Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit

Ergebnis

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment mit folgenden Eigenschaften:

- Unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar
- Es gibt mindestens zwei mögliche Ergebnisse
- Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar

Werfen eines Würfels
- ist beliebig oft wiederholbar
- Es gibt 6 mögliche Ergebnisse (also mindestens 2)
- Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar

Wird ein Zufallsexperiment einmal ausgeführt, so spricht man von einem **einstufigen Zufallsexperiment**.

Einmaliges werfen eines Würfels.
Einmaliges werfen einer Münze.
Einmalige Wette über den Ausgang eines Fußballspiels.

Der Ausgang des Zufallsexperimentes wird **Ergebnis** genannt.

Die **Ergebnismenge** Ω enthält alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes. Die Ergebnismenge wird auch Stichprobenraum, oder Ereignisraum oder Ergebnisraum genannt.

Zufallsexperiment	Ergebnismenge
Einmaliges werfen eines Würfels	Ω = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }
Einmaliges werfen einer Münze	Ω = { Wappen ; Zahl }
Einmalige Wette über den Ausgang eines Fußballspiels	Ω = { Sieg ; Unentschieden ; Niederlage }

Ereignis

Jede Teilmenge A einer (endlichen) Ergebnismenge Ω heißt **Ereignis A**.

Stellt sich ein Ergebnis e ein und e gehört zur Teilmenge A, sagt man das **Ereignis tritt ein**.

Die Menge aller Teilmengen von Ω nennt man **Ereignisraum** und bezeichnet sie mit 2^{Ω}.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse addiert. (Summenregel)

Besitzt Ω genau n Elemente (|Ω| = n), so gibt es 2^{Ω} verschiedene Teilmengen von Ω, dh. 2^n unterschiedliche Ereignisse in 2^{Ω}.

Das **Ereignis A tritt ein**, wenn das betreffende Ergebnis des Zufallsexperiment ein Element der Menge A ist: $e \in A$.

- Einelementige Teilmenge: ***Elementarereignis*** (|Ω| = n; es gibt n Elementarereignisse)
- Leere Teilmenge: ***unmögliches Ereignis*** $A = \emptyset$
- Gesamtmenge Ω : ***sicheres Ereignis*** $A = \Omega$
- $\bar{A} = \Omega \setminus A$: ***Gegenereignis*** von A
- Zwei Ereignisse heißen ***unvereinbar***, wenn gilt $A \cap B = \emptyset$

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wahrscheinlich-keit

Zufallsvariable

Unter einer **Zufallsvariablen** X einen Zufallsexperiments versteht man eine Funktion, die jedem Ergebnis e_i der Ergebnismenge E eine Zahl zuordnet.

$X: e_i \rightarrow X(e_i)$ analog der Funktionsdefinition $f: x \rightarrow f(x)$

Ordnet man jedem Wert einer Zufallsvariablen seine Wahrscheinlichkeit zu, so entsteht eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Verteilung der Zufallsgröße kann man in einer Tabelle oder einem Histogramm darstellen.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Unter einer **Wahrscheinlichkeitsverteilung** f einer Zufallsvariable X versteht man die Funktion f mit

$f: x_i \rightarrow P(X = x_i)$

Der Funktionswert f(x) = gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert x_i annimmt.

Erwartungswert

Hat eine Zufallsvariable X die Werte $x_1; x_2; x_3; ..x_n$ dann heißt

$$E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + x_3 \cdot P(X=x_3) + ... + x_n \cdot P(X=x_n)$$

Erwartungswert von X.

Der Erwartungswert ist der zu erwartende Mittelwert von X in einer Reihe von Zufallsversuchen. Während sich der Mittelwert – eine Größe aus der beschreibenden Statistik – auf die Vergangenheit bezieht, also auf Werte, die in einer Stichprobe tatsächlich aufgetreten sind, beschreibt der Erwartungswert eine Größe, die sich auf die Zukunft bezieht, auf eine Größe mit der auf lange Sicht gerechnet werden muß.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Wahrscheinlichkeit	**Summenregel** Setzt sich ein Ereignis E aus den Ereignissen A und B zusammen, die sich überschneiden können, d.h. gemeinsame Ergebnisse enthalten können wie bei einer oder - Verknüpfung, dann muss man darauf achten, dass diese gemeinsamen Ereignisse nicht doppelt berücksichtigt werden. Sind A und B Ereignisse und gilt $E = A \cup B$ (Oder – Ereignis), dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: $\boxed{P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ In Worten: Die Wahrscheinlichkeit eines Oder - Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse, vermindert um die Wahrscheinlichkeit des Und - Ereignisses. **Unabhängige Ereignisse** Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig genau dann, wenn gilt $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ Gilt diese Gleichung nicht, heißen die Ereignisse stochastisch abhängig. - "Unabhängigkeit" ist ein schwieriges Konzept und kann nicht in einem Diagramm dargestellt werden. Unabhängigkeit ist nicht intuitiv und man muss sie für jede Situation überprüfen. - Das Auftreten des Ereignisses B beeinflußt nicht die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A: $P(A\|B) = P(A)$ und $P(B\|A) = P(B)$ - Das kann aus der Gleichung $P(A \cap B) = P(A) . P(B\|A)$ abgeleitet werden, wobei $P(B\|A) = P(B)$, wenn die Ereignisse unabhängig sind. - Wenn A und B unabhängig sind, dann sind A und $\overline{B}$ auch unabhängig. - Wenn A unabhängig von B und A unabhängig von C ist, muss A nicht notwendigerweise auch von $(B \cap C)$ unabhängig sein.	

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Wahrscheinlich-keit	Rechenregel für Wahrscheinlichkeiten	

1. Für alle Ereignisse E gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$ wobei $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$. das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Eriegnsses immer zwischen 0 und 1 liegt und nicht negativ sein kann.
2. Ist $E = \{e_1; e_2; e_3; e_4; ...e_n\}$, dann gilt $P(E) = P(e_1)+P(e_2)+P(e_3)+..P(e_n)$
3. Für alle Ereignisse A und B gilt; $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Für das Gegenereignis $\overline{E}$ gilt: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Laplace – Experiment

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die jedem der möglichen Ereignisse $e_1; e_2; ..e_n$ eines Zufallsexperiment die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet heißt **Gleichverteilung**

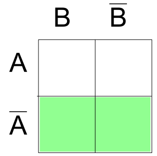
Ist die Wahrscheinlichkeit bei n möglichen Ergebnissen für jedes einzelne Ergebnis 1/n, dann spricht man von einem **Lapalce-Experiment.**

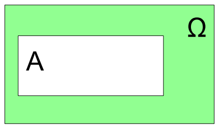
Nach klassischer Definition ist die **Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung** für das Auftreten eines Ereignisses E:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der zum Ereignis E gehörenden Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$$

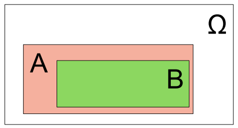
Gegenereignis – Vereinigung – Schnitt

$\overline{A}$ — Das **Gegenereignis** $\overline{A}$ tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt.

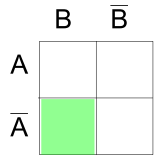


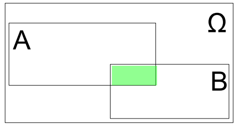


$B \subseteq A$ — Das Ereignis B **zieht** das Ereignis A **nach sich** ; immer, wenn B eintritt, tritt auch A ein.



$A \cap B$ — Das Ereignis **A und B** (A geschnitten B) tritt genau dann ein, wenn *sowohl A als auch B eintritt*





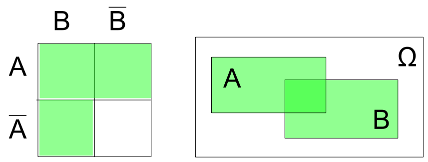
Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wahrscheinlichkeit

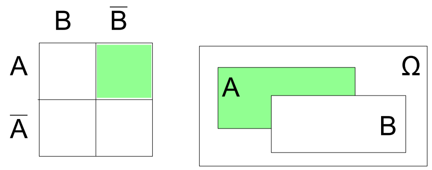
$A \cup B$

Das Ereignis **A oder B** (A vereinigt B) tritt genau dann ein, wenn *mindestens eines* der Ereignisse A, B eintritt.



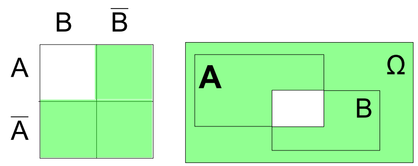
$A \setminus B$

Das Ereignis A und nicht B (A minus B) tritt genau dann ein, wenn A eintritt und B nicht eintritt.
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$



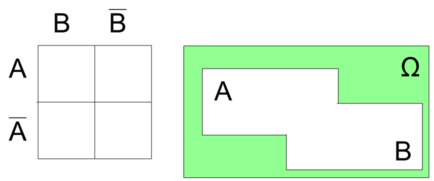
$\overline{A \cap B}$

Höchsten eines der Ereignisse A,B tritt ein, wenn *entweder A oder B* oder *keines von beiden* eintritt.
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



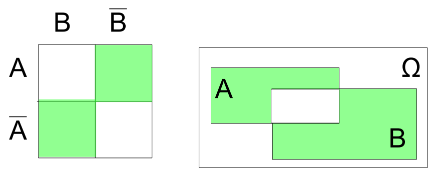
$\overline{A \cup B}$

Das Ereignis **Weder A noch B** tritt genau dann ein, wenn keines der beiden Ereignisse A,B eintritt.
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



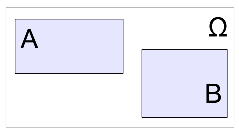
$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

Das Ereignis **Entweder A oder B** tritt genau dann ein, wenn *genau eines* der Ereignisse A,B eintritt.



$A \cap B = \emptyset$

Die Ereignisse A und B sind **unvereinbar**, d.h. sie können nicht gleichzeitig eintreten.



Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

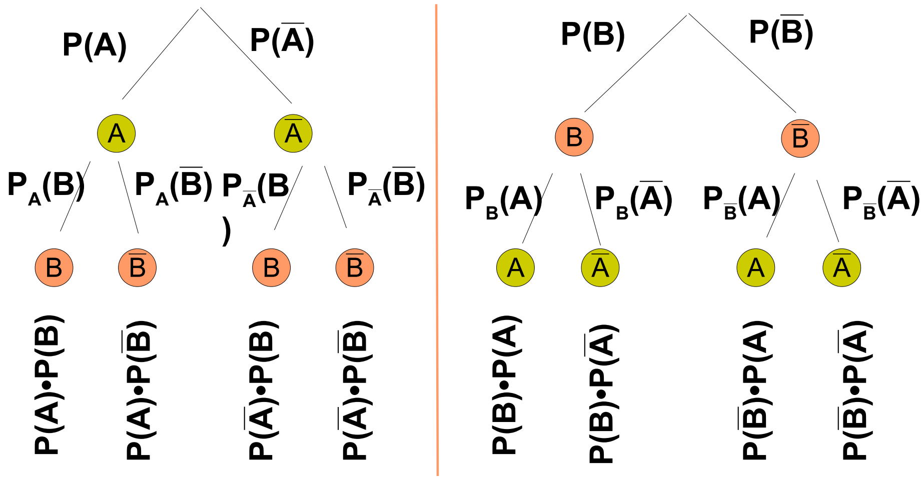
Baumdiagramm

Baumdiagramm

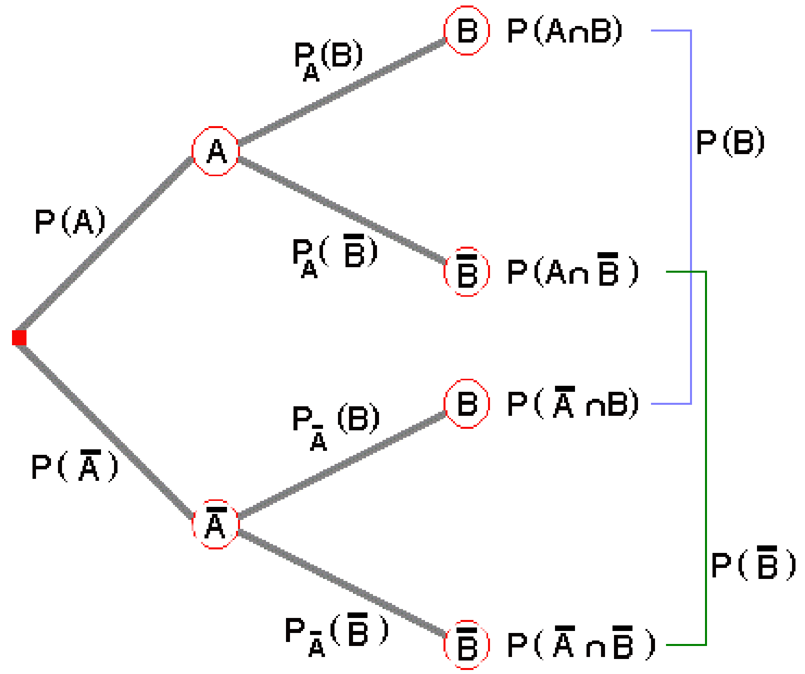
Die Beziehungen von zwei Ereignissen können mit einer Vierfeldertafel ausreichend beschrieben werden. Wenn mehr als zwei Ereignisse miteinander verbunden werden sollen, ist die Vierfeldertafel nicht mehr geeignet. dazu benutzt man dann ein sogenanntes Baumdiagramm. Die Beziehungen der Vierfeldertafel können auf zwei verschiedene Weisen in einem Baumdiagramm dargestellt werden:

