# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|
| **Variable** | **Variable**<br>Variablen sind „Veränderliche“, „Unbekannte“, „allgemeine Zahlen“, „Platzhalter“, „Leerstellen“.<br>- „Variable“ und „Veränderliche“ erinnern an Veränderungen, wie sie im Physikunterricht untersucht werden.<br>- Die anderen Ausdrücken stehen für verschiedene Aspekte des Gebrauchs von Variablen im Mathematikunterricht:<br>  - Gegenstandsaspekt, „Unbekannte“<br>  - Einsetzaspekt, „Platzhalter“, „Leerstelle“<br>  - Kalkülaspekt. „allgemeine Zahl“ | |
| | **Gegenstandsaspekt**<br>Physik: Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h. Es soll die Zeit bestimmt werden, in der dieses Auto 37 km zurücklegt.<br><br>(1) Womit muss man 100 km/h multiplizieren um 37 km zu erhalten<br>(2) Formel : ? * 100 km/h = 37 km<br>(auch ein Fragezeichen kann eine Unbekannte sein, was macht man dann aber, wenn es zwei Unbekannte gibt. Deshalb verwendet man für die Variablen Buchstaben.)<br>(3) x * 100km/ h = 37; Da es sich um eine Zeitgröße handelt, wird in der Physik eine solche Variable oft mit 't' bezeichnet, Die Bezeichnung einer Variablen spielt keine Rolle. | |
| | **Einsetzaspekt**<br>Eine solche Variable steht für eine zur Zeit noch unbekannte Zahl. Aus diesem Grund muss in dem Ausdruck folgender Grundsatz unbedingt gesichert sein:<br><br>Gleiche Variablenbezeichner müssen dem gleichen Wert entsprechen.<br><br>ACHTUNG!<br>Ein Bezeichner darf nur einem Wert entsprechen, das heißt aber nicht, dass ein anderer Bezeichner nicht auch diesem Wert entsprechen darf. | |
| <br>Treff Lernen<br>Christina Strauch | **Einsetzaspekt**<br>Variable, die außerdem noch eine Zahl vor der Variablen zu stehen haben sind immer als Produkt der Zahl mit der Variablen zu verstehen. Aus diesem Grund können zwischen der Zahl und der Variablen das Multiplikationszeichen entfallen, ebenso zwischen verschiedenen Variablen. | |

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|
| Variable | | |

## Arten von Variablen

### Freie Variable

In einer Gleichung $2x + 7 = 15$ kann man für x jeden beliebigen Wert einsetzen und erhält hinterher eine **Aussage**, die wahr oder falsch sein kann. Diese Art der Verwendung von Variablen tritt z.B beim Durchführen von Proben auf. Es gibt eine Gleichung, von der man glaubt, man hat den Wert gefunden, der dieser Gleichung genügt. Durch die Probe möchte man die Bestätigung erhalten: Ist die Zahl richtig oder falsch, kommt also beim Einsetzen eine wahre oder eine falsche Aussage heraus.

Die Lösung der obigen Gleichung ist 4, man kann aber auch $x = 5$ einsetzen, dann erhält man eben eine falsche Aussage.

### Gebundene Variable

Im Unterschied zu oben hat man bei:

**„gesucht ist ein x, das die Gleichung $2x + 7 = 15$ erfüllt„**

Die Variable steht hier als Symbol für einen ganz speziellen Wert, der aber unbekannt ist. Es ist nicht jeder beliebiger Wert für x einsetzbar, sondern ein (oder mehrere) Werte gesucht, die einer vorgegebenen Bedingung genügen. In viele Fällen weiß man nicht, ob es einen mehrere oder gar keinen Wert gibt, der diese Bedingung erfüllt.

> Eine Zusammenstellung von Zahlen und Variablen mittels Rechenzeichen, die für den Fall, dass die Variablen mit Zahlen belegt werden, sinnvolle mathematische Ausdrücke entstehen lässt bezeichnet man als **Term**.

Die Verbindung von Zahlen und Variablen kann nicht nur durch Additions- und Subtraktionszeichen hergestellt werden, sondern genauso durch Wurzeln Bruchstiche, Potenzen Funktionsausdrücken und anderem.
Das entscheidende Kriterium ist, dass sich beim Einsetzen von Zahlen für die Variablen berechenbare Ausdrücke ergeben.
Deshalb ist $2x^2 + 7 – z$ ein Term, $3y +$ dagegen keiner und auch $\sqrt[3]{\ } = a$ ist kein Term. Auch $3x – 4z =$ ist kein Term, obwohl links von Gleichheitszeichen ein korrekter Ausdruck steht, aber nicht, welchem Wert denn dieser Ausdruck gleich sein soll. Der erste Ausdruck $2x^2 + 7 – z$ ist ein Term. Er enthält kein Gleichheitszeichen und es können für x und z beliebige Zahlen eingesetzt werden, so dass sich der Ausdruck nach mathematischen Regeln bearbeiten lässt.

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|
| **Rechnen mit Termen** | **Terme, Aussagen und Gleichungen**<br><br>**Term**<br><br>Unter einem **Term** versteht man in der Mathematik jede sinnvolle Kombination aus<br>• Zahlen<br>• Variablen<br>• Vor- und Rechenzeichen bzw. Rechenvorschriften und<br>• Klammern beliebiger Form.<br>Auch eine einzelne Zahl oder eine einzelne Variable wird als Term bezeichnet.<br><br>Kein Term dagegen ist die Zeichenkombination ‚ $3 + (\,) -$ ', da sie mathematisch keinen Sinn ergibt.<br>Ebenfalls kein Term ist ‚ $3+ x = 7- x$ '; die ist eine Gleichung; allerdings stehen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Terme.<br>Terme beschreiben in der Regel den Zusammenhang zwischen zwei oder mehreren Größen, d.h. meist stehen die einzelnen Variablen in einem Term für bestimmte Größen und der Term beschreibt, wie eine weitere Größe aus diesen einzelnen Größen berechnet werden kann.<br>Beispielsweise stehen in dem Term ‚ $2 \cdot (a + b)$ ' die beiden Variablen ‚a' und ‚b' für die Seitenlängen eines Rechtecks, der Term ‚ $2 \cdot (a + b)$ ' beschreibt, wie der Umfang eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b aus diesen beiden Seitenlängen berechnet werden kann. | $2 \cdot (a + b)$ ,<br>$R \cdot I$<br>$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$<br>$4 \cdot (3+ x)$<br>$5$ ,<br>$x^2+ 2 \cdot x + 4$<br>$a^2 + b^2$<br>$[3 + x] \cdot (y + 2)$ |
| | **Wert eines Terms**<br><br>Belegt man die Variablen eines Term mit Werten, d.h. setzt man statt der Variablen konkrete Werte ein, so wird der Term in einen Wert überführt, den man konkret berechnen kann und den man als den **Wert des Terms** bezeichnet.<br>Dieser Wert des Terms gibt dann den Wert der durch den Term beschriebenen Größe an, wenn die Variablen die eingesetzten Werte haben. | *$T(x) = x^2 - 3x$ ;*<br>*Wert des Terms für $x=2$:*<br>*$T(2) = 4 - 6$* |
| <br>Treff Lernen<br>Christina Strauch | Möchte man in unserem Beispiel den Umfang eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3cm und 4cm berechnen, so belegt man im Term ‚ $2 \cdot (a + b)$ ' die Variable ‚a' mit dem Wert ‚3cm' und die Variable ‚b' mit dem Wert ‚4cm' und erhält ‚ $2 \cdot (3cm+ 4cm)$ '. Als Wert für den Umfang des Terms erhält man dann durch Berechnung des Termwertes ‚ $2 \cdot (3cm+ 4cm) = 2 \cdot 7cm= 14cm$ ' den Wert 14cm. | Treten in einem Term verschiedene Variablen auf, dann dürfen diese mit verschiedenen oder mit gleichen Zahlen belegt werden. Tritt aber dieselbe Variable mehrmals in einem Term auf, so muss sie jeweils mit derselben Zahl belegt werden. |

