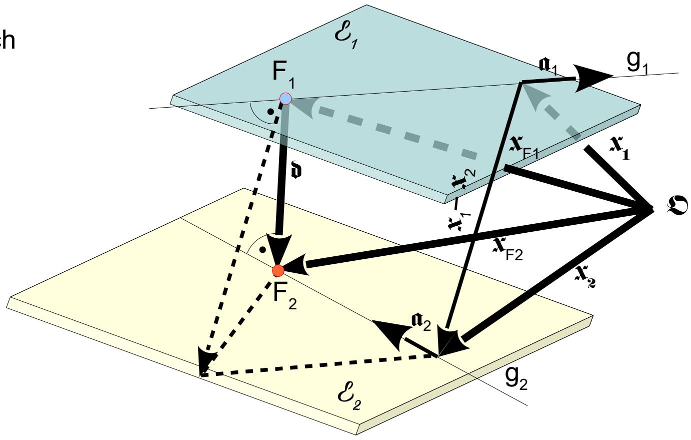


Lösung des Gleichungssystems:
t = 2⅓ ; r = 0 ; s = - ⅓

Von dem Vektor n x r wird die Länge von ⅓ gebraucht um in dieser Basis den Vektor Q – A darzustellen.
Der Betrag des Vektors n x r beträgt √30. Damit beträgt der Abstand zur Geraden ⅓ √30 .

© Dipl.-Math. Armin Richter

8.4. Abstand windschiefer Geraden



Da diese Geraden nicht parallel sind und sich auch nicht schneiden, sind die Richtungsvektoren nicht linear abhängig und die Aufpunkte liegen nur auf einer Geraden.

Hier liegt die Schwierigkeit darin dass man zwei senkrechte Richtungen bestimmen muss, nämlich zu jeder Geraden und es ist auch nicht der Fußpunkt der Geraden bekannt, zwischen denen der kürzeste Abstand erreicht wird. Damit kann man nicht auf die Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden zurückgreifen.

Hier wendet man ebenfalls einen Trick an:
Zwei windschiefen Geraden kann man jeweils eine Ebenen zuweisen mit der Eigenschaft, dass die beiden Ebenen parallel sind. Das erreicht man dadurch, dass man für beide Ebenen beide Richtungsvektoren der Geraden benutzt und für die eine Ebene den einen Aufpunkt und für die andere Ebene den anderen Aufpunkt.

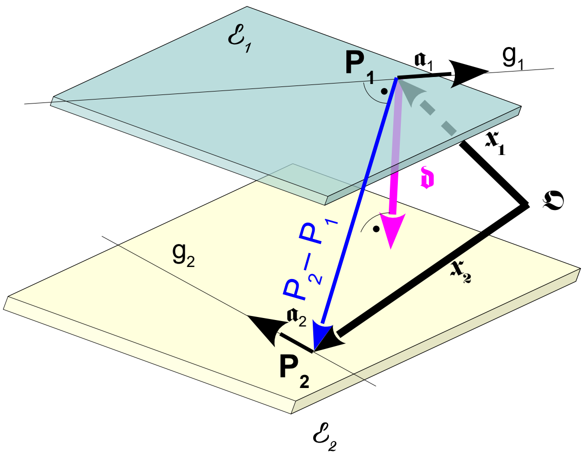
Teil 1: Bestimme die Ebenengleichungen

Bestimme die Ebenengleichungen nach dem angegebenen Prinzip.

$E_1 : \vec{x} = \vec{P_1} + t\,\vec{a_1} + s\,\vec{a_2}$ $\qquad$ $E_2 : \vec{x} = \vec{P_2} + k\,\vec{a_1} + l\,\vec{a_2}$

parallele Ebenen haben den gleichen Normalenvektor, der damit auch Richtung des senkrechten Abstandes beider Ebenen ist.

Teil 2: Bestimme den Abstand über Projektion



Der Abstandvektor d ist an allen Stellen zwischen den beiden Ebenen gleich und verläuft in Richtung des Normalenvektors der beiden Ebenen. Diesen Vektor kann man sich den Aufpunkt einer der beiden Geraden verschoben denken. (Im Bild in den Aufpunkt von g_2.)