Vierfeldertafel als Baumdiagramm

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Spalten-summe	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1



Vorteilhaft für die Nutzung weitere Stufen ist die Anordnung in waagerechter Form. Die Darstellung $P_A(B)$ ist eine Schreibweise für die Bedingte Wahrscheinlichkeit, auf die später eingegangen wird,



Die Wahrscheinlichkeit an dem Pfad von A nach B ist nicht die

Wahrscheinlichkeit P(B) des Eintretens des Ereignisses B, sondern die Wahrscheinlichkeit für **das Eintreten des Ereignisses B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist**. Deshalb auch mit $P_A(B)$ bezeichnet

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist plus der Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B unter der Bedingung, dass eingetreten ist. Andere Ereignisse können nicht zum Eintreten von B führen.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

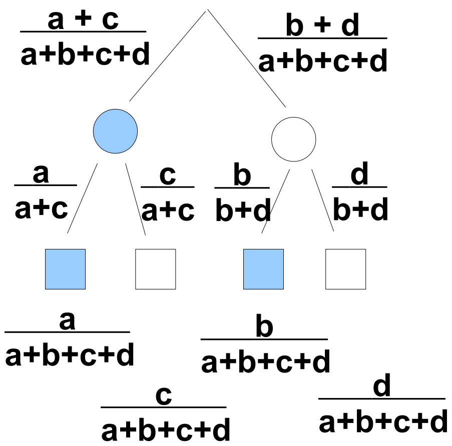
Abitur in Mathematik: Stochastik

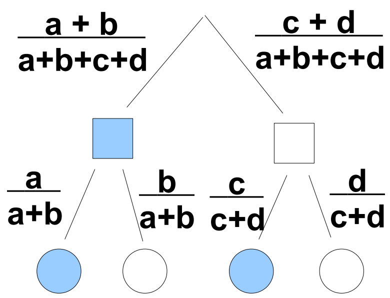
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Baumdiagramm

Gesetze und Regeln

Die Grundgesamtheit setzt sich aus den Summanden a, b, c und d der Vier-Felder-Tafel zusammen. Bei Prozentangaben ergeben diese Zahlen zusammen 100 %, sie beziehen sich also alle auf die Grundgesamtheit.
Ist man jedoch an Anteilen (relativen Häufigkeiten) bzw. Wahrscheinlichkeiten interessiert, so sind Quotienten zu bilden. Ihre Summe ist für eine Verästelung stets 1.





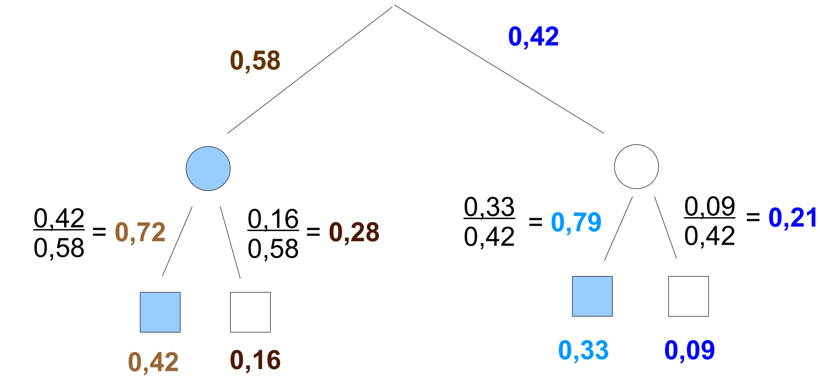
Die Wahrscheinlichkeiten der linken Darstellung auf der ersten Stufe können sofort aus der Vierfeldertafel abgelesen werden (und zwar aus der gesamt Zeile/ Spalte des ersten Merkmals). Die Pfadwahrscheinlichkeiten sind ebenfalls sofort abzulesen ().
Nur die Wahrscheinlichkeiten auf der zweiten Stufe müssen berechnet werden! Etwa mit Hilfe der Pfadregel:

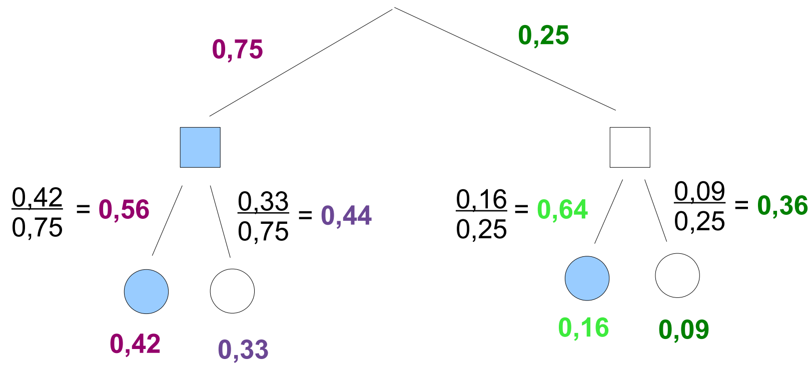
> Die gesuchte Teilwahrscheinlichkeit p in der zweiten Stufe muss multipliziert mit der bekannten (ersten) Teilwahrscheinlichkeit die Pfadwahrscheinlichkeit ergeben.

$$\frac{a}{a+b+c+d} = p \cdot \frac{a+c}{a+b+c+d} \qquad p = \frac{a}{a+c}$$

Musterbeispiele

	männlich	weiblich	gesamt
Abschluss (A)	0,42	0,33	0,75
kein Abschluss (kA)	0,16	0,09	0,25
gesamt	0,58	0,42	1,00





Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Baumdiagramm

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm mit Zurücklegen (mit Wiederholung)

Das bestimmende Merkmal für diese Art von Zufallsexperimenten besteht darin, dass vor jedem neuen versuch die Ausgangssituation des ersten Versuchs wieder hergestellt wird. Deshalb bezeichnet man diese Art in Anlehnung an die Simulation mit einem Urnenmodell, in dem Kugeln gezogen werden müssen, als „mit Zurücklegen“

Merkmale

- Vor jedem neuen Versuch ist die Ausgangssituation wieder hergestellt.
- Die Wahrscheinlichkeiten sind bei jedem Versuch die gleichen, da die Zahl „aller“ Ereignisse und die Zahl der „positiven“ Ereignisse immer gleich sind.

Betrachtet man im Baumdiagramm die **erste Ziehung** für die rote Kugel, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(A) dafür:
eine rote Kugel aus der Gesamtmenge Ω zu ziehen: $P_\Omega(A) = 3/5$
(= die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung der Grundmenge Ω)

Betrachtet man die **zweite Ziehung** für die rote Kugel, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(A) dafür:
eine rote Kugel aus der Gesamtmenge Ω zu ziehen: $P_\Omega(A) = 3/5$
(= die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung der Grundmenge Ω)
da durch das Zurücklegen die Ausgangsmenge wieder zurückgesetzt wurde.

In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln **mit** zurücklegen gezogen.

1. Ziehung

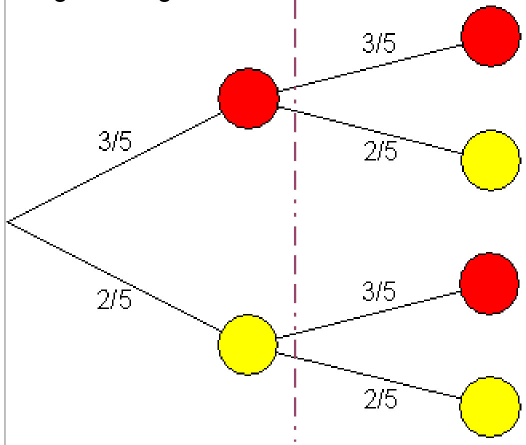
Insgesamt sind 5 Kugeln vorhanden

rote Kugeln: 3
gelbe Kugeln: 2

2. Ziehung

Insgesamt sind 5 Kugeln vorhanden

rote Kugeln: 3
gelbe Kugeln: 2



$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0{,}36$

$P(rg) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$

$P(gr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$

$P(gg) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	**P(rg)=0,24**	**P(rr)=0,36**	**P(A)=3/5 = 0,24+0,36**
$\overline{A}$	**P(gg)=0,16**	**P(gr)=0,24**	**P($\overline{A}$)=2/5 = 0,16+0,24**
Spalten-summe	**P(B) = 2/5 = 0,16+0,24**	**P($\overline{B}$)= 3/5 = 0,36 + 0,24**	**1**

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Baumdiagramm	**Baumdiagramm ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung)**	

Baumdiagramm ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung)

Das bestimmende Merkmal für diese Art von Zufallsexperimenten besteht darin, dass vor jedem neuen Versuch eine neue Ausgangssituation vorhanden ist, da das Ergebnis des ersten Versuchs Auswirkung auf das Ergebnis des zweiten Versuchs hat. Deshalb bezeichnet man diese Art in Anlehnung an die Simulation mit einem Urnenmodell, in dem Kugeln gezogen werden müssen, als „ohne Zurücklegen“

Merkmale

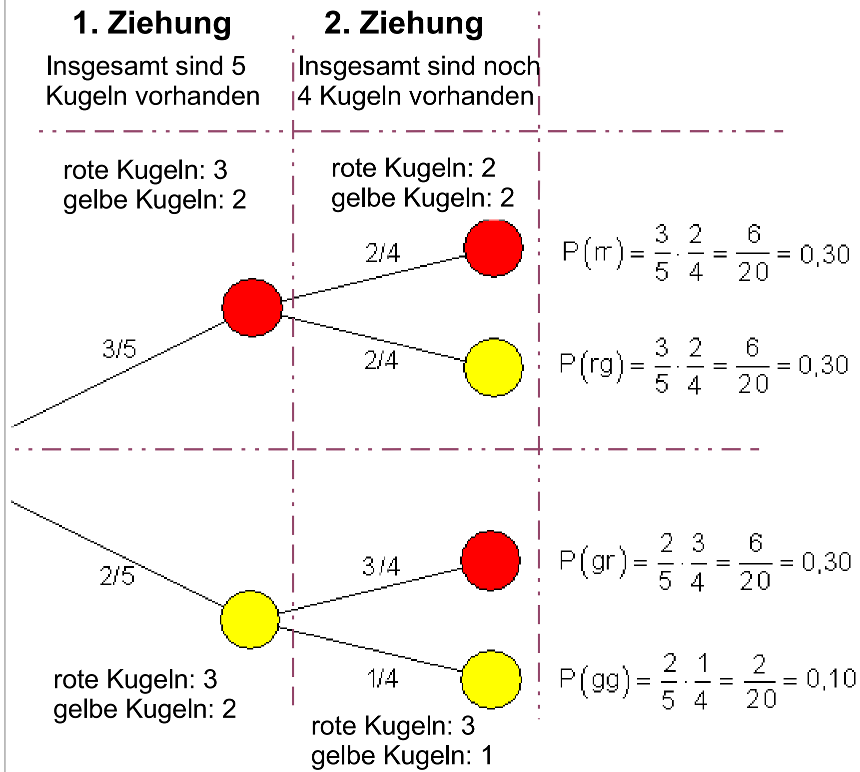
- Vor jedem neuen Versuch existiert eine neue Ausgangssituation
- Die Wahrscheinlichkeiten sind bei jedem Versuch verschieden, da die Zahl „aller“ möglichen Ereignisse sich um 1 reduziert (Nenner wird um 1 kleiner) und die Zahl der „positiven“ Ereignisse durch vorherige Versuche verändert wurde.

Betrachtet man im Baumdiagramm die **erste Ziehung** für die rote Kugel, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(A) dafür:
eine rote Kugel aus der Gesamtmenge Ω zu ziehen: $P_{\Omega}(A) = 3/5$
(= die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung der Grundmenge Ω)

Betrachtet man die **zweite Ziehung** für die rote Kugel, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(A) dafür:
eine rote Kugel aus einer Menge zu ziehen,. aus der bereits eine (rote oder gelbe) gezogen wurde:
$P_A(B) = 2/4$, $P_A(\overline{B}) = 2/4$, $P_{\overline{A}}(B) = 3/4$, $P_{\overline{A}}(B) = 1/4$.
(= die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B (oder $\overline{B}$) unter der Bedingung, dass das Ereignis A (oder $\overline{A}$) eingetreten ist.)
Beim zweiten Versuch hat sich die Ausgangsmenge für alle Versuche geändert, alle Wahrscheinlichkeiten haben sich gegenüber dem ersten Versuch geändert.