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|
| **Rechnen mit Termen** | | |

## Gleichartige Terme

Zwei Terme sind **gleichartig**, wenn sie aus
- exakt den gleichen Variablen oder Klammerausdrücken mit
- exakt den gleichen jeweiligen Exponenten für die Variablen bzw. Klammerausdrücke bestehen.

- Das Vorzeichen,
- der Zahlenfaktor (Koeffizient) und
- die Reihenfolge der Variablen oder Klammerausdrücke

spielen für die Gleichartigkeit zweier Terme überhaupt keine Rolle.

Stimmt bei zwei Termen auch nur eine Variable, ein Rechenzeichen in einem Klammerausdruck oder ein Exponent nicht überein, so sind die beiden Terme **verschiedenartig**.

Gleichartige Terme sind
- $2a^3$ und $-\frac{1}{2} a^3$
- $2x^2y$ und $-0{,}3x^2y$
- $-(x + y)^4$ und $75\,(x + y)^4$
- $5$ und $-0{,}25$ sowie
- $5{,}2z^4x^2$ und $3{,}8x^2z^4$ .

Verschiedenartige Terme sind
- $a^3$ und $a^2$ ;
- $3x$ und $3$ ;
- $(x + y)$ und $(x - y)$ sowie
- $5xy$ und $5x^2y$ .

## Addition und Subtraktion von Termen

**Grundgesetz:**
Man darf nur gleichartige Terme addieren oder subtrahieren.

$4a^2 + 5a^2b$ kann nicht addiert werden

$3\,a^2b^4 - 2\,b^4a^2$ kann subtrahiert werden.

Bruchterme darf man nur addieren, wenn sie gleichen Nenner haben.

$\frac{4}{a^2} - \frac{3}{a^2}$ kann addiert werden

Verschiedenartige Terme kann und darf man niemals addieren oder subtrahieren. Kommen in einer Summe oder Differenz verschiedenartige Terme vor, dann können und dürfen immer nur gleichartige Terme addiert der subtrahiert werden; verschiedenartige Terme müssen als Summe oder Differenz stehen bleiben.

$x + 3x + 7x - 4x = (1 + 3 + 7 - 4)x = 7x$ (lies x als 1x).
$x^3 - 7x + 4x = x^3 - 3x$ (Weitere Vereinfachung nicht möglich)
$2x - 3 + 8x - 5 - x + 1 = 2x + 8x - x - 3 - 5 + 1 = 9x - 7$
(Im ersten Schritt das jeweils davor stehende Vorzeichen mitnehmen! Lies -x als -1x)
$2x + 3a^2x - 5ax^2 - 5ax - 6ax^2 - 6a^2x = 2x - 5ax - 3a^2x - 11ax^2$
(Es empfiehlt sich, während des Zusammenfassens die schon behandelten Glieder z. B. mit einem Punkt unter dem Ausdruck zu markieren)

Beim Addieren und Subtrahieren von Termen werden nur die Koeffizienten ( = Zahlen vor den Variablen) addiert bzw. Subtrahiert, die Variablen und ihre Potenzen bleiben unverändert.

$4\,a^2b + 5\,a^2b = 9\,a^2b$

Steht am Beginn eines Ausdrucks oder am Beginn eines Klammerausdrucks kein Vorzeichen, ist immer ein Plus gemeint.

$+\,2a + (+\,5a - 3) - (-\,7a + 5) = +\,2a + 5a - 3 + 7a - 5$

Steht an einer Variablen keine Hochzahl, ist immer die Zahl 1 gemeint und nicht die 0 !

$2a = 2a^1$  $5ab^2 = 5a^1b^2$

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
| --- | --- | --- |
| **Rechnen mit Termen** | | |

## Multiplikation von Termen

**Gesetze und Regeln:**

Steht an einer Variablen keine Hochzahl, ist immer die Zahl 1 gemeint und nicht die 0 !

Grundgesetz:

- Die Multiplikation kann immer durchgeführt werden
- Die Koeffizienten der Terme werden multipliziert
- Bei gleichen Variablen werden die Hochzahlen addiert
- Werden von einem Term neue Variable übernommen schreibt man diese Variablen mit ihren Hochzahlen ohne Multiplikationszeichen aneinander.
- Bei der Multiplikation von Klammerausdrücken ist jeder Term der einen Klammer mit jedem Term der anderen Klammer zu multiplizieren. Dabei sind die Vorzeichen entsprechend den Vorzeichenregeln mit zu multiplizieren

**Musterbeispiele:**

$2a = 2a^1$ $\quad$ $5ab^2 = 5a^1b^2$

$4a^2b \cdot 5ab^2 = 4 \cdot 5 \cdot a^{2+1} \cdot b^{1+2} = 20\,a^3b^3$

$4a^2b \bullet 4b^3cd^2 = 4 \bullet 4\;\; a^2\, b^{1+2}\, c\, d^2 = 16\, a^2b^3cd^2$

Die Verknüpfung zwischen den Variablen und dem Koeffizienten mit den Variablen ist immer als Produkt zu sehen.

$(-4a + b) \cdot (3 - 2a) = -12a + 8a^2 + 3b - 2ab$

Beispiele:

(1) $7ab * 3b^2c = 21\, a\, b^2c$

(2) $3\, xy^2 * 4x^2y^3z = 12x^3y^5z$

## Division von Termen

**Gesetze und Regeln:**

Grundgesetz:

- Die Division kann durchgeführt werden, wenn die Variablen gleich sind
- Die Koeffizienten der Terme werden dividiert
- Bei gleichen Variablen werden die Hochzahlen subtrahiert
- Bei der Division von Klammerausdrücken ist nach dem Verfahren der Polynomdivision zu verfahren.

**Musterbeispiele:**

$20a^2b^2 : 5ab^2 = (20:5)\, a^{2-1}\, b^{2-2} = 4\, a^1\, b^0 = 4\, a^1 = 4a$

Durch Division kann eine Hochzahl 0 entstehen. Jede Variable mit einer Hochzahl 0 kann entfallen, sie hat keine Bedeutung mehr.

