Lösungsschritte	Beispiel	Darstellung

1. Steigung des Graphen einer Funktion f(x) an der Stelle x_0

Gemeint ist die Steigung m der Tangente:
$m = f'(x_0)$
1.Schritt: $f'(x)$ ermitteln
2. Schritt: x_0 einsetzen, also $m = f'(x_0)$ berechnen

Beispiel: $f(x) = x^2$; $x_0 = 3$
$f'(x) = 2x$
$m = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

2. Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|y_0)$

Gegeben:
- eine Funktion f durch den Funktionsterm y(x)
- eine Stelle aus dem Definitionsbereich

Gesucht:
- der Funktionsterm $y(x) = mx + b$ der Tangente t an den Graphen von f, die diesen im Punkt $P(x_0|y_0)$ berührt, d.h. genauer die beiden fehlenden Parameter m und b dieses Funktionsterms

1. Bestimmung des Punktes

Die Stelle x_0 wird in die Funktionsgleichung f(x) eingesetzt und damit der zugehörige Funktionswert y_0 bestimmt.

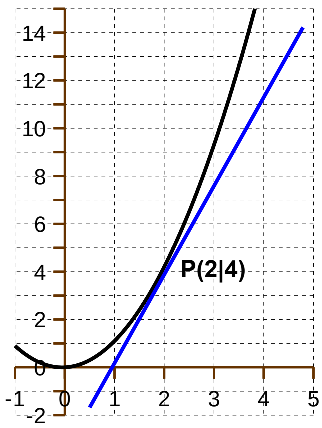
Beispiel: $f(x) = x^2$; $x_0 = 2$

2. Bestimmung des Anstiegs

Bestimme den Term der 1. Ableitung von f. Setze die Stelle x_0 in den Term der 1. Ableitung ein. Das Ergebnis ist der Tangentenanstieg

$y = f(x) = x^2$ für $x_0 = 2$ liefert
$f(2) = 2^2 = 4$
also $y_0 = 4$ und => $P_0\,(2 \mid 4)$

$f'(x) = 2x$ an der Stelle $x_0 = 2$:
$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$
Tangentenanstieg $m = 4$



3. Bestimmung der Geradengleichung

Möglichkeit 1	Möglichkeit 2	Möglichkeit 1	Möglichkeit 2
Setze die Steigung m und die Koordinaten des Punktes $P_0(x_0\|y_0)$ in die Gleichung $y = mx + b$ der Tangente t ein und bestimme die Lösung dieser Gleichung.	Setze die Koordinaten des Punktes $P_0(x_0\|y_0)$ und die berechnete Steigung in die Punkt-Richtungsgleichung einer Geraden ein und fasse zusammen.	$\mathbf{y = mx + b}$, $m = 4$, $P_0(2\|4)$ führt zur Bestimmungsgleichung für b: $4 = 4 \cdot 2 + b$, $b = -4$, T: $y = 4x - 4$	$\mathbf{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$, $y - 4 = 4\,(x - 2)$, $y = 4x - 8 + 4$, T: $y = 4x - 4$

3. An welchen Stellen hat der Graph von f die Steigung m

Gegeben: $m = f(x_0)$
1. Schritt: $f'(x)$ ermitteln
2. Schritt: $m = f'(x_0)$ ansetzen und nach x_0 auflösen

Beispiel: $f(x) = -x^2 + 3x$; $m = -1$
$f'(x) = -2x + 3$
$f'(x_0) = -1 = -2x_0 + 3$ => $x_0 = 2$

4. Gleichung der Tangente an den Graphen mit vorgegebener Steigung

Gegeben:
- eine Funktion f durch den Funktionsterm y(x)
- die Steigung m der Tangente an den Graphen von f

Gesucht:
- der Funktionsterm $y(x) = mx + b$ der Tangente t an den Graphen von f, die die Steigung m hat,
- genauer: gesucht ist ein Punkt $P_0(x_0|y_0)$

1. Bestimmung des x – Wertes des Punktes

- Bestimme den Term der 1. Ableitung von f.
- Setze in den Term der 1. Ableitung den Wert von m für die 1. Ableitung ein und löse nach x auf. (s. 3.3.)