Musterbeispiele

In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln **ohne** zurücklegen gezogen.



	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	**P(rg)=3/10**	**P(rr)=3/10**	**P(A)=3/5**
$\overline{A}$	**P(gg)=1/10**	**P(gr)=3/10**	**P($\overline{A}$)=2/5**
Spalten-summe	**P(B) = 2/5**	**P($\overline{B}$)= 3/5**	**1**

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Baumdiagramm

Gesetze und Regeln

Bei Versuchen mit Zurücklegen ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Bei Versuchen ohne Zurücklegen ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Da $P(A)\, P_A(B) = P(A \cap B)$ und die Reihenfolge am Ende der beiden Ziehung unwichtig ist, folgt daraus auch: $P(B)\, P_B(A) = P(A \cap B)$

Deshalb ist es möglich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $P_A(B)$ zu berechnen, wenn die Wahrscheinlichkeit von A – P(A) – und die Wahrscheinlichkeit von $A \cap B$ – $P(A \cap B)$ – bekannt sind:

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$$\boxed{P(A)\, P_A(B) = P(B)\, P_B(A)} \quad \text{und} \quad \boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Musterbeispiele

Bedingte Wahrscheinlichkeit kann aus der Vierfeldertafel nicht abgelesen werden, aber sie läßt sich aus der Vierfeldertafel bestimmen:

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	**P(rg)=3/10**	**P(rr)=3/10**	**P(A)=3/5**
$\overline{A}$	**P(gg)=1/10**	**P(gr)=3/10**	**P($\overline{A}$)=2/5**
Spalten-summe	**P(B) = 2/5**	**P($\overline{B}$)= 3/5**	**1**

Betrachtet man das Ereignis $A \cap \overline{B}$, so kann man der Vierfeldertafel entnehmen,. dass die Wahrscheinlichkeit dafür 3/10 beträgt.

- die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt ist 3/5 (Zeilen-summe von A)
- um die bedingte Wahrscheinlichkeit von $\overline{B}$ unter der Bedingung A zu bestimmen bezieht man die Wahrscheinlichkeit $A \cap \overline{B} = 3/10$ auf die Wahrscheinlichkeit von A :

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

Im Baumdiagramm auf der vorherigen Seite als 2/4 angegeben.

Von dem zuerst eingetretenen Ereignisses ist die Spalten- oder Zeilensumme zu nehmen und die „zusammengesetzte“ Wahrscheinlichkeit auf diese Summe zu beziehen, was bedeutet, durch diese Summe zu teilen.

Abitur in Mathematik: Stochastik

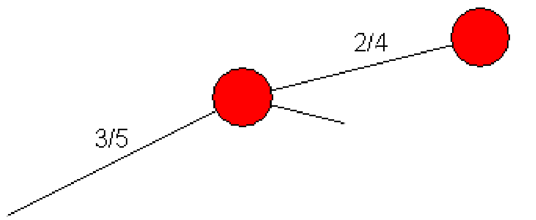
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Baumdiagramm

Pfadregeln

1. Pfadregel – Produktregel

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** entlang eines Pfades gleich dem ***Produkt der Wahrscheinlichkeiten*** der einzelnen Wahrscheinlichkeiten eines Teilpfades.



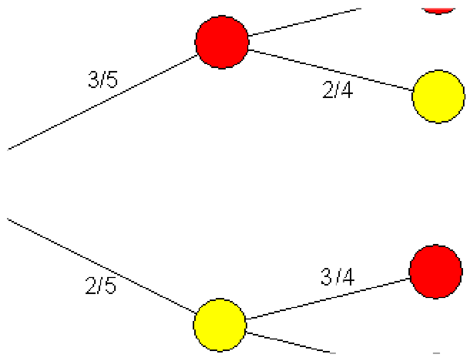
$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,24$

Multiplikation

2. Pfadregel – Ereignisregel

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** gleich der ***Summe der zugehörigen Ergebnisse***.

(ein Ereignis kann sich aus vielen Einzelergebnissen zusammensetzen, z.B setzt sich das ***Ereignis*** eine rote und eine gelbe Kugel zu ziehen, aus zwei ***Ergebnissen*** zusammen.)



$P(rg) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,24$

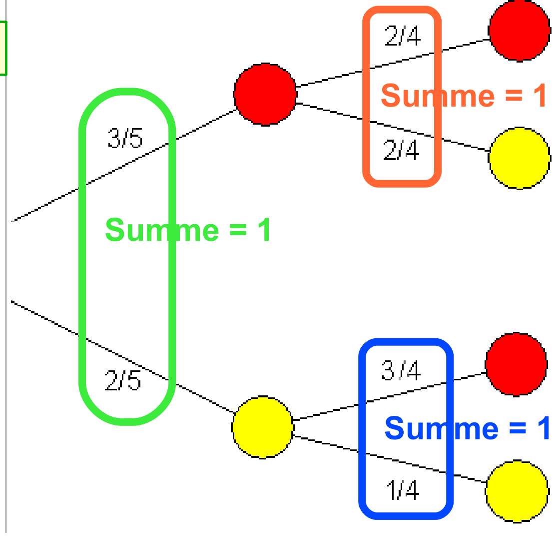
+

$P(gr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 0,24$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Kugel gelb und eine Kugel rot ist, setzt sich aus zwei Teilwahrscheinlichkeiten zusammen:
1. Kugel rot; 2. Kugel gelb; + 1. Kugel gelb; 2. Kugel rot; = 0,48

3. Pfadregel – Verzweigungsregel

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von ein und demselben Verzweigungspunkt ausgehen, ist immer 1.



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Baumdiagramm

Mammutbäume

Die Kombinatorik

Bei Mammutbäumen entstehen sehr viele interessierende Pfade im Baumdiagramm. Wenn sie alle die gleiche Pfadwahrscheinlichkeit besitzen, genügt es, einen einzigen dieser Pfade zu zeichnen, dessen Pfadwahrscheinlichkeit zu berechnen und mit der Anzahl der interessierenden Pfade zu multiplizieren. Die Anzahl der interessierenden Pfade erhält man mithilfe von kombinatorischen Das Themengebiet der Kombinatorik lässt sich so bruchlos in einen baumorientierten Lehrgang integrieren.

Die Kombinatorik liefert als Anzahl der Pfade, bei denen jeweils zwei Fragen vorbereitet sind: **Permutation mit Wiederholung**

$$\frac{n!}{k_1!k_2!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Von den 10 Pfaden sind vier aufgeführt, alle diese Pfade sollen die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, was auf den ersten Blick etwas merkwürdig erscheint, wenn man die einzelnen Brüche betrachtet.
Deshalb sollen die einzelnen Zähler und Nenner getrennt betrachtet werden:

Die Nenner generieren sich aus den noch insgesamt vorhandenen Fragen, deshalb haben die Nenner in allen Pfaden die Folge

50	49	48	47	46
1. Frage	2. Frage	3. Frage	4. Frage	5. Frage

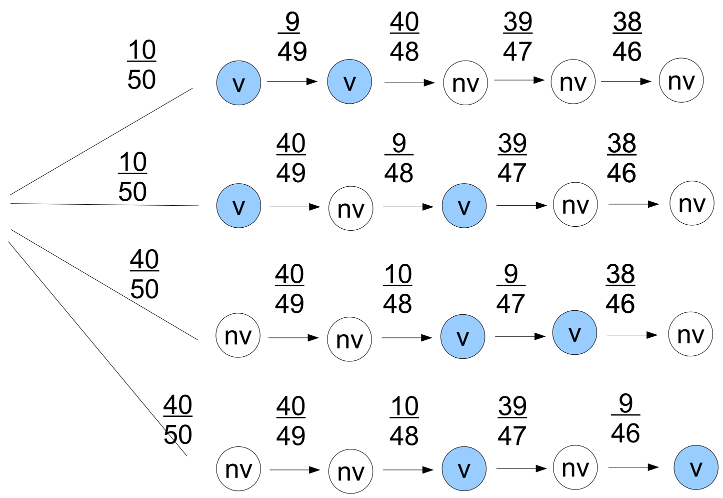
$$P = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{10 \quad 9}{50 \quad 49}\;\middle|\;\frac{40 \quad 39 \quad 38}{48 \quad 47 \quad 46}\right)$$

2 vorb. Frage | 3 n.vorb. Frage

In jedem Pfad tritt einmal ein Faktor aus dem Zähler auf und einmal ein Faktor aus dem Nenner

Ein Lehrer gibt vor einer Prüfung einen Fragenkatalog mit 50 Fragen heraus, von denen dann 5 dem Prüfling vorgelegt werden. Hans bereitet sich auf 10 der Fragen vor.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 2 vorbereitete Fragen?



Die Zähler generieren sich
für die vorbereiteten Fragen (blaue Kreise) aus den noch vorhandenen vorbereiteten Fragen

10	9
1. vorb. Frage	2. vorb. Frage

für die nicht vorbereiteten Fragen aus den noch vorhandenen nicht vorbereiteten Fragen

40	39	38
1. n.vorb. Frage	2. n.vorb. Frage	3. n.vorb. Frage

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Baumdiagramm

Bedingte Bäume

Bei bedingten Bäumen hängt die Knotenwahrscheinlichkeit davon ab, was im vorherigen Knoten passiert; so ist im Diagramm z. B. $P_B(A) \neq P_{\overline{B}}(A)$. Das bedeutet aber auch, dass die Knoten von Baum und Umkehrbaum unterschiedliche Ast-wahrscheinlichkeiten besitzen, so ist z.B. $P(B) \neq P_{\overline{A}}(B)$. Ist dieser Zusammenhang und die damit einhergehende Schreibweise geklärt, gelingt es relativ leicht, die Astwahrscheinlichkeiten des Umkehrbaums aus denen des ursprünglichen mit Hilfe der Pfadregeln zu ermitteln. So lässt sich im Beispiel die Astwahrscheinlichkeit P(A) des zweiten Baumes durch die Addition der Alarm-Pfade des ersten Baumes bestimmen. Die Wahrscheinlichkeit für einen berechtigten Alarm $P_{\overline{A}}(B)$ ergibt sich aus dem Anteil von $P(A \cap B)$ bezogen auf P(A).

Allerdings kommt es bei bedingten Bäumen – also bei abhängigen Teilereignissen – häufig zu Fehlurteilen. Im ersten Moment unterscheiden die Schüler nicht zwischen $P_B(A)=99\%$ und $P_A(B)=16{,}54\%$. Sie können nicht glauben, dass eine so zuverlässige Alarmanlage nur in 16,54% der Fälle berechtigter-weise Alarm gibt und trauen diesem errechneten Wert nicht. Sie sehen nicht, dass sich die 99% nur auf ganz wenige Fälle beziehen. Aus diesem Grund wird bei der Einführung des Themas oft mit sogenannten Häufigkeitsbäumen gearbeitet, bei denen die Knoteneinträge um absolute Häufigkeitsangaben ergänzt werden. Anhand der absoluten Zahlen können die Schüler die tatsächlichen Verhältnisse deutlicher erkennen

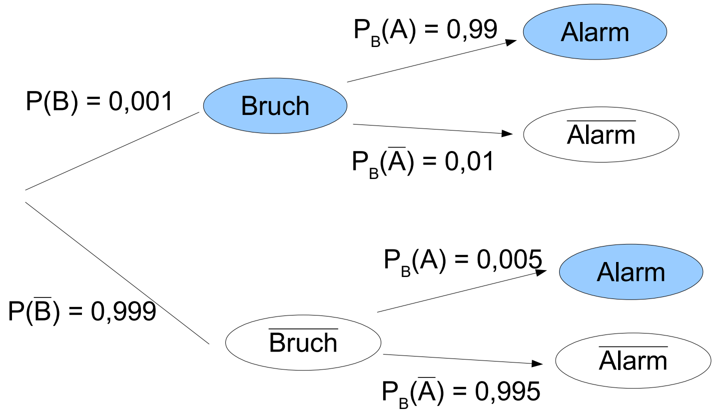
$$P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A) = 0{,}599\%$$
$$0{,}001 \cdot 0{,}99 + 0{,}999 \cdot 0{,}005 = 0{,}005985$$

$$P(E) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}001 \cdot 0{,}99}{0{,}00599} = 16{,}54\ \%$$

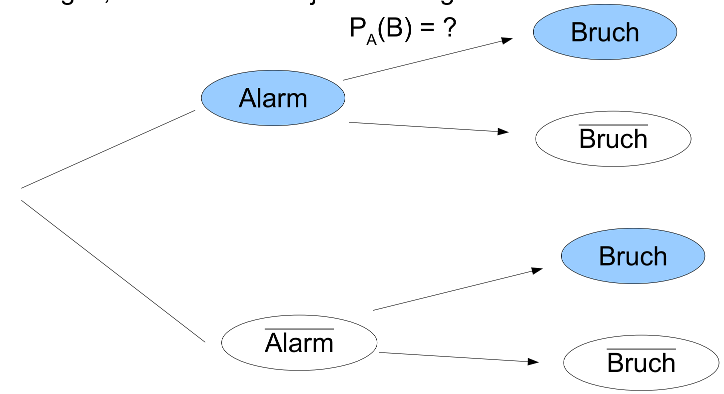
Musterbeispiele

Die Alarmanlage eines Geschäftes gibt bei einem Einbruch mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% Alarm. Aber auch ohne Einbruch gibt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5% (falschen) Alarm.
Die Einbruchswahrscheinlichkeit in der Nacht betrage 0,1%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn der Alarm ausgelöst wird, tatsächlich ein Einbruch stattfindet?