**Jede Zahl oder Variable mit einer Hochzahl 0 hat den Wert 1.**

## Termnamen

Um explizit auszudrücken, welche Größe mit Hilfe eines Terms berechnet werden kann und aus welchen Größen sie berechnet wird, benennt man häufig einen Term durch ein aussagekräftiges Symbol, den sogenannten **Termnamen**, welcher abkürzend für diesen Term steht.

Als Beispiel nehmen wir den bekannten Term $2 \cdot (a + b)$, den wir dann sinnvollerweise mit Hilfe eines Gleichheitszeichens mit $u(a\,;b)$ benennen: Der Termname im Beispiel wird gesprochen: „u von a und b."

- Vor der Klammer steht die Variable für die Größe, die mit Hilfe des Terms berechnet wird (hier ‚u' für den Umfang des Rechtecks),
- in der Klammer stehen der oder die Variablen für die Größen, die der konkrete Term enthält (hier ‚a' und ‚b' für die Seitenlängen des Rechtecks).

Beachte, dass die Klammer in $u(a\,;\,b)$ keine Rechenklammer ist.

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

## Klammern Ausmultiplizieren

### Rechenregeln mit Klammern

### Ausmultiplizieren

**+ a •(  )**

Wenn ein Klammerausdruck, in dem ein Produkt steht, mit einem Faktor multipliziert werden soll, kann die Klammer weggelassen werden und die einzelnen Elemente multipliziert werden. Vorzeichen sind aber zu beachten!

Wenn ein Klammerausdruck, indem eine Summe/Differenz steht mit einem Faktor multipliziert werden soll, ist jeder einzelne Summand der Klammer mit diesem Ausdruck zu multiplizieren. Koeffizienten werden multipliziert, wie beim Rechnen mit Zahlen üblich, Variable werden multipliziert, indem sie als Faktoren hintereinander geschrieben werden und die Anzahl als Potenz angegeben wird (s.oben)

Steht in der Klammer – eine Zahl, eine Variable oder ein Produkt
– eine Summe, alle Vorzeichen/Rechenzeichen der Summe bleiben erhalten

Zahl Variable Produkt

Summe

**$+ a \cdot ( b \cdot c ) = a \cdot b \cdot c$**

**$+ a \cdot ( b + c ) = a \cdot b + a \cdot c$**

**$+ a \cdot ( - b + c ) = - a \cdot b + a \cdot c$**

**$+ a \cdot ( b - c ) = a \cdot b - a \cdot c$**

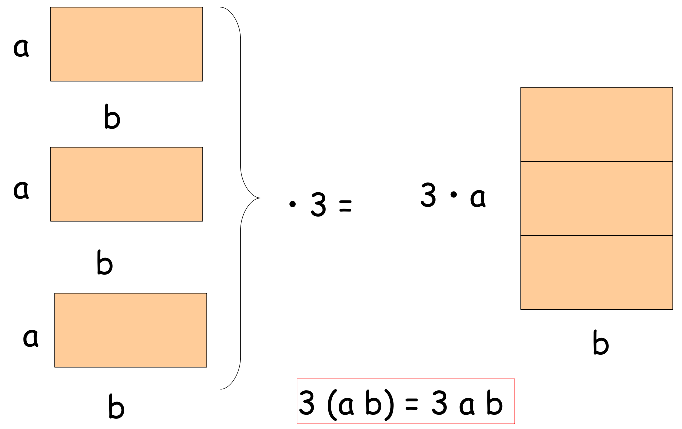
Assoziativgesetz Klammer weglassen

$(8) \cdot 2$
$(8x) \cdot 2 + t$

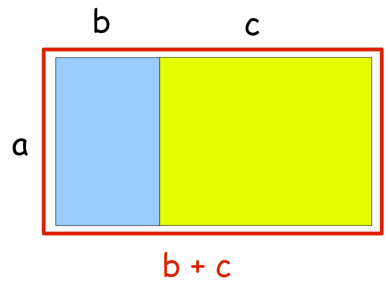
$(8x \cdot x) \cdot 2t$
$(8x : x) \cdot 2t$

Distributivgesetz Klammern auflösen

$(8x + y) \cdot 2t$
$(8x - y) \cdot 2t$
$1x + (8 + y) \cdot a$




$3\,(a\,b) = 3\,a\,b$




$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$

Beispiele (Zahl, Variable, Produkt):
(1) $7ab * (3b^2c * 2c^2) = 7ab * 3b^2c * 2c^2$
$= 7 * 3 * 2 * ab * b^2c * c^2$
$= 42\,a\,b^3c^3$

Beispiele (Summe) :
(1) $17 + 3(a - b) = 17 + 3a - 3b$
(2) $7ab * (3b^2c + 2dca) = 21\,a\,b^2c + 14a^2bcd$
(3) $3\,xy^2 * (4x^2y^3z - 5axy) = 12x^3y^5z - 15ax^2y^3$



Treff Lernen CHRISTINA STRAUCH

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

## Klammern Ausmultiplizieren

**– a • (        )**

Es gelten die gleichen Regeln wie im vorherigen Fall. Nur die Vorzeichen/ Rechenzeichen in der Summer werden alle vertauscht. Aus allen Pluszeichen werden Minuszeichen und aus allen Minuszeichen werden Pluszeichen.
Die Vorzeichenänderung entspricht den Vorzeichenregeln der Multiplikation.

Steht in der Klammer
– eine Zahl, eine Variable oder ein Produkt, so wird das Minuszeichen übernommen
– eine Summe, alle Vorzeichen/Rechenzeichen der Summe vertauschen sich

Zahl Variable Produkt

**– a • ( b • c ) = – a • b • c**

Summe

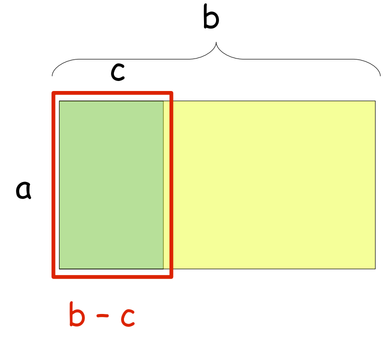
**– a • ( b + c ) = – a • b – a • c**

**– a • ( – b + c ) = + a • b – a • c**

**– a • (  b – c ) = – a • b +  a • c**

– * – = +    |    – * + = –

2a + ( 5a – 3) – ( –7a +  5 ) = 2a + 5a – 3 + 7a – 5




a (b - c) =  a b - a c

Beispiele (Produkt):
(3) (-2ax)* $3x^2ya$  = (–1)* 2ax * $3x^2ya$ = – $6a^3 x^3 y$

Beispiele (Summe):
(1) 17 - 3(-a - 4b) = 17 + 3a + 12b
(2) 17 - 3(a - b) = 17 - 3a + 3b
(3) 17 - 3a(a + 2b) = 17 - 3a2 – 6ab
(4) (-2ax)*($3x^2ya$ + aby – 4xa) = – $6a^2x^3y$ – $2a^2bxy$ + $8a^2x^2$