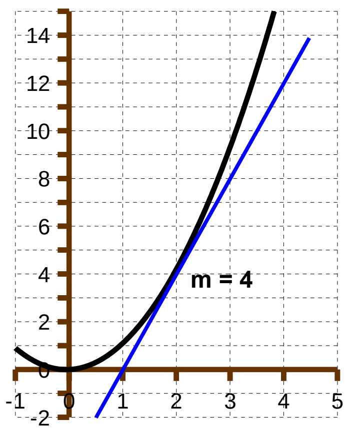
Das Ergebnis ist der x-Wert an dem der Tangentenanstieg gleich m ist. Gibt es mehrere x-Werte, müssen die folgenden Schritte für jeden einzelnen x-Wert durchgeführt werden.

2. Bestimmung des y – Wertes des Punktes

Die Stelle x_0 wird in die Funktionsgleichung f(x) eingesetzt und damit der zugehörige Funktionswert y_0 bestimmt.

3. Bestimmung der Geradengleichung

in gleicher Weise, wie unter 2.1



Lösungsschritte	**Beispiel**	**Darstellung**

5. Gleichung der Tangente an eine Kurve von einem Punkt außerhalb der Kurve

5.1. Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte, deren Anstieg eine 1. Ableitung sein muss.

Ausgangspunkt ist die Zwei-Punkte-Gleichung einer Geraden. Dabei ist der eine Punkt der vorgegebene Punkt Q und der zweite Punkt ein beliebiger Punkt, der auf der Funktion liegt.Für diesen Funktionspunkt gibt es eine Bedingung: Der Anstieg der Geraden muss gleich der 1. Ableitung in diesem Punkt sein.

$$\boxed{\frac{y - y_q}{x - x_q} = \frac{y_P - y_q}{x_P - x_q}}$$

Die Gleichung stellt Sekantengleichung durch Q und einen Funktionspunkt P dar.

$$\boxed{\frac{y_P - y_q}{x_P - x_q} = m = f'(x_P)}$$

Gesucht ist aus den unendliche vielen Sekanten diejenige, die eine Tangente ist.

Beispiel: $f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$

Gegeben:
- eine Funktion f durch den Funktionsterm y(x)
- ein Punkt $Q(x_q|y_q)$, der nicht auf dem Graphen von f liegt

Gesucht:
- der Funktionsterm y(x) = mx + b der Tangente t an den Graphen von f, die durch den Punkt Q geht.
- genauer: gesucht ist ein Punkt $P_0(x_0|y_0)$ auf dem Graphen von f, so dass dessen Tangente auch durch den Punkt Q verläuft.

1. Bestimmung des x – Wertes des Punktes

- Bestimme den Term der 1. Ableitung von f.
- Setze in den Term der 1. Ableitung dem Steigungsfaktor der Zwei-Punkte-Gleichung durch Q und dem unbekannten Punkt P gleich
- der y- Wert von P ist die Funktions-gleichung

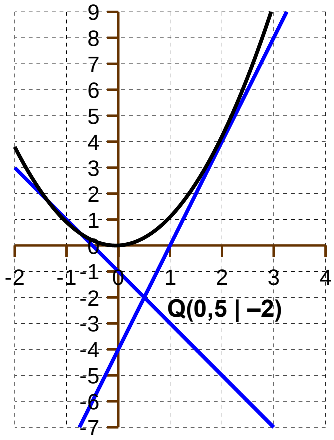
$$\boxed{\frac{f(u) - y_q}{u - x_q} = f'(u)}$$

Anstieg aus der 1. Ableitung
$f'(x) = 2x \quad => \quad m = 2x$

$Q(0{,}5| -2)$; $P(u \mid f(u))$

$$\boxed{\frac{u^2 -(-2)}{u - 0{,}5} = 2u}$$

$u^2 + 2 = 2u\,(u - 0{,}5)$
$0 = u^2 - u - 2$
$u_1 = -1$; $u_2 = 2$



2. Bestimmung des y – Wertes des Punktes

Die Stelle u wird in die Funktionsgleichung f(x) eingesetzt und damit der zugehörige Funktionswert f(u) bestimmt.
Die weitere Rechnung ist für jeden ermittelten x – Wert durchzuführen.

$y = f(x) = x^2$
- für $u_1 = -1 => f(-1) = (-1)^2 = 1$
  $f(u_1) = 1 \;=>\; P_1\,(-1|1)$
- für $u_2 = 2 => f(2) = 2^2 = 4$
  $f(u_2) = 4 \;=>\; P_2\,(2 \mid 4)$

3. Bestimmung des Anstiegs

Bestimme den Term der 1. Ableitung von f. Setze die Stelle u in den Term der 1. Ableitung ein.