(1) E: AB, d.h. es findet ein Einbruch B statt, unter der Bedingung A, dass die Alarmanlage angesprungen ist.



Dieser Baum zeigt die Wahrscheinlichkeit an, dass Alarm ausgelöst wurde unter der Bedingung, dass eingebrochen wurde.
Gesucht ist aber die Abhängigkeit dafür, dass ein Einbruch stattgefunden hat unter der Bedingung, dass Alarm ausgelöst wurde, also:
es klingelt, ist auch wirklich jemand eingebrochen ?



Abitur in Mathematik: Stochastik		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**

Verteilungen

Bernoulli-Verteilung

Definition

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1 \\ 1 - p & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Bernoulli-Verteilung muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

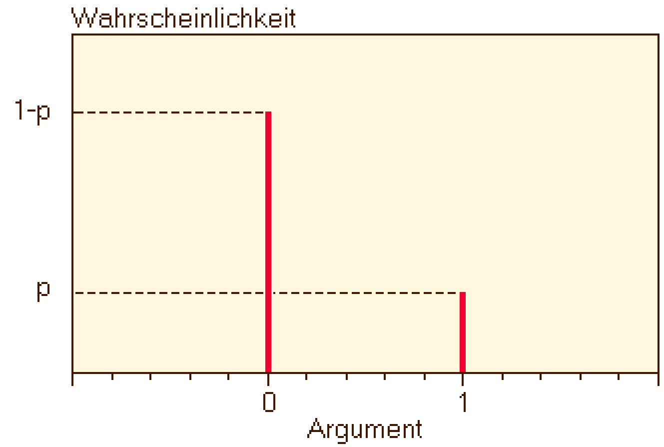
- das Ergebnis eines Experiments ist binär (nur zwei mögliche Werte)
- die N Versuche sind unabhängig voneinander
- die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse bleiben konstant

Anwendungen:
Bernoulli-Verteilungen können beobachtet werden, wenn ein zufälliger Prozess exakt zwei Ergebnisse hat, wie z.B. in der Qualitätssicherung, wo ein Produkt als gut oder schlecht klassifiziert werden kann.

Erwartungswert: $E(x) = p$

Varianz: $VAR(x) = p(1-p)$

Grafische Darstellung



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Pascalsches Dreieck

Pascalsches Dreieck

Das Pascalsche Dreieck ist bekannt aus der Berechnung der Binomischen Formeln und stellt das Bildungsgesetz der Koeffizienten vor den einzelnen Potenzen dar.

Die Koeffizienten der folgenden Reihe entstehen aus der Summe der Koeffizienten der vorhergehenden Reihe. An den Rändern wird jeweils eine 1 hinzugefügt.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 + 1 \\
1 + 2 + 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1
\end{array}
$$

Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Vandermondesche Gleichung

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

Pascalsches Dreieck in der Schreibweise mit Binomialkoeffizienten

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{x}$

Ausdrücke der folgenden Art nennt man Binomialkoeffizienten. Sie treten nicht nur bei dieser Verteilungsfunktion auf, sondern insbesondere beim Ausmultiplizieren binomischer Ausdrücke der Form $(a + b)^n$. Die Berechnung der Binomialkoeffizienten ist nur erklärt für ganzzahlige n und x, wobei $x \le n$ sein muß.

$$\boxed{\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x} = \frac{n!}{x!\,((n-x)!}}$$

Beim Binomialkoeffizient sind keine Bruchstriche zu setzen. Der Ausdruck wird gelesen als „ n über x“. Die Berechnung eines Binomialkoeffizienten erfolgt entsprechend des rechten Ausdrucks über die Fakultät der beiden ganzen Zahlen.

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Pascalsches Dreieck

Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks

Der „Aufbau“ beginnt in Zeile 0 (n=0) mit einer Eins. Am Rand jeder neuen Zeile steht auf beiden Seiten eine weitere 1. Alle anderen Einträge entstehen aus der Summe der beiden darüber liegenden Zahlen:
Zunächst scheint es ein einfaches Zahlenspiel zu sein, doch der Inhalt steckt voller schöner Mathematik. So haben die Zahlen im Pascalschen Dreieck neben der Symmetrie viele weitere interessante Eigenschaften:

(a) Die zweite Zahl entspricht immer der „Zeilennummer n“. Man beginnt bei der Nummerierung mit der „nullten Zeile“.

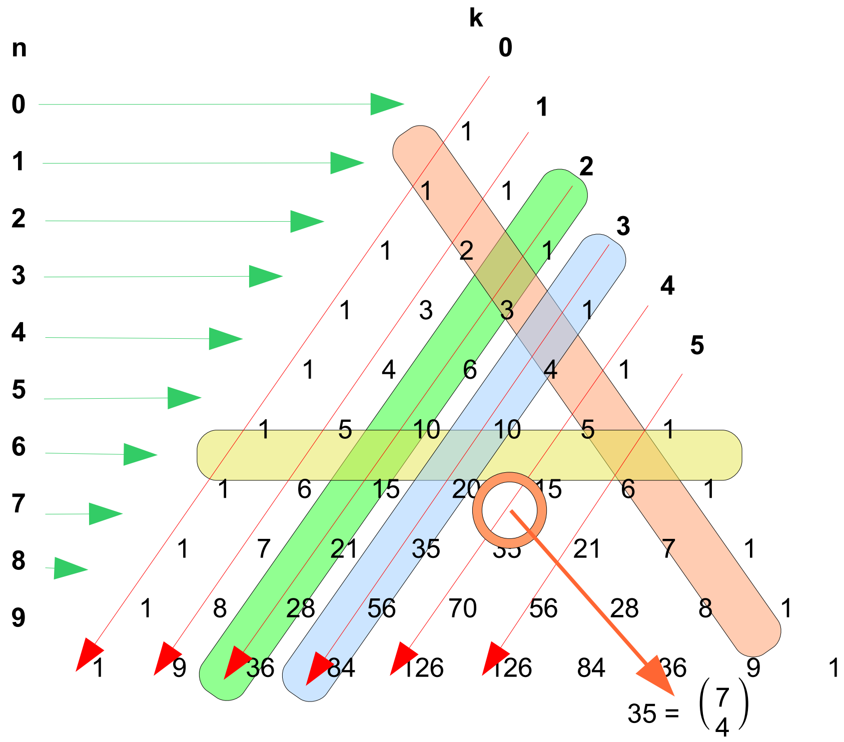
(b) Die vorletzte Zahl in jeder Zeile entspricht immer der „Diagonalennummer k“. Wieder beginnt man beim Zählen mit der „nullten Diagonalen“.

(c) In der vierten Diagonalen (k=3) liegen die Summen der darüber liegenden Dreieckszahlen (10 = 1+3+6; 20 = 1+3+6+10 ;...); aber acuh die Folge der „Tetraederzahlen“.

(d) Die Zahlen in der n-ten Zeile entsprechen stets den Koeffizienten (=Zahlfaktoren) der „**Binome**“ $(a\pm b)^n$. (Sie werden daher auch **Binomialkoeffizienten** genannt.)
Beispiel: $(a-b)^2 = (1\cdot)a^2 - 2ab + (1\cdot)b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

(e) Nummeriert man auch jeden. Eintrag einer Zeile beginnend mit 0, dann hat der k-te Eintrag in der n-ten Zeile eine kombinatorische Bedeutung: Dies ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Gruppe von n Elementen genau k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

(f) Addiert man zwei unter einander stehende Zahlen der dritten Diagonalen, (k = 2) so ergibt sich stets eine Quadratzahl.



Betrachtet man die horizontalen Zeilen als n und die Diagonalen als k, beginnend mit k=0 an der ersten Diagonale, dann kann man aus dem Pascalschen Dreieck die Wahrscheinlichkeiten $\binom{n}{k}$ ablesen.

Um das richtige k zu finden muss man an der ersten Diagonale, in der natürlichen Zahlen stehen, den Wert um 1 reduzieren.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Pascalsches Dreieck

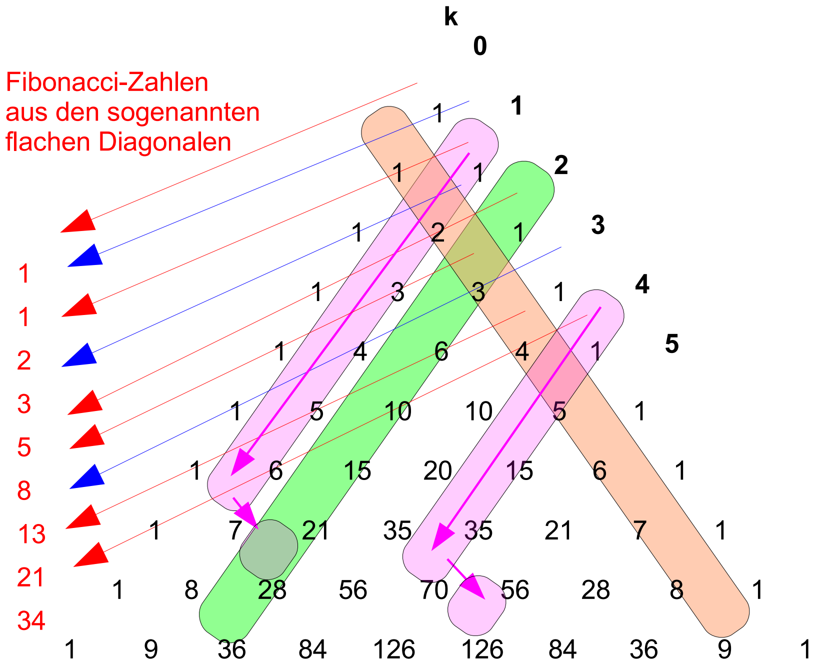
Fibonacci Zahlen und Summen

(g) Allgemein beinhaltet jeder Eintrag die Summe der darüber liegenden Diagonaleneinträge.

Jede rechts neben einer Folge liegende Folge ist immer die Folge der Partialsummen der vorhergehenden.
Z.B. ist die Dreiecksfolge 1, 3, 6, 10, 15, ... auch die Summenfolge
1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5, ...

(h) Die dritten „Diagonale“ (k=2) enthält nach (g) Summen der darüber liegenden ersten aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, denn: 1+2 = 3; 1+2+3 = 6; 1+2+3+4 = 10 usw.
und damit die sogenannten „Dreieckszahlen“

(i) Etwas „versteckt“ liegen die nach Leonardo da Pisa (auch Fibonacci, * 1180 (?) - † 1241(?)) benannten „**Fibonacci-Zahlen**“
1 ;1; 2=1+1 ;3=1+2 ; 5=2+3 ; 8;13; 21;34 ;... Die Summe der Einträge in den „flachen Diagonalen“ ergibt jeweils eine Fibonacci-Zahl . Als Beispiel sind auf der Seite die zweite, die vierte und die siebte „Flachdiagonale“ blau, die anderen rot gekennzeichnet: 3=F4 bzw. 13=F7



Pascalsches Dreieck	Σ	Σ'
1	$2^0 = 1$	0
1 1	$2^1 = 2$	0
1 2 1	$2^2 = 4$	0
1 3 3 1	$2^3 = 8$	0
1 4 6 4 1	$2^4 = 16$	0
1 5 10 10 5 1	$2^5 = 32$	0
1 6 15 20 15 6 1	$2^6 = 64$	0
1 7 21 35 35 21 7 1	$2^7 = 128$	0
1 8 28 56 70 56 28 8 1	$2^8 = 256$	0
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	$2^9 = 512$	0

Σ Die Zeilensumme im Pascalschen Dreieck liefert immer eine Potenz von 2.

Begründung: $(1 + 1)^n = 2^n$
Damit sind die Zahlen Koeffizienten von 1-er Potenzen

Σ' Die alternierende Zeilensumme im Pascalsche Dreieck ist immer 0.

Begründung: $(1 – 1)^n = 0^n$
Die Zahlen sind Koeffizienten von 1-er Potenzen mit wechselndem Vorzeichen, wegen gerader und ungerader Potenzen von (-1).