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

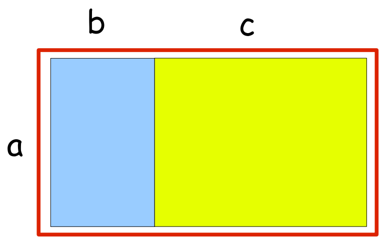
| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

**Summen Faktorisieren**

## Ausklammern

**$+ (a \cdot b + a \cdot c) = a(b + c)$**

Beim Ausklammern eines Faktors aus einer Summe oder Differenz handelt es sich genau um die Umkehrung des Vorhergehenden. Es ist die Umkehrung des Distributivgesetzes. Erkennt man in einer Summe, dass mehrere Ausdrücke einen gleichen **Faktor** (!!!) enthalten, dann kann man <u>diesen</u> Faktor für <u>diese</u> Summanden sichtbar machen und vor eine Klammer schreiben.




b + c

$ab + ac = a(b + c)$

**$- (a \cdot b + a \cdot c) = -a(b + c) = a(-b - c)$**

Ein Minuszeichen vor der Klammer kann stehenbleiben oder in die Klammer reingezogen werden, indem alle Vorzeichen/ Rechenzeichen in der Klammer vertauscht werden.

Beispiele:

(1) $25x^2y + 20xy – 10\,ab^2 + 8ab^2 – 12xy + 24\,x^2y$
$= 5*5x^2y + 4*5xy – 2*5\,ab^2 + 2*4ab^2 – 3*4xy + 4*6\,x^2y$
$= 5(5x^2y + 4xy – 2\,ab^2) + 4(2ab^2 – 3xy + 4\,x^2y)$

Aber es ist auch korrekt:
$= x^2y\,(5*5 +4*6) + xy\,(4*5 -3*4) – ab^2(2*5 -2*4)$

Welche Variante die sinnvollere ist entscheidet sich an der konkreten Aufgabenstellung. Die zweite Variante ist identisch mit der Zusammenfassung von Termen.

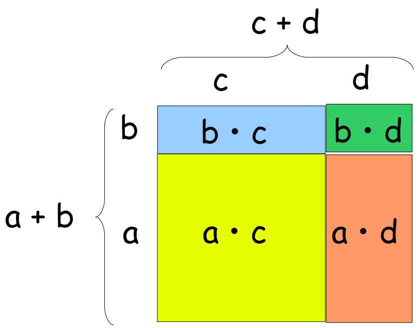
# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

## Summen Faktorisieren

### $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Bei einem Produkt von Klammern muss jedes Glied aus der ersten Klammer mit jedem Glied aus der zweiten Klammer multipliziert werden. Dabei sind die Vorzeichenregeln der Multiplikation zu beachten.




$ac - bc - ad + bd$

Steht vor den Klammern ein Minus, so setzt man zunächst beim Multiplizieren Klammern. Diese Art vermindert Vorzeichenfehler beim Rechnen, erst, wenn man sich sicher ist sollte man das Minuszeichen gleich mit berücksichtigen.

Beispiele:

↓ (-7) mit b und mit (-3)
**$(3a – 7) * (b - 3) = 3ab - 9a - 7b + 21$**
↑ 3a mit b und mit (-3)

$(3 - r - s)(r - s) = 3r - 3s \quad - r^2 + rs \quad - rs + s^2 \quad = 3r - 3s - r^2 + s^2$
3 mit r und -s |-r mit r und -s|-s mit r und -s

Beispiel: $5r - (3 - r)(-s + t) = 5r - (-3s + 3t + rs - rt) = 5r + 3s - 3t - rs + rt$

### $(a + b) \cdot (c + d) \cdot (e + f) \ldots.$

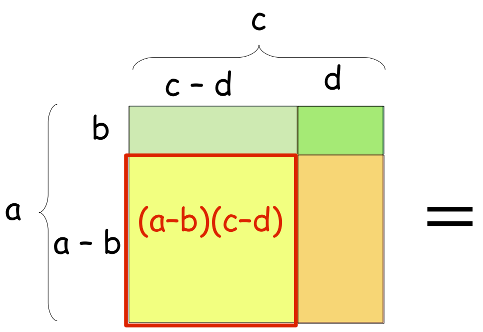
Sind in einem Produkt mehrere Klammerausdrücke vorhanden, so multipliziert man erst zwei Klammern und lässt die anderen unberührt. In einem nächsten Schritt nimmt man sich wieder zwei Klammern zum Multiplizieren.
**Regel für den Anfang sollte sein:**
Lieber eine Zeile mehr schreiben, als mehrere Schritte im Kopf rechen.
Vorzeichen sind eine gefährliche Fehlerquelle!

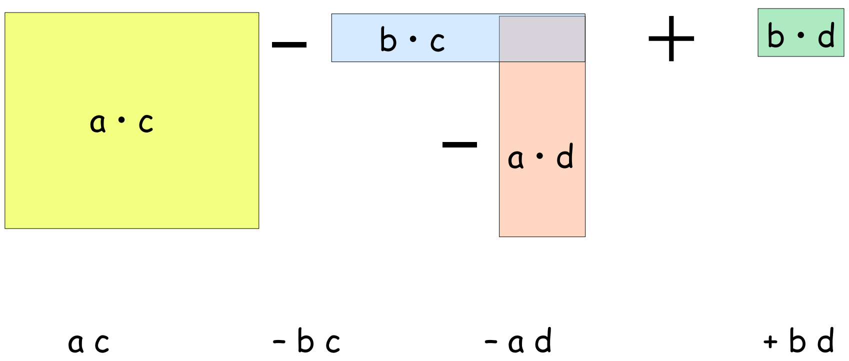
Beispiel:
$(x-1)(2x-1)(x+x^2) = (2x^2-x-2x+1)(x+x^2) = (2x^2-3x+1)(x+x2) =$
$2x^3 + 2x^4 - 3x^2 - 3x^3 + x + x^2 = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + x$

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|
| **Summen Faktorisieren** | **$(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$** | |

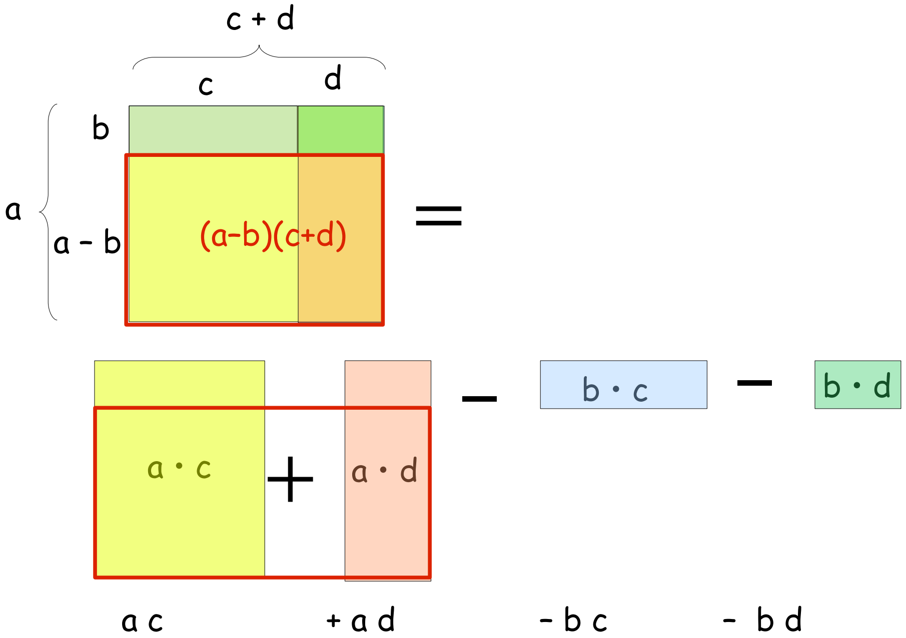
Bei einem Produkt von Klammern muss jedes Glied aus der ersten Klammer mit jedem Glied aus der zweiten Klammer multipliziert werden. Dabei sind die Vorzeichenregeln der Multiplikation zu beachten.