Das Ergebnis ist der Tangentenanstieg

$f'(x) = 2x$
- $u_1 = -1 \;=>\; f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$
  Tangentenanstieg m = – 2
- $u_2 = 2 \;=>\; f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$
  Tangentenanstieg m = 4

4. Bestimmung der Geradengleichung

Möglichkeit 1	Möglichkeit 2	Möglichkeit 1	Möglichkeit 2
Setze die Steigung m und die Koordinaten des Punktes $P_0(x_0\|y_0)$ in die Gleichung y = mx + b der Tangente t ein und bestimme die Lösung dieser Gleichung.	Setze die Koordinaten des Punktes $P_0(x_0\|y_0)$ und die berechnete Steigung in die Punkt-Richtungsgleichung einer Geraden ein und fasse zusammen.	**y = mx + b** $P_0(-1\| 1)$ $m = -2$ $1 = (-2) \cdot (-1) + b$ $b = -1$ T : $y = -2x - 1$ $P_0(2\|4)$ $m = 4$ $4 = 4 \cdot 2 + b$ $b = -4$ T : $y = 4x - 4$	**$y - y_0 = m\,(x - x_0)$** $y - 1 = (-2)\,(x + 1)$ $y \quad = -2x - 2 + 1$ T: $y = -2x - 1$ $y - 4 = 4\,(x - 2)$ $y \quad = 4x - 8 + 4$ T: $y = 4x - 4$

Lösungsschritte	Beispiel	Darstellung

5.2. Gleichung der Tangente, die durch einen vorgegebenen Punkt laufen muss

Ausgangspunkt ist die Tangentengleichung an einen beliebigen Punkt der Funktion. An diese Tangentengleichung ist die zusätzliche Forderung zu stellen, dass sie durch den Punkt Q geht. Gesucht ist eine Tangente, auf der auch der Punkt Q liegt.

$\boxed{y - y_P = f'(x_P)\ (x - x_P)}$

Die Gleichung stellt die Tangentengleichung für jeden Punkt auf der Kurve dar.

$\boxed{y_Q = f'(x_P)\ (x_Q - x_P) + f(x_P)}$

Gesucht ist aus den unendlich vielen Tangenten diejenige, die durch Q geht.

Gegeben:
- eine Funktion f durch den Funktionsterm y(x)
- ein Punkt $Q(x_q|y_q)$, der nicht auf dem Graphen von f liegt

Gesucht:
- der Funktionsterm y(x) = mx + b der Tangente t an den Graphen von f, die durch den Punkt Q geht.
- genauer: gesucht ist ein Punkt $P_0(x_0|y_0)$ auf dem Graphen von f, so dass dessen Tangente auch durch den Punkt Q verläuft.

1. Allgemeine Tangentengleichung

- Bestimme den Term der 1. Ableitung von f.
- Setze in den Term der 1. Ableitung den Steigungsfaktor der Geraden in einem beliebigen Funktionspunkt P ein
- der y- Wert von P ist die Funktionsgleichung

$\boxed{y - f(u) = f'(u)\ (x - u)}$

Anstieg aus der 1. Ableitung
$f'(x) = 2x \Rightarrow\ m = 2x$
P(u | f(u))

$\boxed{y - u^2 = 2u\ (x - u)}$

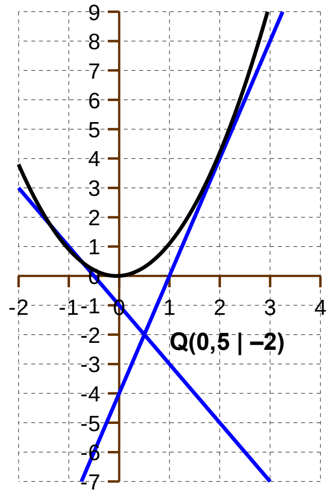
2. Der Punkt Q muss die Tangentengleichung erfüllen

Die x- und die y - Koordinate des Punktes Q müssen die Tangentengleichung erfüllen

$\boxed{y_Q = f'(u)\ (x_Q - u) + f(u)}$

$-2 - u^2 = 2u\ (0{,}5 - u)$
$-u^2 + 2u^2 + u + 2 = 0$
$u^2 - u - 2 = 0$
$u_1 = -1\ ;\ u_2 = 2$

- $u_1 = -1 \Rightarrow\ f(-1) = (-1)2 = 1$
  $y_1 = 1 \Rightarrow\ P_1\ (-1 \mid 1)$
- $u_2 = 2 \Rightarrow\ f(2) = 2^2 = 4$
  $y_2 = 4 \Rightarrow\ P_2\ (2 \mid 4)$



3. Bestimmung der Geradengleichung

analog zu 3.5.1.