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Binomialverteilung

Definition
Die Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung für ein Merkmal, das z. B. aus zwei Ausprägungen, z. B. funktionsfähig/defekt, Wappen oder Zahl, oder blau/rot mit einer konstanten Erfolgswahrscheinlichkeit p für eine Ausprägung, z. B. defekt oder rot, annehmen kann.
Die Wahrscheinlichkeit mit der dieses Ereignis eintritt, wird mit P(X=) bezeichnet.

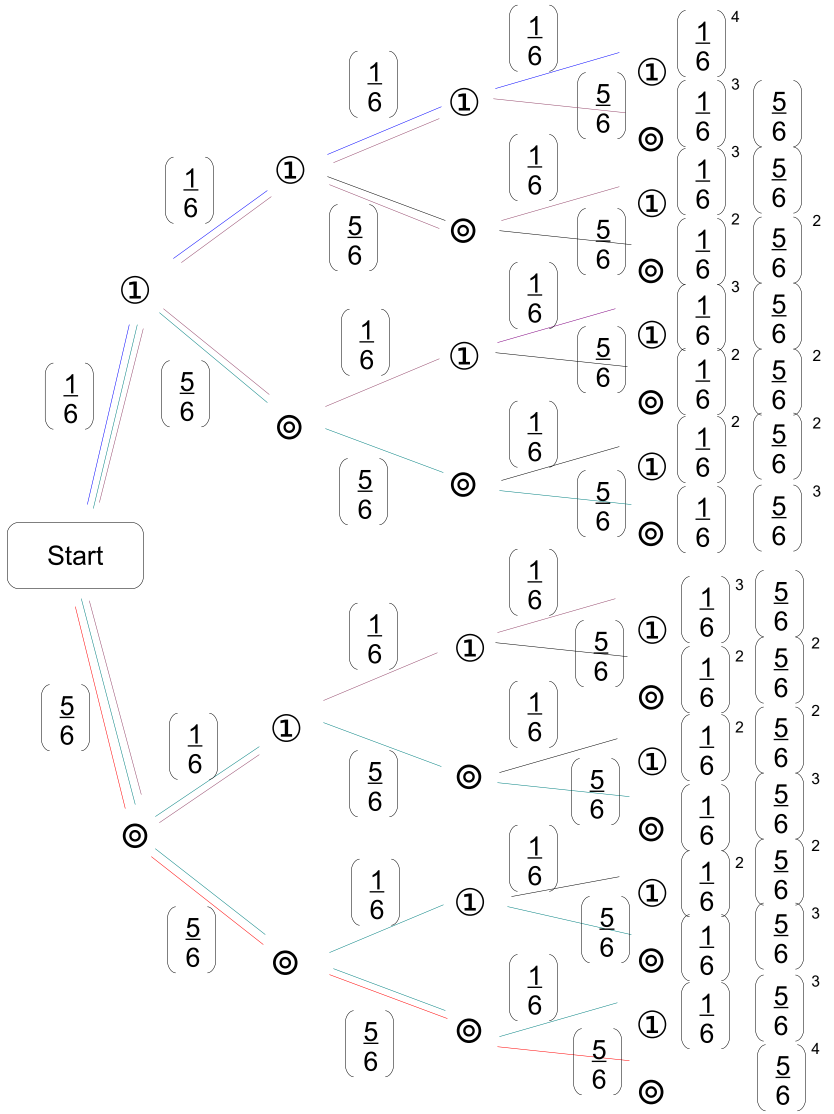
	P(„keine 1“) P(X=0)	P(„eine 1“) P(X=1)	P(zwei 1“) P(X=2)	P(„drei 1“) P(X=3)	P(„vier 1“) P(X=4)
Wie viele Pfade gehören zum Ereignis?	1	4	6	4	1
Wie sehen die Einzel-wahrscheinlich-keiten an jedem dieser Pfade aus?	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$
Gesamtwahr-scheinlichkeit für das Ereignis	$1\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$4\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)$	$6\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$4\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$1\left(\frac{1}{6}\right)^4$

Betrachtet man die beiden Teilbäume, so ergibt sich folgendes Bild:

oberer Teilbaum	0	1	3	3	1
unterer Teilbaum	1	3	3	1	0
aus der Summe ergibt sich:	0 + 1	1 + 3	3 + 3	3 + 1	1 + 0
	1	4	6	4	1

Dieses Bildungsgesetz ist bekannt aus dem Pascalschen Dreieck.

A und B spielen mit einem Würfel so, dass A gewinnen soll, wenn er bei 4 Würfen zweimal oder öfters eine 1 wirft; fällt die 1 nur einmal oder gar nicht, so gewinne B.
Wie groß ist das Verhältnis der Chancen?



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomialverteilung

Voraussetzungen zur Anwendung der Binomialverteilung:

- Die Ausprägung des Merkmalergebnisses muss zufällig sein, d. h., die Ausprägungen A oder B müssen voneinander unabhängig sein.
- Der Stichprobenumfang n entspricht der Anzahl der Merkmalsergebnisse, d.h., sie sind auf n festgelegt. Der Stichprobenumfang muss komplett “durchgeprüft” werden, um die Anzahl k zu erhalten.
- Die Wahrscheinlichkeit p und folglich auch für 1-p ist konstant.
- Es wird von einer Stichprobennahme mit Zurücklegen ausgegangen (siehe als Gegensatz hierzu hypergeometrische Verteilung). Ist der Stichprobenumfang n gegenüber dem Losumfang N klein, etwa $n < N/10$, kann in der Praxis von einer Stichprobennahme mit Zurücklegen ausgegangen werden.

Herleitung der Formel

Es sei eine Urne mit **N** Kugeln gegeben, von denen **M** weiß und **N-M** schwarz seien. Man zieht nun aus dieser Urne **n** Kugeln mit Zurücklegen, d.h. die Anzahl der weißen und schwarzen Kugeln in der Urne ist bei jedem Zug gleich. Die Frage ist nun, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass genau **k** weiße Kugeln gezogen werden. Dabei soll jede Kugel beim einmaligen Ziehen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen werden.

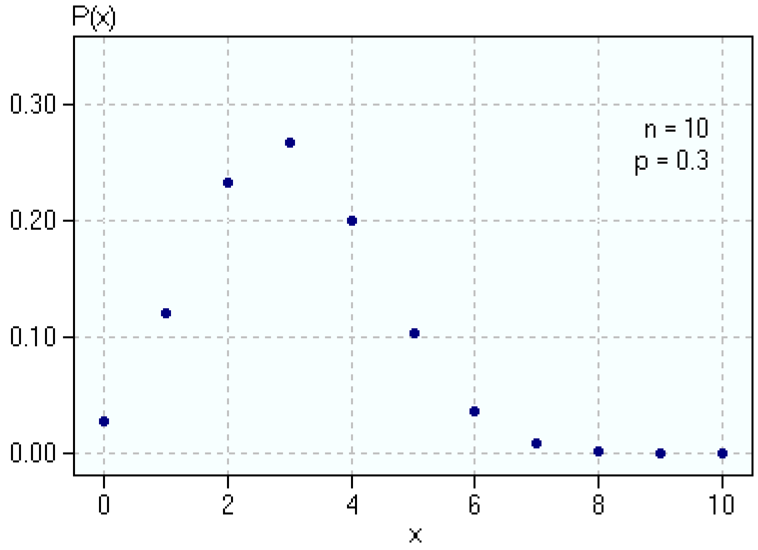
Betrachtet man das Zufallsexperiment als Laplace-Experiment entstehen im Ergebnis die **n** -Tupel aus Farben mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Es gibt nun N^n Möglichkeiten (mit Wiederholung und Beachtung der Reihenfolge), um überhaupt **n** Kugeln zu ziehen. Um genau **k** weiße und **n-k** schwarze Kugeln zu ziehen, hat man bei festgelegter Reihenfolge $M^k\,(N-M)^{n-k}$ Möglichkeiten. Da aber die Reihenfolge nicht interessiert, sondern nur die Tatsache, dass genau **k** weiße Kugeln gezogen werden, muß noch mit der Anzahl multipliziert werden. Die Anzahl ist $\binom{n}{k}$, denn die **k** gezogenen weißen Kugeln können wir in dem n -Tupel auf genau $\binom{n}{k}$ Plätze verschieden anordnen, da wir **n** Plätze für **k** Objekte haben. Es ergibt sich somit für die Zufallsvariable X, die einem **n**-maligen Ziehen (mit Zurücklegen) die Anzahl der weißen Kugeln zuordnet:

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\frac{M^k\,(N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $M/N = p$ führt das zu der Formel:

Grafische Darstellung



Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

$$P(k|p,n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(k|p,n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

n: Stichprobenumfang
k: Anzahl der Merkmalausprägungen A oder B (blau oder rot)
p: Konstante Erfolgswahrscheinlichkeit für A oder B
(1-p): Wenn p die konstante Erfolgswahrscheinlichkeit für A ist, dann ist (1-p) die konstante Erfolgswahrscheinlichkeit für B.
(1-p) wird oft durch q dargestellt.

Anzahl der Pfade bei n Versuchen

Die Binomialverteilung ist ein

- Ziehen mit Zurücklegen (mit Wiederholung)
- ohne Beachtung der Reihenfolge

Die Anzahl der Möglichkeiten wird deshalb durch eine
Kombination mit Wiederholung
charakterisiert.

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Alle k-Kombinationen, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können

Für die Binomialverteilung ist der Wert n = 2 zu setzen, da jedes Element zwei Merkmalsausprägungen hat: entweder Erfolg, oder Mißerfolg.
Für k ist die Anzahl der Ziehungen anzusetzen. Damit ist die Anzahl aller möglicher Zusammenstellungen aus der Formel:

$$\frac{(2+k-1)!}{k!\cdot} = \binom{2+k-1}{k} = \binom{2+k-1}{1}$$

zu ermitteln. Dabei bleibt unberücksichtigt, wie oft jeder dieser Kombinationen auftritt. Es wird nur die Frage beantwortet, welche Kombinationen entstehen können.

Beispiel

Es sollen die beiden Möglichkeiten je Ziehung durch s (schwarz) und w (weiß) gekennzeichnet werden. Für jeweils k Ziehungen gibt es folgende Möglichkeiten:

$k = 2 \Rightarrow \frac{(2+2-1)!}{2!\cdot} = \frac{3!}{2!} = 3$

ss sw ww

$k = 3 \Rightarrow \frac{(2+3-1)!}{3!\cdot} = \frac{4!}{3!} = 4$

sss ssw sww www

$k = 4 \Rightarrow \frac{(2+4-1)!}{4!\cdot} = \frac{5!}{4!} = 5$

ssss sssw ssww swww wwww

$k = 5 \Rightarrow\ = 6$

sssss ssssw sssww sswww swwww wwwww

Abitur in Mathematik: Stochastik		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Binomial-verteilung		

Anzahl der Pfade mit k Erfolgen bei n Versuchen

Bei einem n – stufigen Bernoulli – Versuch besteht jedes Element der Ergebnismenge aus n Folgeereignissen .z.B. EEMMEEEM ....EM.
Die Anzahl der Pfade mit k Erfolgen zu finden ist gleichbedeutend damit, aus der Ergebnismenge die Anzahl der Elemente zu finden, die k – mal unabhängig von der Reihenfolge einen Erfolg aufweisen.Man kann das auch so formulieren:

Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n Objekten unabhängig von der Reihenfolge auswählen?

Eine erste Antwort liefert die Formel der **Permutation**. n Elemente lassen

sich auf $n!$ Möglichkeiten anordnen.

Bei jeweils k Erfolgen sind die Elemente der k-Erfolge nicht unterscheidbar, aber auch die n-k Elemente der Nichterfolge lassen sich nicht unterscheiden.
Für eine **Permutation** von n Elementen, bei denen **jeweils k und n–k Elemente nicht unterscheidbar** sind gilt die Formel:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Damit ist die Definition der Binomialkoeffizienten gegeben.