Durch die beiden Rechtecke b • c und a •d wird die Fläche b• d zweimal subtrahiert, deshalb muss sie einmal wieder addiert werden.

**Mathematik – Intensivkurs: Terme**

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|
| **Summen Faktorisieren** | **$(a - b) \cdot (c + d) = ac + ad - bc - bd$**<br>Bei einem Produkt von Klammern muss jedes Glied aus der ersten Klammer mit jedem Glied aus der zweiten Klammer multipliziert werden. Dabei sind die Vorzeichenregeln der Multiplikation zu beachten.<br><br>Durch die beiden Rechtecke a • c und a • d wird die Fläche größer. Beim Ersten Rechteck muss b • c subtrahiert werden und beim zweiten Rechteck b • d | |

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

## Rechnen mit Termen

### Auflösen geschachtelter Klammern

Sind in Klammerausdrücken wieder Klammerausdrücke vorhanden, spricht man von geschachtelten Klammern. Solche Ausdrücke müssen immer von innen (der innersten Klammer) nach außen aufgelöst werden. Die Klammern befinden sich auf verschiedenen Hierarchieebenen und es können nur gleiche Hierarchieebenen zusammengefasst werden.

$2b - [5a^2 - (2a^2 - b)] = 2b - [5a^2 - 2a^2 + b] = 2b - [3a^2 + b] = b – 3a^2$

Es gibt keine Vorschrift, dass geschachtelte Klammern verschiedene Formen haben müssen. Man muss damit rechnen, dass alle Klammern runde Klammern sind und dass man zunächst die Hierarchieebenen ermitteln muss.

Beispiel: $(x-a^2) *(ab-3b)-7((ax^2-ab)+23(x^2-8))$

3. Hierarchieebene: $23(x^2-8)$
2. Hierarchieebene: $7((ax^2-ab)+ \quad )$
1. Hierarchieebene: $(x-a^2) *(ab-3b)–$

3 Hierarchieebene: $23(x^2-8) = 23x^2 - 184$
2. Hierarchieebene: $7(ax^2-ab+23x^2-184) = 7ax^2 -7ab +161 x^2 - 1288$
und $(x-a^2) *(ab-3b) = abx -3bx -a^3b -3a^2b$
1. Hierarchieebene: Zusammenfassung der beiden Ausdrücke.

### Klammern mit Potenzen

Da alle Ausdrücke mit Potenzen höchste Priorität besitzen, müssen diese Klammern in ihrer Hierarchiestufe zuerst berechnet werden. Da Potenzen definiert sind als mehrfache Multiplikation mit dem gleichen Faktor, entspricht das Vorgehen genau der Multiplikation von Klammern mit dem Unterschied, dass die zu multiplizierenden Klammern alle gleich sind.
Für Potenzen von zweigliedrigen Ausdrücken gibt es einfache und allgemein bekannte Formeln, die bei höheren Potenzen die Arbeit etwas erleichtern.

Beispiel:
$(7x-3)^2 = (7x-3) * (7x-3)$

### Aussagen

Unter einer **Aussage** verstehen wir zwei Terme, von denen keiner eine Variable enthalten darf (sogenannte Zahlenterme), die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind:
LinkerZahlenterm = RechterZahlenterm
Von einer Aussage kann man immer sagen, ob sie wahr (w) oder falsch (f) ist.

**Beispiele:**
**a)** 6× 3- 4 =14 (w) ; dies ist eine wahre Aussage
**b)** 3×(-2) + 4 = 4×(-2) - 1 (f) ; dies ist eine falsche Aussage
**c)** 10 =10 (w) ; dies ist eine wahre Aussage
**d)** 4 = 3 (f) ; dies ist eine falsche Aussage

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

## Gleichungen

### Gleichungen

Unter einer **Gleichung** verstehen wir zwei Terme, von denen mindestens einer eine Variable enthalten muss, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind:

LinkerTerm = RechterTerm

Von einer Gleichung kann man nicht sagen, ob sie wahr oder falsch ist.

Belegt man die Variable in einer Gleichung mit einer Zahl, d.h. schreibt man an jede Stelle, an der die Variable in der Gleichung vorkommt, stattdessen die Zahl, so wird dadurch die Gleichung in eine Aussage überführt. Dieses Vorgehen wird angewandt beim Durchführen einer Probe, ob die Lösung der Gleichung auch zu einer **wahren Aussage** führt !

Eine Gleichung drückt aus, dass zwei Größen oder Werte gleich sein sollen. Man spricht deshalb von zwei Seiten einer Gleichung, einer linken und einer rechten Seite. Diese beiden Seiten sind durch ein Gleichheitszeichen verbunden.
Ihrem Wesen nach unterscheidet man drei Arten von Gleichungen:

1. identische Gleichungen: $8 – 5 = 4 – 1$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Bestimmungsgleichungen: $3x – 6 = 38$
3. Funktionsgleichungen: $y = 5x - 2$

### Identische Gleichungen

**Identische Gleichungen** ausschließlich mit Zahlen machen nicht sehr viel Sinn, da sie entweder immer richtig sind, oder immer falsch. Sie finden Anwendung bei Proben von Gleichungen mit Variablen, wenn zu prüfen ist, ob der ermittelte Wert für die Variablen auch tatsächlich die Ausgangsgleichung erfüllt.
Identische Gleichungen mit Termen treten sehr oft auf und besagen, dass die Gleichheit immer besteht, gleichgültig, welche Werte die einzelnen Variablen besitzen.