6. Gleichung der Normalen an eine Kurve

Für die Gleichung einer Normalen sind die gleichen Rechenschritte wie bei einer Tangente auszuführen. Der einzige Unterschied besteht im Anstieg der Geraden.

Der Anstieg einer Tangente ist der Wert der 1. Ableitung: $m = f'(x_0)$

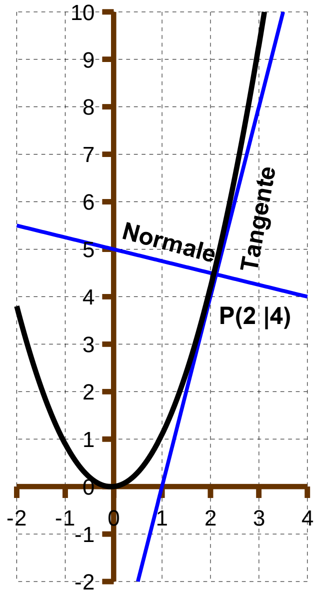
Der Anstieg der Normalen ist der negative Kehrwert der 1. Ableitung: $m = -\frac{1}{f'(x_0)}$

Tangentengleichung:

$y - 4 = \boxed{4}\ (x - 2)$

Normalengleichung:

$y - 4 = \boxed{-\tfrac{1}{4}}\ (x - 2)$



Lösungsschritte	**Beispiel**	**Darstellung**

7. Verhalten von zwei Funktionen und ihrer Tangenten und Normalen

7.1. Stelle x_0 mit gleicher Steigung der Graphen von f und g

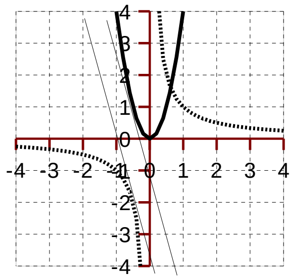
Es muss für diesen Wert x_0 gelten, dass die Steigung der beiden Graphen an dieser Stelle gleich groß ist.

1. Schritt: $f'(x_0) = g'(x_0)$ ansetzen
2. Schritt: Gleichung nach x_0 auflösen

Beispiel: $f(x) = 4x^2$; $g(x) = \frac{1}{x}$

Ansatz: $8x_0 = -\frac{1}{x_0^2}$

mit der Lösung $x_0 = -\frac{1}{2}$



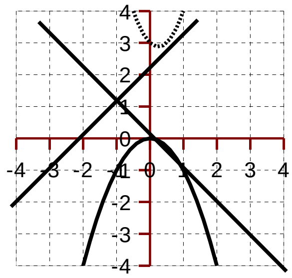
7.2. Stelle x_0 mit zueinander senkrechter Tangenten

1. Schritt: $f'(x_0) = -\frac{1}{g'(x_0)}$ ansetzen
2. Schritt: Gleichung nach x_0 auflösen

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - x + 3$; $g(x) = -x^2$

Ansatz: $4x_0 - 1 = \frac{1}{2x_0}$ mit den Lösungen

$x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{4}$



7.3. Die Graphen von f und g berühren sich

(Es muss $f'(x_0) = g'(x_0)$ und $f(x_0) = g(x_0)$ gelten)

1. Schritt: aus $f(x_0) = g(x_0)$ Stellen x_0 der Schnittpunkte der beiden Funktionen bestimmen
2. Schritt: prüfen, ob an den Stellen auch die Werte der 1. Ableitung übereinstimmen $f'(x_0) = g'(x_0)$

Beispiel: $f(x) = \frac{4}{x^2}$; $g(x) = 3 - \frac{9}{16}x^2$

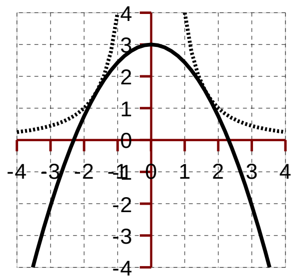
$f'(x_0) = g'(x_0)$: $-\frac{8}{x_0^3} = -\frac{9}{8}x_0$

$\Rightarrow x_0^4 = \frac{64}{9} \quad \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$

$f\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$

$g\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = 3 - \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{3} = \frac{3}{2}$

f und g berühren sich in $\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$



7.4. Schnittpunkt und Winkel der Graphen zweier Funktionen

1. Schritt: Schnittstelle x_S mit $f(x_S) = g(x_S)$ berechnen
2. Schritt: $y_S = f(x_S)$ berechnen und Schnittpunkt $S(x_S|y_S)$ angeben
3. Schritt: $f'(x)$ und $g'(x)$ berechnen: $m_1 = f'(x_S)$; $m_2 = g'(x_S)$
4. Schritt: mit $\tan(\delta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ den Winkel berechnen.