> Die Anzahl der Pfade mit k Erfolgen bei einem n- stufigen Bernoulli- Versuch ist:
>
> $\binom{n}{k}$ wobei n die Anzahl der Versuche und k die Anzahl der Erfolge ist

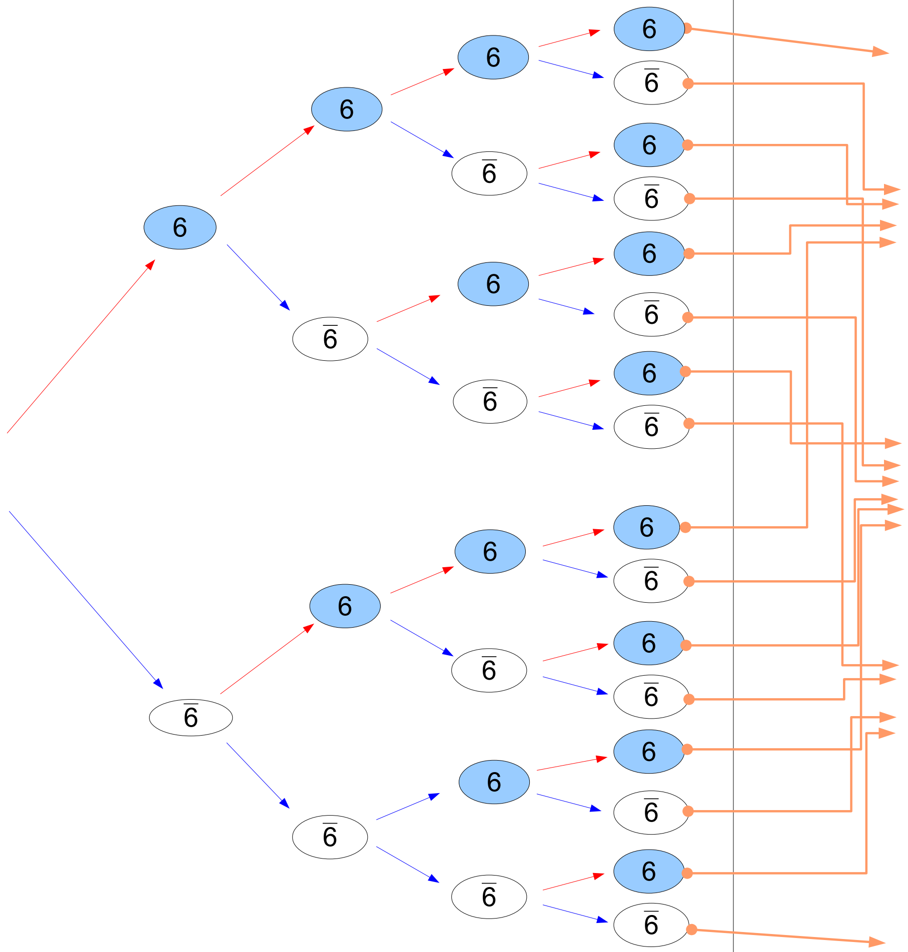
Bei der Anzahl der Pfade spielt es keine Rolle, wieviele Elemente von jeder Ausprägung vorhanden sind. Ob es positive Elemente 10 und negative Elemente 100, oder positive Elemente 45 und negative Elemente 5 gibt, hat darauf keinen Einfluss. Es wird nur die Frage gestellt: Auf welche Weise kann man k positive Elemente auf n verschiedenen Plätzen unterbringen. Die anderen Plätze sind dann zwangsläufig mit negativen Elementen besetzt.

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Beim Eingangsbeispiel galt n = 4. Für diese Anzahl ergaben sich folgende Erfolgsaussichten für das Würfeln von „6“:



1 Wurf 2 Würfe 3 Würfe 4 Würfe

Ereignisse des Wurfes 4

Der Baum enthält keine Wahrscheinlichkeiten, deshalb würde der Baum genau so aussehen, wenn es sich um einen Würfel mit 8 Zahlen, 12 Zahlen oder 4 Zahlen handelt,
oder um Billardkugel, die von 1 bis 11 durchnummeriert sind. Wichtig ist nur, dass vor jedem versuch wieder alle Billardkugeln zurückgelegt werden.

	k rote Pfeile	n–k blaue Pfeile
$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$	4	0
$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$	3	1
$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$	2	2
$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$	1	4
$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1$	0	4

4 Würfe

Abitur in Mathematik: Stochastik

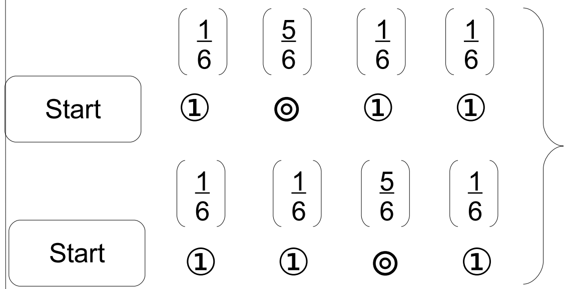
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Gesetze und Regeln

Wahrscheinlichkeit eines Pfades mit k Erfolgen bei n Versuchen

Die Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades mit. z.B. 3 Erfolgen und 1 Misserfolg ist immer die gleiche.



$$\left(\frac{1}{6}\right)^{3} \left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}$$

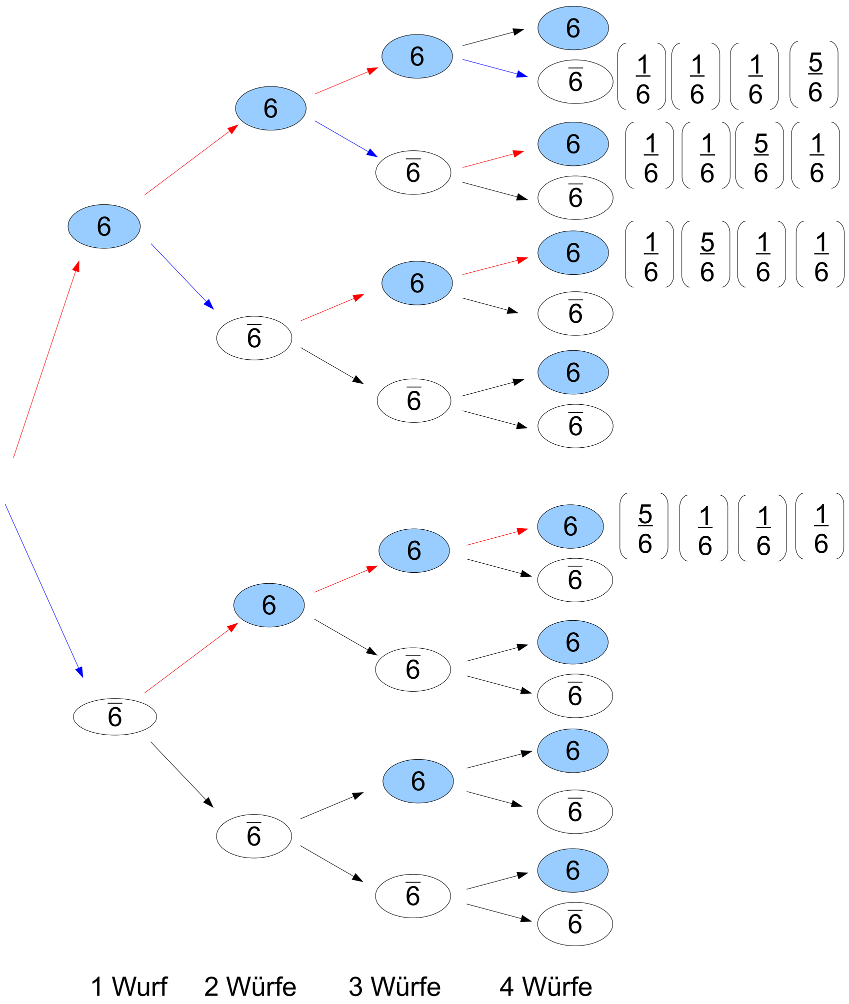
Bei jedem Pfad mit k Erfolgen tritt der Faktor der Erfolgswahrscheinlichkeit k mal auf und der Faktor der Mißerfolgswahrscheinlichhkeit n – k mal.
Das mehrfache Auftreten einen Faktors wird durch die Potenz angegeben.
Die Wahrscheinlichkeit für das k-malige Auftreten des positiven Ereignisses ist entlang jedes Pfades die gleiche. Die Pfade unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Faktoren, aber nicht in ihrer Anzahl.

> Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades mit k Erfolgen eines n- stufigen Bernoulli- Versuch ist:
>
> $\mathbf{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$ p Wahrscheinlichkeit von Erfolg
>
> k die Anzahl der Erfolge ist

Bei der Wahrscheinlichkeit spielt nur eine Rolle, wie viele von jeder Ausprägung vorhanden sind. Die Wahrscheinlichkeit ändert sich mit der Gesamtzahl aller Elemente und mit dem Verhältnis zwischen positiven und negativen Elementen.
Es spielt keine Rolle, wie oft gezogen werden soll, und wieviele positive Ereignisse erwartet werden.

Musterbeispiele

für k = 3 Erfolge:



Jeder Pfad für 3 Erfolge enthält 3 rote Pfeile und einen blauen Pfeil. Die Pfade unterscheiden sich nur in der Stelle, an der der blaue Pfeil auftritt. Jeder rote Pfeil steht für die Wahrscheinlichkeit 1/6 und jeder blaue Pfeil für die Wahrscheinlichkeit 5/6. Hier ändern sich in Abhängigkeit der Würfelflächen die Wahrscheinlichkeiten.

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Binomial-verteilung

Wahrscheinlichkeit für <u>genau</u> k Erfolge bei n Versuchen

- Bei einem **n** stufigen Bernoulli Versuch
- mit der Erfolgswahrscheinlichkeit **p**
- und der Misserfolgswahrscheinlichkeit **1- p**,
- gilt für die Wahrscheinlichkeit von **k** Erfolgen:

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Wahrscheinlichkeit für <u>höchstens</u> k Erfolge bei n Versuchen

Um diesen Wert zu berechnen muss man alle Wahrscheinlichkeiten von 0 Erfolgen bis k Erfolge aufaddieren.

$$P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k)$$

Diese Werte sind schriftlich nur sehr aufwendig auszurechnen. Dazu gibt es Tafelwerke oder den GTR. Dabei ist zu beachten, dass für P(X=k) und P(X≤k) unterschiedliche Funktionen zur Verfügung stehen, wie beim GTR, oder die Berechnung über ein und dieselbe Funktion läuft, bei der ein Parameter zu übergeben ist, der angibt, ob nur eine Einzelposition oder die Summe bis zu dieser Position berechnet werden soll, wie bei Excel.

Mathematisch gesehen kommt man damit zur Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion

$$F_{n;p}(k) = P(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Eigenschaften der Binomialverteilung

Die Binomialverteilung besitzt auch ein eigenes Symbol. Für ein Bernoulli-Experiment mit den Bezeichnungen (Länge n und p = P(A)) schreibt man anstelle von P(X=k) oft auch einfach B(n;p;k) oder b(n;p;k). Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass sofort klar ist, wie oft das Experiment wiederholt wird und welche Wahrscheinlichkeit das betrachtete Ereignis A hat. Eine Zufallsvariable, die durch die Binomialverteilung

$$\{ (k, P(X=k) = B(n;p;k)) \mid k = 0,1,2,\ldots n\}$$

gegeben ist, nennt man B(n;p) -verteilt.

Mit dieser Schreibweise ergibt sich die Rekursionsformel

$$B(n;p;k+1) = \frac{n-k}{k+1} \; \frac{p}{1-p} \; B(n;p;k)$$

und die Symmetriegleichung

$$B(n;1-p;n-k) = B(n;p;k)$$

(Die Schreibweise ist mal wieder nicht einheitlich, so dass auch folgende Form zu finden ist: $B_{n;p}(\{k\})$. Auf jeden Fall hat die Funktion der Binomial-verteilung drei Parameter als Übergabeliste: n; p und k)

Diese Gleichung kann man sich auch anschaulich klar machen: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A genau k-mal eintritt, ist natürlich genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass das Gegenereignis $\overline{A}$ genau (n–k) – mal eintritt.

Es seien X und Y zwei (stochastisch) unabhängige Zufallsvariablen. X sei $B(n_1;p)$ – und Y sei $B(n_2;p)$ – verteilt. Dann ist auch die Summe der beiden Zufallsvariablen wiederum binomialverteilt, und zwar $B(n_1+n_2; p)$ – verteilt.