Da jetzt die senkrechte Richtung bekannt ist, kann man den Verbindungsvektor von P_1 und P_2 auf den Abstandsvektor = Normalenvektor, **als Einheitsvektor**, projizieren:

$$\boxed{(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \circ \vec{n}^0 = d}$$

Teil 3: Bestimme den Abstandsvektor

Der Abstandsvektor ist die Länge des Abstandes multipliziert mit dem **Einheitsvektor** in Normalenrichtung

$$\boxed{\vec{\mathbf{d}} = \mathbf{d} \cdot \vec{\mathbf{n}}^0}$$

Musterbeispiel

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.4.1. Projektion des Verbindungsvektors der Stützvektoren auf den Normalenvektor der Ebene

(in der Schule nicht praktiziert, aber der einfachste Rechenweg. Der in der Schule angegebene Rechenweg über die beiden Lotfußpunkte sollte nicht beschritten werden, weil er zu aufwendig und zu fehleranfällig ist)

Normalenvektor aus den beiden Richtungsvektoren der Geraden $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $|\, n \,| = \sqrt{30}$

Verbindungsvektor der beiden Stützvektoren der Geraden: $\vec{P_2} - \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Projektion des Verbindungsvektors auf den Normaleneinheitsvektor : $(P_2 - P_1) \circ n^0 = d$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} (15 - 8) = \frac{7}{\sqrt{30}} \approx 1{,}278$ Abstand der windschiefen Geraden.

Die Berechnung liefert nur den kürzesten Abstand der beiden Geraden, aber nicht, an welchen Punkten der Geraden dieser Abstand erreicht wurde. Diese Fußpunkte des Abstandes waren bisher noch nie gefragt, da sie eben aufwendig zu berechnen sind.

8.4.2. Zerlegen des Verbindungsvektors $P_2 - P_1$ in die Basis r_1 , r_2 und n

$r_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und n $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Vektoren und bilden damit eine Basis

des 3dim Raumes.

Zerlegen des Verbindungsvektors $P_2 - P_1$ in die Basis r_1 , r_2 und n

$$\begin{array}{cccc} r1 & r2 & n & P2–P1 \\ t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} & + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems:
t = 11/18 ; r = 17/90 ; s = 7/30

Man benötigt für die Zerlegung 7/30 Einheiten des Normalenvektors n um den Verbindungsvektor darzustellen. Eine Einheit des Normalenvektors n hat aber die Länge | n| = √30. Der Abstand des Punktes ist 7/30 * √30 = 7 /√30 .

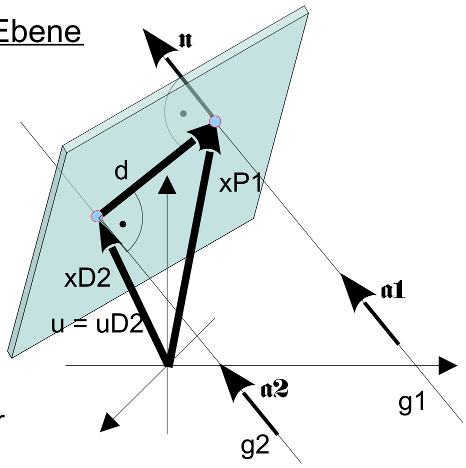
© Dipl.-Math. Armin Richter

8.5. Abstand paralleler Geraden

Parallele Geraden liegen immer in einer Ebene, für parallele Geraden gibt es Ebenen, die beide Geraden senkrecht schneiden. Beide Eigenschaften können ausgenutzt werden, um den Abstand paralleler Geraden zu bestimmen.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.5.1. Schnittpunkt zwischen Gerade und senkrechter Ebene



(praktizierter Rechenweg in der Schule)

Ebenengleichung der Ebene,
die senkrecht zu den Geraden ist:

(entspricht nicht der obigen Zeichnung)

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad 3x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 = 18$$

Durchstoßpunkt für g_1 , da die Ebenengleichung mit dem Stützvektor von g_2 gebildet wurde, ist der Stützvektor von g_2 automatisch Durchstoßpunkt von g_2 und der Ebene.:

$$(-2 + 3s - 4)\,3 + (-3 + 2s + 2)\,2 + (-2 + 2s - 5)\,2 = 0$$
$$-34 + 17\,s = 0$$
$$s = 2$$

Durchstoßpunkt : $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der Differenzvektor des Durchstoßpunktes mit dem Stützvektor von g_2 gibt den Abstandsvektor.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