Beispiel: $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 4x + 4$

Schnittstelle: $x_S = 1$;

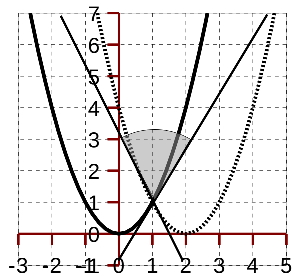
Schnittpunkt (1|1)

$m_1 = f'(1) = 2$;

$m_2 = g'(1) = -2$

$\tan(\delta) = \left|\frac{-2-2}{1 + 2 \cdot (-2)}\right| = \frac{4}{3}$

$\delta = 53{,}13°$



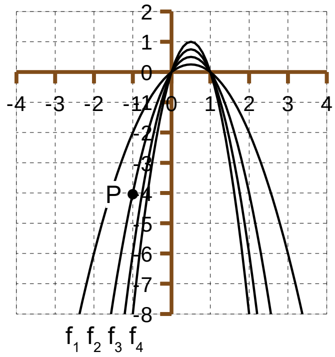
Lösungsschritte	Beispiel	Darstellung

8. Funktionenscharen

8.1. Der Graph welcher der Funktionen f_t geht durch P

1. Schritt: Koordinaten von P für x und $f_t(x)$ einsetzen
2. Schritt: Variable t aus dieser Gleichung berechnen

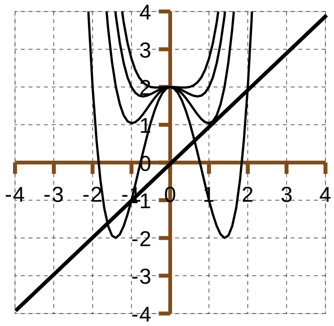
Beispiel: Für welchen Wert von t geht f_t mit $f_t(x) = t \cdot (x - x^2)$ durch P(–1| –4) ?
Aus $-4 = t \cdot (-1 -(-1)^2)$ folgt t = 2.



8.2. Für welche Funktion f_t liegt der Tiefpunkt auf der Geraden g

1. Schritt: Koordinaten von $T(x_0| y_0)$ in Abhängigkeit von t ermitteln
2. Schritt: x_0 und y_0 für x und y in die Geradengleichung einsetzen
3. Schritt: aus dieser Gleichung die einzige Variable t berechnen

Beispiel: Für welchen Wert von t liegt der Tiefpunkt T(2t | t +1) auf der Geraden y = x?
x_0 = 2 t und $y_0 = t^2 + 1$ in die Geradengleichung einsetzen:
$t^2 + 1 = 2t$, d.h. $t^2 - 2t + 1 = 0$ hat die einzige Lösung t = 1.



8.3. Der Graph welcher der Funktionen f_t hat an der Stelle x_0 die gleiche Steigung wie die Gerade g

1. Schritt: Steigung m der Geraden in $m = f'(x_0)$ einsetzen
2. Schritt: aus dieser Gleichung den Parameter berechnen

Beispiel: Für welchen Wert von t ist die Tangente an den Graphen der Funktion f,

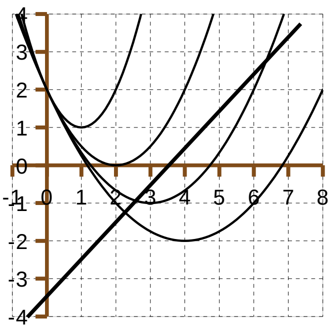
mit $f(x) = \frac{1}{t} x^2 - 2x + 2$ im Punkt (4 $|f_t(4)$)

parallel zur Geraden y = x?

Die Gerade hat die Steigung $\frac{1}{2}$. $f_t'(x) = \frac{2}{t} x - 2$

Also muss $f_t'(4) = \frac{1}{2}$ sein.