Abitur in Mathematik: Stochastik		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**

Binomial-verteilung

Funktionsbilder der Binomialverteilung

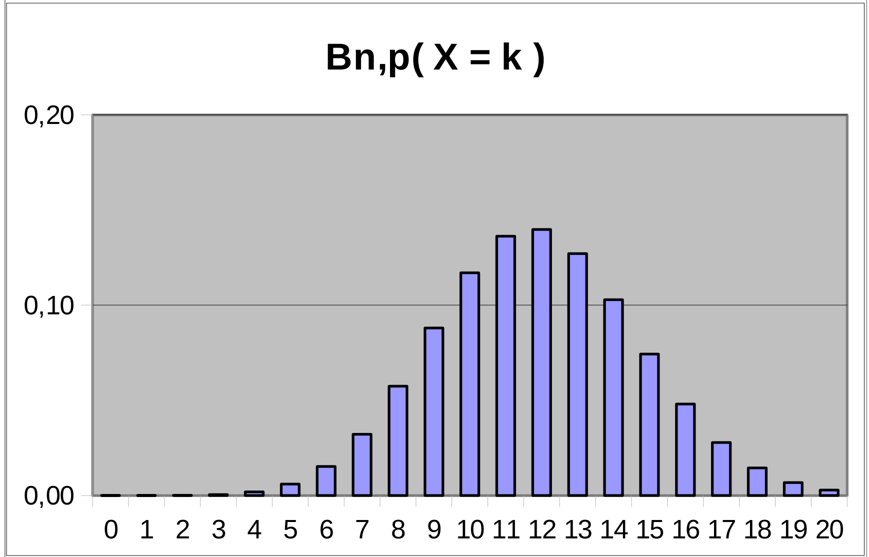
Wahrscheinlichkeitsfunktion

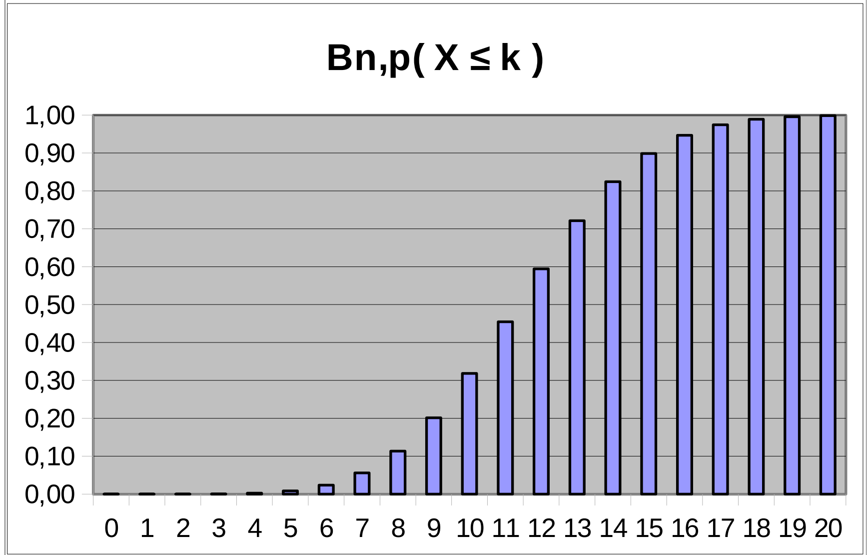
$$B_{n,p}(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Verteilungsfunktion

$$F_{n;p}(k) = B_{n,p}(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Für n = 36 und p = 0,33





Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Anwendung Einzelwahrscheinlichkeiten**	**Beispiel**

Binomialverteilung

Gesetze und Regeln

Anwendung Einzelwahrscheinlichkeiten

Die Binomialverteilung beschreibt den wahrscheinlichen Ausgang einer Folge von gleichartigen Versuchen, die jeweils nur zwei mögliche Ergebnisse haben (also eine Bernoulli-Verteilung aufweisen). Wenn das gewünschte Ergebnis E eines Versuches die Wahrscheinlichkeit p besitzt, und die Zahl der Versuche n ist, dann gibt die Binomialverteilung an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich insgesamt x-mal das Ereignis E einstellt.

Musterbeispiele

Beispiel

Eine Glühbirnenfertigung läuft mit einem konstanten Ausschußanteil von 5% (p = 0,05). Zur Qualitätsprüfung werden 5 Leuchtkörper (Stichprobenumfang n = 5) entnommen. Im Folgenden werden die Wahrscheinlichkeiten P für das Vorfinden von genau 0, 1, 2, 3, 4 und 5 defekte Glühbirnen berechnet:

a) P(genau 0):

$$P(0|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{0}\ 0{,}05^0\ (0{,}95)^{5-0} = 0{,}777 = 77{,}4\ \%$$

b) P(genau 1):

$$P(1|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{1}\ 0{,}05^1\ (0{,}95)^{5-1} = 0{,}204 = 20{,}4\ \%$$

c) P(genau 2):

$$P(2|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{2}\ 0{,}05^2\ (0{,}95)^{5-2} = 0{,}021 = 2{,}1\ \%$$

d) P(genau 3):

$$P(3|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{3}\ 0{,}05^3\ (0{,}95)^{5-3} = 0{,}0011 = 0{,}11\%$$

e) P(genau 4):

$$P(4|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{4}\ 0{,}05^4\ (0{,}95)^{5-4} = 2{,}97\ 10^{-5} = 2{,}97\ 10^{-3}\ \%$$

f) P(genau 5):

$$P(5|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{5}\ 0{,}05^5\ (0{,}95)^{5-5} = 3{,}13\ 10^{-7} = 3{,}13\ 10^{-5}\ \%$$

Lautet die Fragestellung “Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P höchstens 2 defekte Leuchtkörper in dem Stichprobenumfang n vorzufinden?” muss über die Wahrscheinlichkeitssumme PSum gegangen werden:

P(höchstens x) = P(0) + P(1) + P(2) + ... + P(x)
P(höchstens 2) = 0,774 + 0,204 + 0,021 = 0,999

Lautet sie hingegen “Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P mindestens 2 defekte Leuchkörper im Stichprobenumfang n vorzufinden?”, wird sie wie folgt beantwortet:

P(mindestens x) = 1- P(höchstens x-1)
P(mindestens 2) = 1- (0,774 + 0,204) = 0,022

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

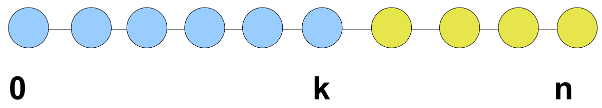
Thema: **Binomial-verteilung**

Gesetze und Regeln

Summierte Wahrscheinlichkeiten

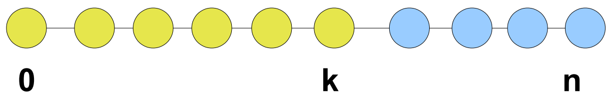
1. $P(X \le k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=k)$
$= F_{n;p}(k)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass **weniger als k** oder **höchstens k** (also weniger als k+1) Erfolge auftreten wird durch die Verteilungsfunktion aufsummiert.

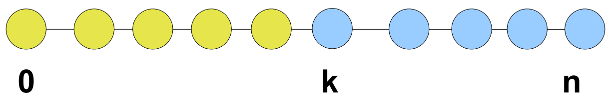


2. $P(X > k) = P(X=k+1) + P(X=k+2) + \ldots + P(X=n)$
$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k)]$
$= 1 - P(X \le k)$
$= 1 - F_{n;p}(k)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass **mehr als k** Erfolge auftreten, ist die Gegenwahrscheinlichkeit, dass k oder weniger als k Erfolge auftreten.



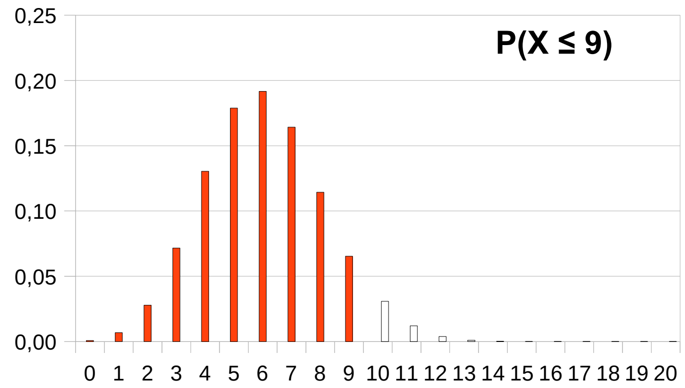
3. $P(X \ge k) = P(X=k) + P(X=k+1) + \ldots + P(X=n)$
$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k-1)]$
$= 1 - P(X \le k-1)$
$= 1 - F_{n;p}(k-1)$

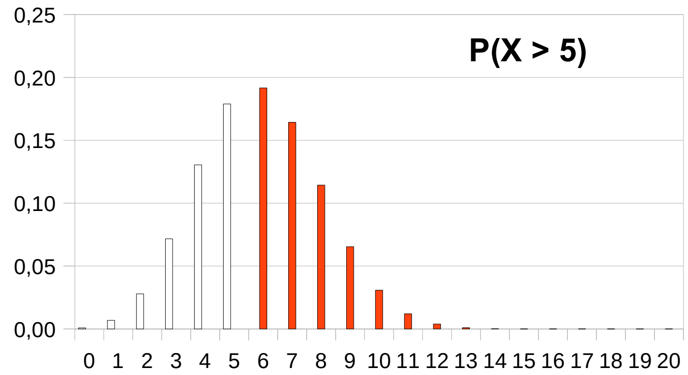


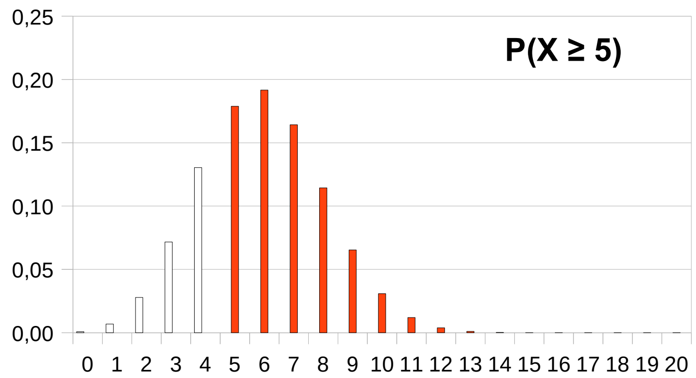
Die Wahrscheinlichkeit, dass **k oder mehr** Erfolge oder **mindestens k** Erfolge auftreten ist die Gegenwahrscheinlichkeit dazu, dass höchstens k-1 Erfolge auftreten.

Musterbeispiele

n = 20 **p = 0,3**







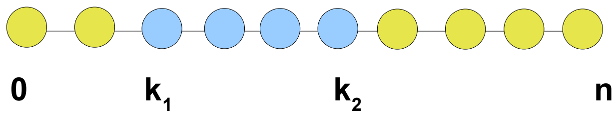
Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

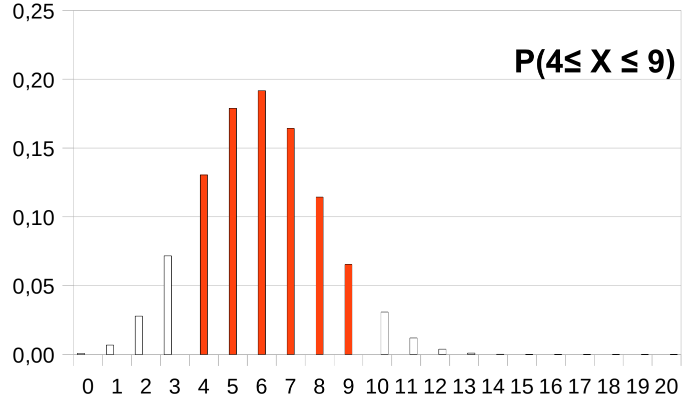
Binomial-verteilung

4. $P(k_1 \leq X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - [P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=k_1-1)]$
$= P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1 - 1)$
$= F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1 - 1)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass **weniger oder gleich k_2**, aber **mehr oder gleich k_1** Erfolge auftreten, lässt sich berechnen, indem man die erste Wahrscheinlichkeit, dass weniger oder gleich k_2 Erfolge auftreten, bestimmt und davon die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k_1 Erfolge auftreten subtrahiert.

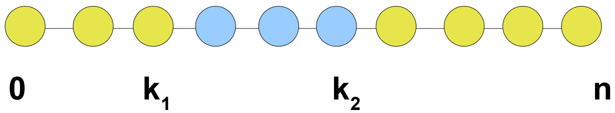


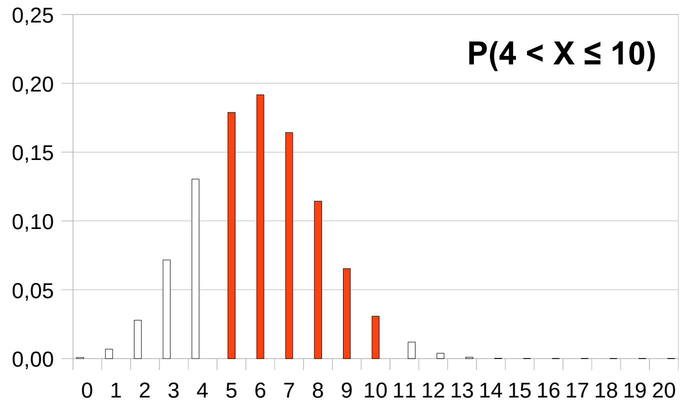
n = 20 p = 0,3



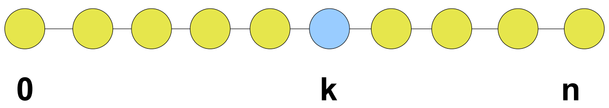
5. $P(k_1 < X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - [P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=k_1)]$
$= P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1)$
$= F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1)$

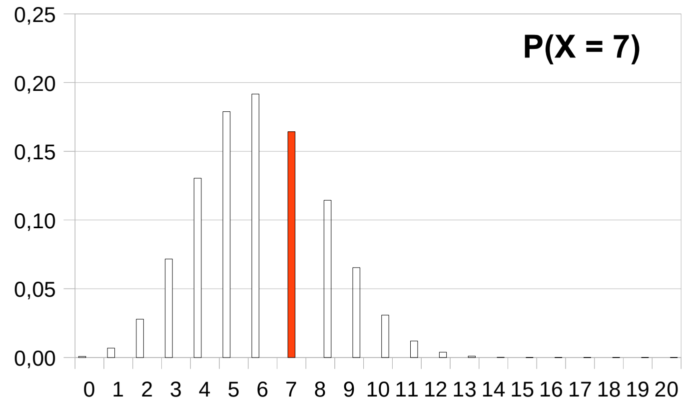
Die Wahrscheinlichkeit ist wie unter 4 zu berechnen, jedoch ist diesmal die Wahrscheinlichkeit für $X=k_1$ auszuschließen, deshalb ist k_1-1 durch k_1 zu ersetzen.