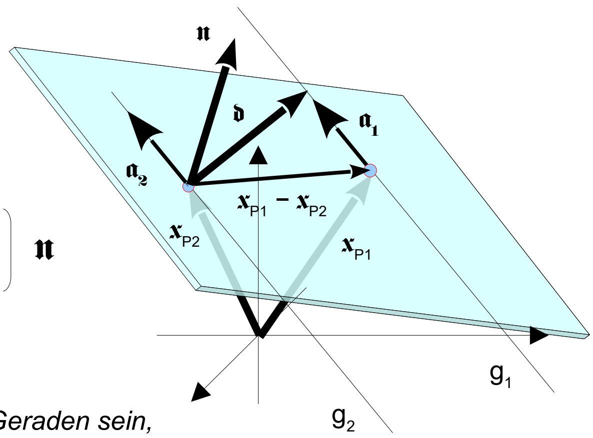
Der Differenzvektor entspricht dem obigen Abstandsvektor verlängert um den Faktor 3.
Die Länge des Abstandsvektors ist $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

8.5.2. Zerlegen des Verbindungsvektors $P_2 - P_1$ in die Basis r_1 , n und d

Zwei parallele Geraden liegen in einer Ebene.

Der zweite Richtungsvektor ist der Verbindungsvektor zwischen den beiden Stützvektoren.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$



Normalenvektor dieser Ebene über das Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \;\mathfrak{n}$

Vektorprodukt des Normalenvektors mit dem Richtungsvektor der Geraden: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\mathfrak{d}$

Es muss das Vektorprodukt mit dem Richtungsvektor der Geraden sein, denn man braucht einen senkrechten Vektor zur Geraden.

Gleichungssystem: $\quad a_1 \quad n \quad a_1 \times n \quad x_{P2} - x_{P1}$

$$q \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad q = 2 ; r = 0 ; s = 3$$

Von dem senkrechten Abstandsvektor werden 3 Einheiten gebraucht, um den Verbindungsvektor der beiden Stützvektoren darzustellen. Dieser Verbindungsvektor hat selbst die Länge $\sqrt{2}$, damit ist der Abstand der beiden Geraden $3\sqrt{2}$.

8.5.3. Projektion des Verbindungsvektors der Stützvektoren auf den Abstandsvektor

Abstandsvektor d : $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor der beiden Stützvektoren der Geraden: $\vec{P_2} - \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt des Verbindungsvektors auf den Einheitsvektor der

Abstandsrichtung d ist $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

8.5.4. Abstand Punkt - Gerade

Da alle Punkte der Geraden g_2 von der Geraden g_1 den gleichen Abstand haben, kann man auch den Abstand eines Punktes von einer Geraden benutzen. Man verwendet z.B die Gerade g_1 und einen Punkt von der Geraden g_2 und berechnet den Abstand nach den Formeln für Abstand Punkt – Gerade.
Der Lösungsweg in 8.5.1 mit der senkrechten Ebene entspricht inhaltlich der senkrechten Ebene, die bei der Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden benutzt werden kann.

© Dipl.-Math. Armin Richter

9. Zusammenfassung

r Richtungsvektor ; n Normalenvektor , d Abstandsvektor
P Stützvektor der Geraden ; Q Punkt, von dem der Abstand bestimmt werden soll.
r° , d° , n° sind die jeweiligen Einheitsvektoren, die entstehen, wenn man die Gleichung durch den Betrag des Vektors dividiert.