$f_t'(4) = \frac{2}{t} \cdot 4 - 2 = \frac{1}{2}$ => $t = \frac{16}{5}$



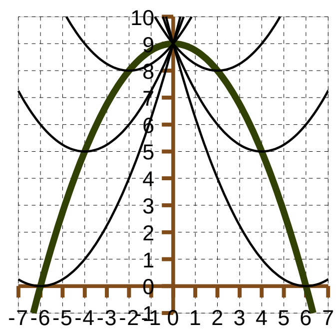
8.4. Ortskurve in einer Funktionsschar berechnen

Gesucht ist die Funktion, auf deren Graph alle Extrempunkte oder Wendepunkte liegen, (vgl. nebenstehende Grafik)
1. Schritt: die Koordinaten von Extrempunkt bzw. Wendepunkt in Abhängigkeit von t berechnen (x(t) |y(t))
2. Schritt: x(t) nach t auflösen und in y(t) einsetzen

Beispiel:

Ortskurve von $T(2t \mid 9-t^2)$
$x(t) = 2t$; $y(t) = 1 - t^2$

$t = \frac{x}{2}$ in y(t) einsetzen $y = 9 - \frac{1}{4} x^2$



8.5. Für welchen Wert von t ist das Minimum von f_t am größten ?

1. Schritt: Ortskurve des Tiefpunktes berechnen
2. Schritt: Maximumstelle der Ortskurve x_0 berechnen
3. Schritt: aus $x_0 = x(t)$ den Wert für t berechnen.

Beispiel: Der Tiefpunkt einer Funktionsschar liegt bei $(t|4 - t^2)$. Für welchen Wert von t ist das Minimum am größten?
Ortskurve: $y = 4 - x^2$
$y' = -2x = 0$ => $x_0 = 0 = t$
Minimum für t = 0

Lösungsschritte	Beispiel	Darstellung

8.6. Für welchen Wert von t hat der Graph von f_t zwei zueinander orthogonale Wendetangenten

1. Schritt: Berechnen der beiden Wendestellen
2. Schritt: Berechnen der Steigung an diesen Stellen.
3. Schritt: Ansatz für zueinander senkrechte Geraden:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Beispiel: Für welchen Wert von t > 0 hat $f_t(x) = tx^4 - 6tx^2$ zwei zueinander orthogonale Wendetangenten?

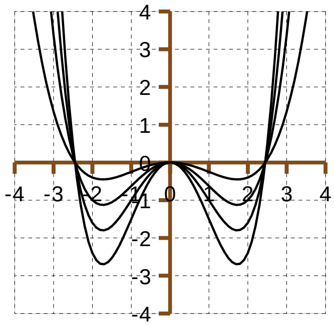
$f_t'(x) = 4tx^3 - 12tx$; $f_t''(x) = 12tx^2 - 12t = 0$

$x_1 = -1$; $x_2 = 1$

$m_1 = f_t'(-1) = 8t$; $m_2 = -8t$

Ansatz: $8t = -\frac{1}{-8t}$

$\Rightarrow t = \frac{1}{8}$ (t > 0)



8.7. Welche Punkte haben die Graphen aller Funktionen f_t gemeinsam

1. Schritt: für t die Parameter r und s im Ansatz $f_r(x) = f_s(x)$
verwenden.
2. Schritt: für r ≠ s die Schnittstellen errechnen.
3. Schritt: y-Werte errechnen und gemeinsame Punkte angeben

Beispiel: $f_t(x) = x^3 + tx^2 + (t-1)x+1$

Ansatz $f_r(x) = f_s(x)$, also

$x^3 + rx^2 + (r-1)x + 1 = x^3 + sx^2 + (s-1)x + 1$

$x_1 = 0$

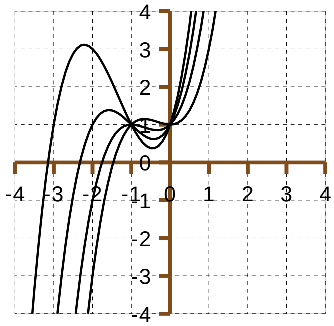
Restgleichung:

$rx + (r-1) = sx + (s-1)$

$(r-s) \bullet x = -1 \bullet (r-s) \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$

gemeinsame Punkte: $P_1(0|1)$ und

$P_2(-1|1)$



Abitur 2008

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt. Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -0{,}125\,x^3 + 0{,}75\,x^2 - 3{,}125$ im Bereich $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$