### Musterbeispiele

**Beispiele:**

**a)** $6x - 4 = 14$ ist eine Gleichung
**b)** $3b + 4 = 4b - 1$ ist eine Gleichung
**c)** $5(z + 2) = 10 + 5z$ ist eine Gleichung
**d)** $3y + 4 = 3(y + 1)$ ist eine Gleichung

**Beispiele:**

**a)** Die Gleichung $6x - 4 = 14$ wird durch Belegen der Variablen x mit der Zahl 3 in die Aussage $6 \times 3 - 4 = 14$ überführt; diese Aussage ist wahr.
**b)** Die Gleichung $3b + 4 = 4b - 1$ wird durch Belegen der Variablen b mit der Zahl - 2 in die Aussage $3 \times (-2) + 4 = 4 \times (-2) - 1$ überführt; diese Aussage ist falsch.
**c)** Die Gleichung $5(z + 2) = 10 + 5z$ wird durch Belegen der Variablen z mit einer beliebigen Zahl immer in eine wahre Aussage überführt.
**d)** Die Gleichung $3y + 4 = 3(y + 1)$ wird durch Belegen der Variablen y mit einer beliebigen Zahl immer in eine falsche Aussage überführt.

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

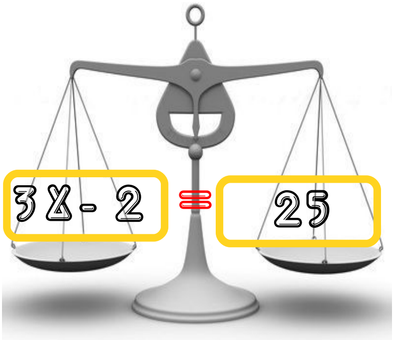
| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

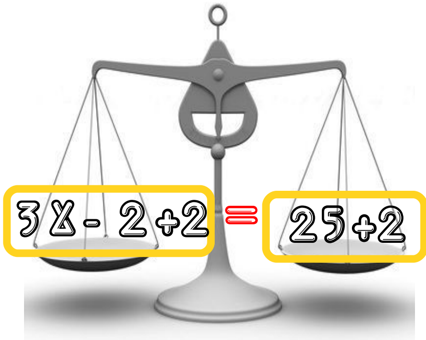
**Gleichungen**

### Bestimmungsgleichungen

**Bestimmungsgleichungen** besitzen eine unbekannte Größe, deren Wert durch die vorgegebene Gleichheit definiert wird. Die beiden Seiten der Gleichung stellen Bedingungen dar, den der gesuchte Wert gerecht werden muss. Mit einer Gleichung kann immer nur eine Variable eindeutig bestimmt werden. Es ist auch möglich, dass eine solche Gleichung keine Lösung hat.

Damit eine Waage im Gleichgewicht bleibt, muss man auf beiden Seiten gleich viele Gewichte hinzulegen oder wegnehmen.




### Funktionsgleichungen

In **Funktionsgleichungen** können zwei oder mehr Variable auftreten, bei denen der Wert einer Variablen durch die Werte der anderen Variablen festgelegt wird. y= 3x-5 weist jedem Wert der Variablen x eindeutig einen einen Wert der Variablen y zu. z = $3x^2y+4xy-7y^2$ weist jedem Wertepaar (x,y)
eindeutig einen Wert z zu. x und y stehen in keiner Beziehung zueinander.

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

## Gleichungen

### Grundmenge G

Die Menge aller Zahlen, die einem für die Belegung der Variablen einer Gleichung zur Verfügung stehen, bezeichnet man als die **Grundmenge G** einer Gleichung. Soll die Grundmenge einer Gleichung eine andere Zahlenmenge als die Menge der bisher bekannten Zahlen sein, so muss dies ausdrücklich angegeben werden.

**Beispiele:**

**a)** $6x - 4 = 14$ ; $G = \mathbb{Q}$

**b)** $3b + 4 = 4b - 1$ ; $G = \mathbb{N}$

**c)** $5(z + 2) = 10 + 5z$ ; $G = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

**d)** $3y + 4 = 3(y + 1)$ ; $G = \mathbb{Q}$

**e)** $t^2 - 4 = 0$ ; $G = \mathbb{Z}$

### Definitionsmenge D

Die Menge aller Zahlen aus der Grundmenge, mit der man die Variable einer Gleichung belegen kann, ohne dass sich dadurch ein nicht erlaubter Zahlenterm ergibt, nennt man die **Definitionsmenge D** einer Gleichung.

Ein nicht erlaubter Zahlenterm ist z.B. ein solcher, in dem an irgendeiner Stelle durch 0 dividiert wird; es gibt jedoch auch andere nicht erlaubte Zahlenterme.

### Lösungsmenge L

Jede Zahl der Definitionsmenge, die eine Gleichung beim Belegen der Variablen in eine wahre Aussage überführt, nennt man eine **Lösung** der Gleichung.
Die Menge aller Zahlen aus der Definitionsmenge, die die Gleichung beim Belegen der Variablen in eine wahre Aussage überführen, nennt man die **Lösungsmenge L** einer Gleichung.

**Beispiele:**

**a)** $6x - 4 = 14$ ; $G = \mathbb{Q}$ ; D= G ;
$L = \{3\}$, denn $6 \times 3 - 4 = 14$ (w)

**b)** $3b + 4 = 4b - 1$ ; $G = \mathbb{N}$ ; D= G ;
$L = \{5\}$, denn $3 \times 5 + 4 = 4 \times 5 - 1$ (w)

**c)** $5(z + 2) = 10 + 5z$ ; $G = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ ; D= G ;
L = G (Gleichung ist immer wahr)
(wenn die Grundmenge eingeschränkt ist, kann die Lösungsmenge nicht größer sein, z=7 ist damit keine Lösung, da 7 nicht in der Grundmenge enthalten ist !)

**d)** $3y + 4 = 3(y + 1)$ ; $G = \mathbb{Q}$ ; D= G ;
$L = \{\ \}$ (Lösungsmenge leer)

**e)** $t^2 - 4 = 0$ ; $G = \mathbb{Z}$ ; D = G ;
$L = \{-2 ; 2\}$, denn $2^2 - 4 = 0$(w) und $(-2)^2 - 4 = 0$ (w)

### Äquivalente Terme

Zwei Terme T1(x) und T2(x), die bei jeder möglichen Belegung der Variablen x mit Zahlen aus der Grundmenge G jeweils den gleichen Wert annehmen, heißen **äquivalent** (gleichwertig).
Es gilt: T1(x) = T2(x).

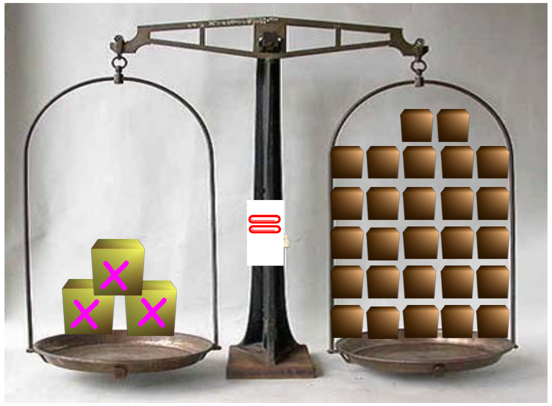
Umformungen, die nach den gültigen Rechengesetzen (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Klammerregeln) erlaubt sind, führen einen Term in einen äquivalenten Term über. Solche Umformungen heißen **Äquivalenzumformungen**.