Berechnung über den Fußpunkt des Lotes vom gegebenen Punkt auf das Objekt über Skalarprodukt	Senkrechte Hilfsebene / - gerade zur Bestimmung des Lotfußpunktes	Berechnung des Abstandes mittels Skalarprodukt auf den Abstandsvektor	Zerlegung des Verbindungsvektors in lokales Koordinatensystem
<u>Abstand Punkt - Gerade</u> 8.1. Abstand des Fußpunktes : $t_F = \left((\vec{Q} - \vec{P}) \circ \vec{r}^\circ \right)$ Fußpunkt: $\vec{F} = \vec{A} + \left((\vec{Q} - \vec{P}) \circ \vec{r}^\circ \right) \bullet \vec{r}^\circ$ Abstandsvektor : d = Q – F Abstand : | d |	8.2. Hilfsebene senkrecht zur Geraden $(\vec{x} - \vec{Q}) \circ \vec{r}^\circ = 0$ $\vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{r}$ Schnittpunkt mit der Geraden liefert den Fußpunkt F. Abstandsvektor : d = Q – F Abstand : | d |	8.3. <u>Skalarprodukt:</u> n = (Q – P) x r d = n x r d Abstandsrichtung, aber nicht die richtige Länge <u>Skalarprodukt mit d^0 :</u> Abstand = (Q – P) d°	8.4. <u>Gleichungssystem:</u> n = (Q – P) x r d = n x r [r n d] = (Q – P) Lösung für d mal Länge von d ist der Abstand.
<u>Abstand paralleler Geraden</u> Berechnung des Fußpunktes von g_2 über Hilfsebene	8.5.3. Hilfsebene senkrecht zu den Geraden $n = r_1$ $(x - P_1) \circ r_1 = 0$ Schnittpunkt von g_2 mit Ebene: $(P_2 + t\,r_2 - P_1) \circ r_1 = 0$ $t_{F2} = \frac{(P_2 - P_1) \circ r_1}{\vert r_2 \circ r_1 \vert}$ Abstandsvektor : $d = P_1 - F_2$ Abstand : | d |	8.5.2. <u>Skalarprodukt:</u> Hilfsebene, in der die Geraden liegen $n = r_1 \times (P_2 - P_1)$ $d = n \times r_1$ d Abstandsrichtung, aber nicht die richtige Länge <u>Skalarprodukt mit d^0 :</u> Abstand = $(P_2 - P_1)$ d°	8.5.1. <u>Gleichungssystem:</u> $n = r_1 \times (P_2 - P_1)$ $d = n \times r_1$ $[r_1\ n\ d] = (P_2 - P_1)$ Lösung für d mal Länge von d ist der Abstand.

Diese Berechnungen finden in einer Ebene statt. Ein Punkt und eine Gerade und zwei parallele Geraden liegen in einer Ebene. Damit wird für die Abstandsbestimmung die Länge der Abstandsvektors d benötigt. Entweder über das Skalarprodukt oder als Verlängerungsfaktor für den Abstandsvektor d. Die Berechnung des Vektors n ist nur eine Hilfsgröße, um einen Vektor zu erhalten, der senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden ist.

<u>Abstand windschiefer Geraden</u> $n = r_1 \times r_2$ *(Richtungsvektoren der beiden Geraden)*

Berechnung über Fußpunkte $(P_2 + t\,r_2 - P_1 - s\,r_1) \circ r_1 = 0$ $(P_2 + t\,r_2 - P_1 - s\,r_1) \circ r_2 = 0$		8.4.1. <u>Skalarprodukt:</u> n Abstandsrichtung, aber nicht die richtige Länge Abstand = $(P_2 - P_1) \circ n^0$	8.4.2. <u>Gleichungssystem:</u> $[r_1\ r_2\ n] = (P_2 - P_1)$ Lösung für n mal Länge von n ist der Abstand.

Hier findet die Berechnung nicht in einer Ebene statt, da bei windschiefen Geraden der Abstand „zwischen“ den Geraden entsteht. Deshalb entspricht hier der senkrechte Abstandsvektor dem Normalenvektor n der beiden parallelen Ebenen. Der gesuchte Verlängerungsfaktor ist der für den Vektor n.

<u>Abstand Punkt Ebene</u> Fußpunkt nur über Lotgerade	$n = r_1 \times r_2$ *(Richtungsvektoren der Ebene)* 7.3. Hilfsgerade senkrecht zur Ebene $(\vec{x} - \vec{P}) \circ \vec{n} = 0$ <u>Lotgerade :</u> $\vec{x} = \vec{Q} + t\,\vec{n}$	7.1. und 7.2. n Abstandsrichtung, aber nicht die richtige Länge <u>Skalarprodukt mit n^0 :</u> Abstand = (Q – P) ○ n^0	7.4. <u>Gleichungssystem:</u> $[r_1\ r_2\ n] = (P_2 - P_1)$ Lösung für n mal Länge von n ist der Abstand.

Auch hier befindet sich der Abstand „zwischen“ dem Punkt und der Ebene. Damit ist die Richtung des Abstandsvektors die Richtung des Normalenvektors n. Der gesuchte Verlängerungsfaktor ist der für den Vektor n.

Die Berechnung über das Skalarprodukt hat immer den gleichen Hintergrund:
Den Differenzvektor des gegebenen Punktes und des Stützvektor des Objektes (Gerade oder Ebene) auf den <u>Einheitsvektor</u> des Abstandsvektors projizieren. Bei Ebenen und windschiefen Geraden ist das n, bei normalen Geraden ist das n x r.

© Dipl.-Math. Armin Richter