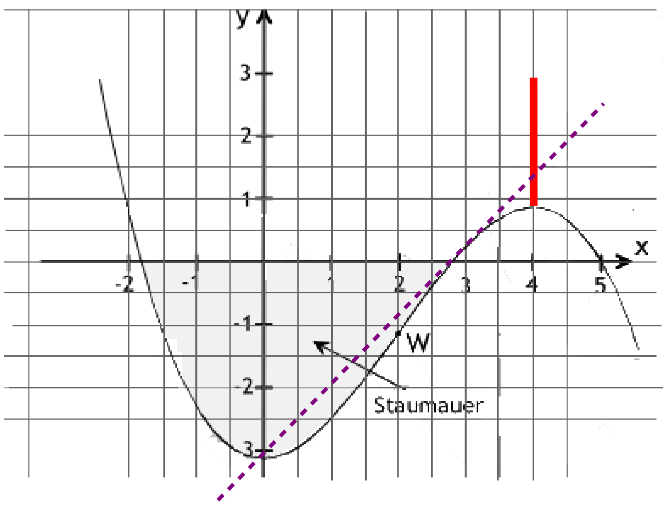
Dabei weist die positive x-Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m)

a) Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes.

b) In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben.
Bestimmen Sie die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.
Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann ?

Das Gerüst auf dem höchsten Punkt des östlichen Hügels verlangt die Berechnung des Hochpunktes, am schnellsten und einfachsten mit dem GTR: H (4| 0,875). Das könnte auch normal gerechnet werden, da die 1. Ableitung gut zu bearbeiten ist.

Damit das Sonnenlicht den tiefsten Punkt erreicht, braucht man eine Gerade durch den tiefsten Punkt, die das rot eingezeichnete Gerüst erreichen muss, also an einem Punkt der Kurve als Tangente fungiert, dieser Punkt ist zu ermitteln, damit man die Geradengleichung aufstellen kann.
Dann ist der Funktionswert der Geraden an der Stelle x = 4 zu bestimmen, dieser bestimmt die Höhe des Gerüsts.



der vorgegebene Punkt, von dem aus eine Tangente an die Funktion gelegt werden soll ist der Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse.

Q (0 ; – 3,125)

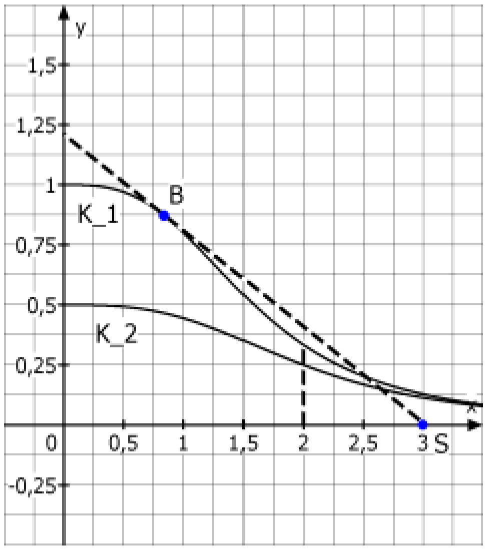
$$\underbrace{-3{,}125}_{y_q} = \underbrace{(-0{,}375\,u^2 + 1{,}5\,u)}_{f'(u)}\ \underbrace{(0-u)}_{(-u)} + \underbrace{-0{,}125\,u^3 + 0{,}75\,u^2 - 3{,}125}_{f(u)}$$

$$0 = 0{,}25\,u^3 - 0{,}75\,u^2$$

Die Lösung u = 0 ist uninteressant, da die Gerade so festgelegt wurde. Damit bleibt die Gleichung 0 = 0,25u – 0,75, was zu Lösung u = 3 führt. Für den Funktionswert f(3) erhält man 0,25 und für den Geradenanstieg f'(3) = 1,125. Das führt zur Tangentengleichung:

$$y = 1.125\,x - 3{,}125$$

Abitur 2011



Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = \dfrac{4}{x^3 + 4a}$ gegeben.

Ihr Schaubild ist K_a .

c) Die Schaubilder K_1 und K_2 schließen mit der y-Achse und der Geraden x = 2 eine Fläche ein. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper, der als Düse benutzt wird (Längeneinheit 1 cm).
Berechnen Sie die Masse einer solchen Düse, die aus Titan mit einer Dichte von 4,5 g/cm³ besteht.
Diese Düse wurde aus einem massiven Kegel mit der Höhe 3 cm und der x-Achse als Rotationsachse ausgefräst. Welchen Radius hatte der Grundkreis dieses Kegels mindestens ?