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

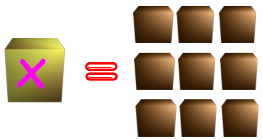
| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

## Gleichungen

### Äquivalenzumformungen



Wenn die Waage im Gleichgewicht sein soll, dann ist das nur möglich, wenn 1x so schwer ist, wie 9 Einheiten



Da man größeren Gleichungen das Ergebnis nicht ansehen kann sind auf beiden Gleichungsseiten Umformungen durchzuführen, die die Waage nicht aus dem Gleichgewicht bringen. Solche Umformungen heißen **Äquivalenzumformungen**, das sie die Lösungsmenge nicht beeinflussen.

Wird eine Gleichung durch eine Umformung in eine – i.A. anders aussehende – äquivalente Gleichung umgeformt, dann heißt eine solche Umformung **Äquivalenzumformung**.
Äquivalenzumformungen einer Gleichung sind insbesondere

- das ***Vertauschen der beiden Seiten*** der Gleichung
- das ***regelgerechte Termumformen*** einer der beiden Seiten der Gleichung (Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz, Klammerregeln, .....)
- das ***Addieren der gleichen Zahl oder des gleichen Terms*** auf beiden Seiten der Gleichung
- das ***Subtrahieren der gleichen Zahl oder des gleichen Terms*** auf beiden Seiten der Gleichung
- das ***Multiplizieren*** der beiden Seiten der Gleichung ***mit der gleichen, von ‚0' verschiedenen Zahl bzw. mit dem gleichen Term, der beim Belegen der Variablen niemals den Wert ‚0' haben kann.***
- das ***Dividieren*** der beiden Seiten der Gleichung ***durch die gleiche gleiche, von ‚0' verschiedene Zahl bzw. durch den gleichen Term, der beim Belegen der Variablen niemals den Wert ‚0' haben kann.***

Das Durchführen einer Äquivalenzumformung verdeutlicht man durch einen vertikalen Strich hinter der Gleichung und der Angabe der Operation, die man durchführt.

**Beispiele:**

a) $6x - 4 = 14 \quad | +4$
$\Leftrightarrow \quad 6x = 18$

b) $3b + 4 = 4b - 1 \ | -3b \ | +5$
$\Leftrightarrow \quad 5 = b$

c) $5(z + 2) = 10 + 5z \quad | - 5z$
$\Leftrightarrow \quad 10 = 10$



Treff Lernen
Christina Strauch

| Mathematik – Intensivkurs: Terme | | |
|---|---|---|
| **Thema** | **Gesetze und Regeln** | **Musterbeispiele** |
| **Gleichungen**<br><br> | Beachte: Es darf nicht nur mit Zahlen, sondern auch mit Ausdrücken addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden.<br><br>Schrittfolge zur Bestimmung der Lösung<br>(1) Auflösen vorhandener Klammern<br>(2) Auf beiden Seiten die Terme zusammenfassen von Gliedern mit Variablen und Gliedern ohne Variablen<br>(3) Forme so um, dass auf einer Seite nur Ausdrücke mit der Variablen stehen und auf der anderen Seite Ausdrücke ohne Variable und fasse die Seiten nochmals zusammen<br>(4) Dividiere die Gleichung durch den Koeffizienten, der vor der Variablen steht, damit erhält man die Lösung.<br>(5) Setze den erhaltenen Wert in der Ausgangsgleichung (!) ein. Es müssen beide Seiten den gleichen Wert liefern. | Dazu gehört das Auflösen von Klammern (Ausmultiplizieren und/oder Minusklammern) und das Zusammenfassen gleichartiger Summanden (Zahlen und Variablen):<br><br>$5\cdot(x-2) = 7 + 3$ \| Ausmultiplizieren bzw. Ausrechnen<br>$5x - 10 = 10$<br><br>① Dasselbe mit dem zweiten Beispiel:<br><br>$4(y-5) - 2y + 8 = 5(-3y + 1)$ \| Ausmultiplizieren auf beiden Seiten<br>$4y - 20 - 2y + 8 = -15y + 5$ \| Zusammenfassen von Zahlen und Variablen (Umsortieren, Anwendung des Kommutativgesetzes)<br>$4y - 2y - 20 + 8 = -15y + 5$ \| Ausrechnen<br>$2y - 12 = -15y + 5$<br><br>Bei der Gleichung 5x – 10 = 10 stört zunächst das "– 10" auf der linken Seite. Ein Minus von 10 kann durch ein Plus von 10 beseitigt werden. Vorsicht: Die Gleichung stimmt nur dann weiterhin, wenn man auf beiden Seiten dasselbe verändert:<br><br>$5x - 10 = 10$ \| Addieren von 10 ②<br>$5x - 10 + 10 = 10 + 10$ \| Ausrechnen<br>$5x = 20$<br><br>Ist dieser Koeffizient negativ muß auch durch das Minuszeichen dividiert werden. Ist der Koeffizient ein Bruch, ist die gesamte Gleichung mit dem Kehrbruch zu multiplizieren. das Ergebnis dieser Operation muss immer sein: x = so dass vor dem x keine Zahl mehr steht.<br><br>$5x = 20$ \| Teilen durch 5 ③<br>$5x/5 = 20/5$ \| Ausrechnen<br>$x = 4$<br><br>Der Zwischenschritt vor dem Ausrechnen kann natürlich entfallen, denn man weiß, daß 10+10 gleich 20 ist.<br><br>Die jeweilige Umformung wird rechts von der Gleichung durch den entsprechenden mathematischen Ausdruck vermerkt. Die korrekte Lösung der Gleichung sieht so aus:<br>$5(x-2) = 7 + 3$ \| V (Vereinfachen)<br>$5x - 10 = 10$ \| + 10<br>$5x = 20$ \| :5<br>$x = 4$ |

# Mathematatik – Intensivkurs: Terme

| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|

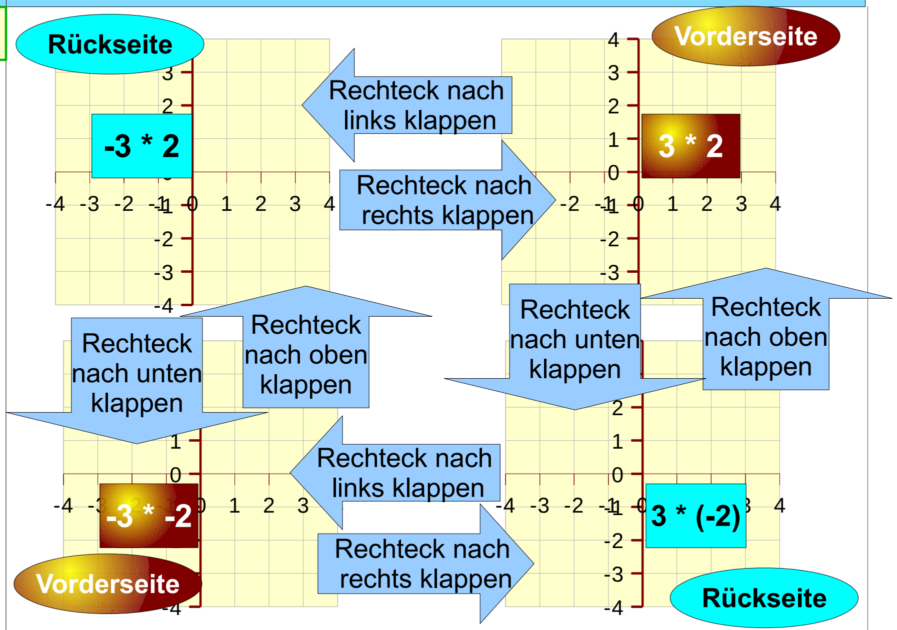
## Rechnen mit Termen

### Vorzeichenregeln

Das Multiplizieren und Dividieren für alle Zahlenbereiche folgt diesen Regel:

| | | |
|---|---|---|
| ( + ) · ( + ) = ( + ) | ( + ) : ( + ) = ( + ) | (Vorderseite) |
| ( – ) · ( + ) = ( – ) | ( – ) : ( + ) = ( – ) | (Rückseite) |
| ( – ) · ( – ) = ( + ) | ( – ) : ( – ) = ( + ) | (Vorderseite) |
| ( + ) · ( – ) = ( – ) | ( + ) : ( – ) = ( – ) | (Rückseite) |

Zur Veranschaulichung und zum Merken siehe rechte Seite.




### Rechenregeln für Addition und Multiplikation

Für alle Zahlenbereiche gelten für die Addition und Multiplikation folgende Entsprechungen:

a + b = b + a **Kommutativgesetz der Addition**

a · b = b · a **Kommutativgesetz der Multiplikation**

(a + b) + c = a + (b + c)

**Assoziativgesetz der Addition**

(a · b) · c = a · (b · c)

**Assoziativgesetz der Multiplikation**

a · (b + c) = a · b + a · c **Distibutivgesetz**

**Pluszeichen vor einer Klammer können weggelassen werden, die Vorzeichen wandeln sich in Rechenzeichen um.**

| | |
|---|---|
| 1 + (2 - 3) | Ausgangsgleichung |
| = 1 + (2 + (-3)) | Jetzt haben wir in der Klammer eine Summe. |
| = 1 + 2 + (-3) | Bei Summen kann man das Assoziativgesetz anwenden. Das heißt man kann die Klammer um die 2. Summe weglassen. |
| = 1 + 2 - 3 | Im letzten Schritt wird noch vereinfacht, denn + ( - 3) ist nichts anderes als -3. |

**Minuszeichen vor einer Klammer können mit dem Vorzeichen der Zahlen nach den oben angegebenen Vorzeichenregeln umgewandelt werden.**

| | |
|---|---|
| 1 - (2 + 3) | Ausgangsgleichung: Vor der Klammer ist ein Minus. |
| = 1 + (-2 - 3) | Alle Plus und Minus in der Klammer werden umgedreht. Außerdem wird das Minus vor der Klammer zu einem Plus. |
| = 1 + (-2 + (-3)) | Differenz in Klammer wird durch eine Summe ersetzt. |
| = 1 + (-2) + (-3) | Nun kann man das Assoziativgesetz anwenden. |
| = 1 - 2 - 3 | Im letzten Schritt wird noch vereinfacht. |

# Mathematik – Intensivkurs: Terme

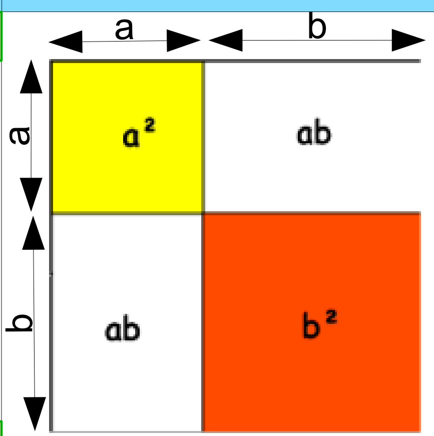
| Thema | Gesetze und Regeln | Musterbeispiele |
|---|---|---|
| **Binomische Formeln** | | |

## Binomische Formeln

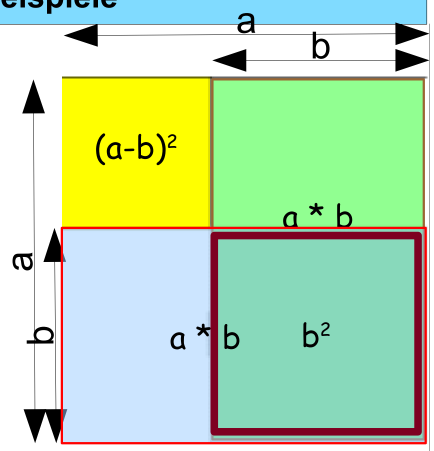
Binomische Ausdrücke sind zweigliedrige Ausdrücke: (a + b)
Binomische Formeln berechnen die n-te Potenz dieser zweigliedrigen Ausdrücke: $(a + b)^n$

$(a \pm b)^0 = 1$
$(a \pm b)^1 = a \pm b$
$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$ 1. und 2. Binomische Formel
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$
$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

Das Vorzeichen wechselt mit der ungeraden Potenz von b.




Erste binomische Formel:
$(a+b)^2 = a^2 + 2a*b + b^2$



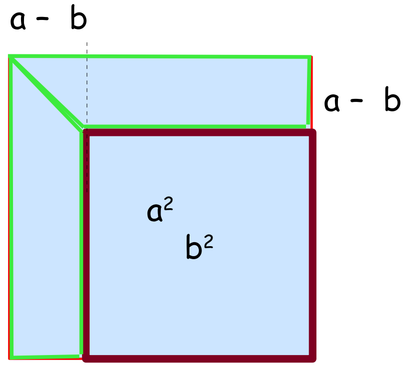

Zweite binomische Formel:
$(a-b)^2 = a^2 - 2a*b + b^2$
Die Fläche b*b wird durch die Flächen a*b zweimal abgezogen und muss deshalb einmal addiert werden.

## Pascalsches Dreieck

1
+
1 1
+ +
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

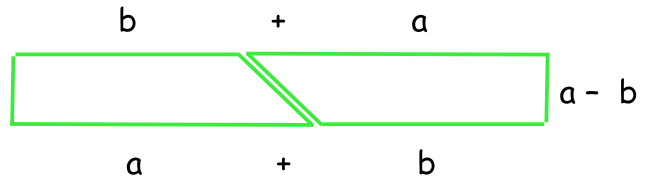
Die Koeffizienten unterliegen einem Bildungsgesetz, dem **Pascalschen Dreieck**:

Die Koeffizienten in der darunter liegenden Zeile ergeben sich aus der Summe der beiden Koeffizienten, die in der Zeile darüber liegen.




Dritte binomische Formel:
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Die grüne Figur hat eine Breite von a – b und die beiden parallelen Siten sind einmal a und einmal b. Verdreht man die beiden Flächen, wie unten gezeigt, erhält man ein Rechteck mit den Seiten a + b und a – b




## Weitere brauchbare Zerlegungsformeln

$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$ 3. Binomische Formel
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$



Treff Lernen
Christina Strauch