Um den Durchmesser der Düse an der Stelle x = 0 zu bestimmen benötigt man die Tangentengleichung von der Position Q(3|0) an die Kurve. Gesucht ist der Puinkt B, damit dann der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse bestimmt werden kann. da k1 die äußere Kurve ist, ist in der Funktion k = 1 zusetzen.

$$y = \frac{4}{u^3 + 4}$$

$$y' = \frac{-4 \cdot 3u^2}{(u^3+4)^2}$$

$$0 = \underbrace{\frac{-12u^2}{(u^3+4)^2}}_{} (3-u) + \underbrace{\frac{4}{u^3+4}}_{}$$

$$y_q = f'(u) \quad (3-u) + f(u)$$

$$\frac{12u^2}{(u^3+4)^2}(3-u) = \frac{4}{u^3+4}$$

$$12u^2 (3-u) = 4(u^3+4)$$

$$36u^2 - 12u^3 = 4u^3 + 16$$

$$-16u^3 + 36u^2 - 16 = 0 \quad | : (-4)$$

$$4u^3 - 9u^2 + 4 = 0$$

eine Lösung ist u = 2, aber das ist eine Tangente, die die Kurve von unten berührt.

Man kann dann durch Polynomdivision die höchste Potenz der Funktion um 1 reduzieren. Polynomdivision ist nicht mehr im Abitur vorgesehen! Deshalb würde jetzt nur noch die weitere Bestimmung über GTR bleiben. Das reduzierte Polynom besitzt folgendes Aussehen:

$$y = 4u^2 - u - 2$$

Dieses Polynom ist wieder gleich 0 zu setzen und die beiden anderen Nullstellen zu bestimmen.

$$u^2 - \tfrac{1}{4}u - \tfrac{1}{2} = 0$$

$$u_{1/2} = 1/8 \pm\sqrt{(1/8)^2 + 32/8^2}$$

$$= 1/8 \pm \sqrt{33}/8$$

$$= 1/8\,(1 \pm 5{,}744)$$

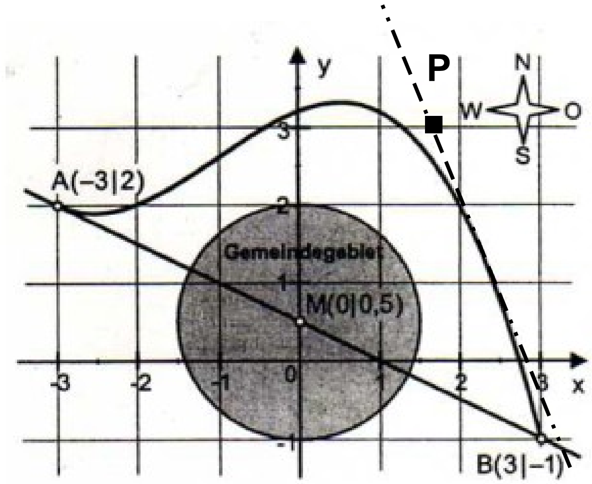
$u_1 = 0{,}8431$ Nur die Lösung u_1 ist brauchbar.

$u_2 = -0{,}5930$

Damit entsteht folgende Geradengleichung: $y = -0{,}4036\,(x-3)$

Abitur 2012

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt AB einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1,5 km. Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte A und B und wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2$
1 LE entspricht 1 km.



c) Im Punkt P(1,5/3) befindet sich eine Windkraftanlage. Ein Fahrzeug fährt von B aus auf der Umgehungsstraße. Von welchem Punkt der Umgehungsstraße aus sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich ?

$f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2$
$f'(x) = -0{,}3x^2 - 0{,}6x + 0{,}4$

$$\underset{y_q}{3} = \underbrace{(-0{,}3u^2 - 0{,}6u + 0{,}4)}_{f'(u)}\ \underset{(x_q - u)}{(1{,}5 - u)} + \underbrace{-0{,}1u^3 - 0{,}3u^2 + 0{,}4u + 3{,}2}_{f(u)}$$

$$3 = -0{,}45u^2 - 0{,}9u + 0{,}6 + 0{,}3u^3 + 0{,}6u^2 - 0{,}4u \quad -0{,}1u^3 - 0{,}3u^2 + 0{,}4u + 3{,}2$$
$$0 = 0{,}2u^3 - 0{,}15u^2 - 0{,}9u + 0{,}8$$
$$0 = 2u^3 - 1{,}5u^2 - 9u + 8$$

Die Funktion besitzt Nullstellen bei x = 2 und zwischen 0,9 und 1. Diese Nullstelle ist aber uninteressant.
Die gesuchte Lösung ist x = 2.