6. $P(X=k) = P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=k-1) + P(X=k)$
$- [P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=k-1)]$
$= P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$
$= F_{n;p}(k) - F_{n;p}(k-1)$





Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Anwendung summierte Wahrscheinlichkeiten

Da die Binomialverteilung eine diskrete Verteilung ist, dh. es existieren nur für ganzzahlige Werte von k Werte für die Wahrscheinlichkeit P(X=k) kann man relativ leicht auch Summen von Wahrscheinlichkeiten berechnen.
Dabei ist zu berücksichtigen, für welchen Ausdruck das Gleichheitszeichen zugelassen ist. Steht die Frage:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis **mindestens k** ist, dann lautete die Formel: **$P(X \geq k)$** und es sind alle Wahrscheinlichkeiten bis k zu summieren.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis **höchstens k**, dann lautet die Formel: **$P(X \leq k)$** und es sind alle Wahrscheinlichkeiten von k bis n zu addieren.

Wichtige Einschränkungen

- Es gibt keine Möglichkeit mit Tabellen oder im GTR installierten Funktionen die Wahrscheinlichkeit für „**kleiner** eine Anzahl“ zu berechnen, es gibt immer nur die Möglichkeit die Wahrscheinlichkeit für „**kleiner und gleich** einer Anzahl“ zu bestimmen. Deshalb muss bei Fragestellungen nach „kleiner“ mit einem k-Wert der um 1 niedriger liegt gerechnet werden.
- Es gibt keine Möglichkeit mit Tabellen oder im GTR installierten Funktionen die Wahrscheinlichkeit für „**größer** eine Anzahl“ zu berechnen, es gibt immer nur die Möglichkeit die Wahrscheinlichkeit für „**kleiner und gleich** einer Anzahl“ zu bestimmen. Deshalb muss bei Fragestellungen nach **mindestens** immer mit dem Gegenereignis gearbeitet werden. Der Wert für k ist dann entsprechend festzulegen.

Beispiel

Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 schwarzen Kugeln werden 10 Kugeln mit Zurü④cklegen entnommen. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

n = 10; p = 0,3 (weiß); q = 0,7 (nicht weiß)

1. Genau 3 weiß①e Kugeln werden gezogen:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0{,}3^{3} \cdot 0{,}7^{7} = 26{,}7\ \%$$

2. keine weiß①e Kugel wird gezogen:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}3^{0} \cdot 0{,}7^{10} = 2{,}83\ \%$$

3. H⑦öchstens 1 weiß①e Kugeln wird gezogen:

$$P(X \leq 1) = P(X{=}0) + P(X{=}1)$$
$$= \binom{10}{0} 0{,}3^{0} \cdot 0{,}7^{10} + \binom{10}{1} 0{,}3^{1} \cdot 0{,}7^{9} = 10{,}4\ \%$$

4. Hö⑦chstens 9 wei①ße Kugeln werden gezogen:

$$P(X \leq 9) = 1 - P(X{=}10) = 1 - \binom{10}{10} 0{,}3^{10} \cdot 0{,}7^{0} = 99{,}99\ \%$$

5. Mehr als 5 aber hö⑦chstens 7 wei①ße Kugeln werden gezogen:

$$P(5 < X \leq 7) = P(X{=}6) + P(X{=}7)$$
$$= \binom{10}{6} 0{,}3^{6} \cdot 0{,}7^{4} + \binom{10}{7} 0{,}3^{7} \cdot 0{,}7^{3} = 4{,}58\ \%$$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

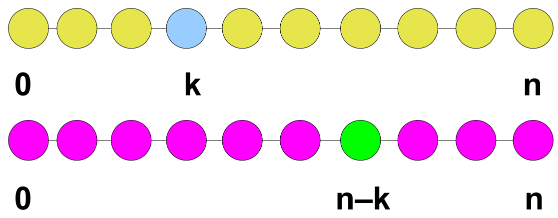
Gegenwahrscheinlichkeiten

Zusammenhänge des Ereignisses X und des Gegenereignisses Y bei der Binomialverteilung

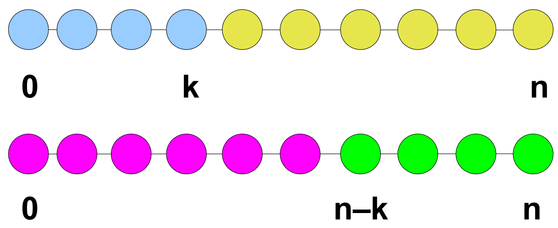
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Erfolge auftreten, lässt sich berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeit dass mindestens k Erfolge auftreten bestimmt und dann die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens k–1 Erfolge auftreten subtrahiert

X = Ereignis
Y = Gegenereignis
n = Länge der Bernoulli-Kette (Anzahl der Versuche)
p = Wahrscheinlichkeit für X $\quad \overline{Y}$
q = Wahrscheinlichkeit für Y $\quad \overline{X}$
k = Anzahl der Treffer

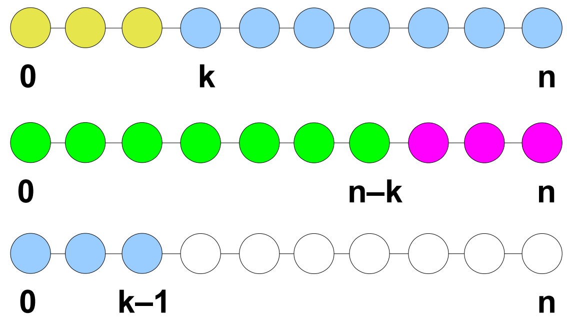
7. $P^n_p(X = k)$
=
$P^n_q(Y = n–k)$



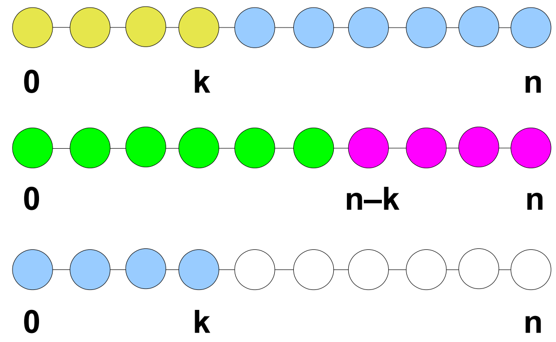
8. $P^n_p(X \leq k)$
=
$P^n_q(Y \geq n–k)$



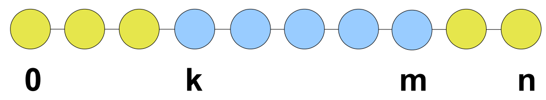
9. $P^n_p(X \geq k)$
=
$P^n_q(Y \leq n–k)$
=
$1 – P^n_p(X \leq k–1)$



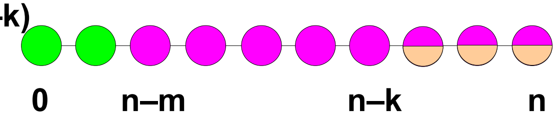
10. $P^n_p(X > k)$
=
$P^n_q(Y < n–k)$
=
$1 – P^n_p(X \leq k)$



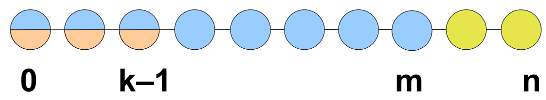
11. $P^n_p(k \leq X \leq m)$



=
$P^n_q(n–m \leq Y \leq n–k)$



=
$P^n_p(X \leq m) – P^n_p(X \leq k–1)$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Benutzung von Binomialtabellen

Für die Binomialverteilung existieren eine Menge von Tabellen, mit denen man vor dem Zeitalter der Taschenrechner die einzelnen Werte berechnen musste. Dabei sind Tabellen Für die Wahrscheinlichkeit P(X=k) und P(X≤k) zu unterscheiden. Im zweiten Fall handelt es sich um die kumulierten Wahrscheinlichkeiten (= Verteilungsfunktion. Dabei treten jedoch zwei Probleme auf:

(1) Was ist, wenn man P(X>k) ausrechnen muss? Diese Werte stehen in keiner Tabelle!

(2) Es sind nur Wahrscheinlichkeiten kleiner als 0,5 tabelliert. Was ist, wenn p>0,5 gilt?

Summierte Binomialverteilung (n=10; 20; 25) $P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

n	k	p 0,01	0,05	0,1	$\frac{1}{6}$	0,2	0,25	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5	*k*	*n*
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1615	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0060	0,0010	*9*	*10*
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,4845	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0464	0,0107	*8*	
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,7752	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,1673	0,0547	*7*	
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,9303	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,3823	0,1719	*6*	
	4		0,9999	0,9984	0,9845	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,6331	0,3770	*5*	
	5		1,0000	0,9999	0,9976	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,8338	0,6230	*4*	
	6			1,0000	0,9997	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9452	0,8281	*3*	
	7				1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9877	0,9453	*2*	
	8					1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9893	*1*	
	9							1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	*0*	
	0	0,8179	0,3585	0,1216	0,0261	0,0115	0,0032	0,0008	0,0003	0,0000	0,0000	*19*	
	1	0,9831	0,7358	0,3917	0,1304	0,0692	0,0243	0,0076	0,0033	0,0005	0,0000	*18*	
	2	0,9990	0,9245	0,6769	0,3287	0,2061	0,0913	0,0355	0,0176	0,0036	0,0002	*17*	
	3	1,0000	0,9841	0,8670	0,5665	0,4114	0,2252	0,1071	0,0604	0,0160	0,0013	*16*	
	4		0,9974	0,9568	0,7687	0,6296	0,4148	0,2375	0,1515	0,0510	0,0059	*15*	
	5		0,9997	0,9887	0,8982	0,8042	0,6172	0,4164	0,2972	0,1256	0,0207	*14*	

(1)

Offensichtlich gilt: P (X > k) + P(X ≤ k) = 1.
In Worten: X ist immer entweder größer als k oder kleiner/gleich k. Man kann also P(X > k) durch 1 – P(X ≤ k) ausdrücken (und ausrechnen, Gegenwahrscheinlichkeit!).
Zu den Gegenwahrscheinlichkeiten beachte man die vorhergehenden Seiten.

Beispiel zu (1):

Der Tabelle entnimmt man etwa: $P_{p=0,25}(X \le 3) = 0,776$. Es gilt deshalb: P(X > 3)= 1 – 0,776 = 0,224. Mit dem „>“, „<“ und „≤“ muss etwas aufgepasst werden. Der Wert 3 in unserem Beispiel darf nicht „doppelt“ vorkommen, sondern nur in einem Intervall.
Ist etwa der Wert für P(X ≥ 3) gefragt, dann ist aus der Tabelle $P_{p=0,25}(X \le 2) = 0,5256$ abzulesen, da P(X ≥ 3) = 1 – P(X ≤ 2). Da es sich um eine diskrete Verteilung handelt, gibt es zwischen 2 und 3 keine weiteren Werte.

(2)

Wir wollen einen Wert für p = 0,75 ausrechnen. Aber für diese Trefferwahrscheinlichkeit gibt es keine Tabelle. Man betrachtet deshalb die „nicht-Treffer“ – also die Ereignisse mit der Wahrscheinlichkeit p = 1 – 0,75 = 0,25. Bei n Versuchen k Treffer zu haben ist offensichtlich genauso wahrscheinlich, wie n-k „nicht-Treffer“ zu haben!
Für das Ereignis wird das Gegenereignis genommen und für die entsprechende Wahrscheinlichkeit die Gegenwahrscheinlichkeit q = 1 – p.

Beispiel zu (2):

Betrachten wir einen Versuch mit n=10. Wir wollen wissen, wie wahrscheinlich weniger/gleich 4 Treffer sind, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,75 beträgt.
Wir könnten also ebenso nach mehr oder gleich 6 „nicht Treffern“ fragen (wegen 6 = 10–4). Deren Wahrscheinlichkeit ist natürlich p = 1 – 0,75 = 0,25.
Also: $\mathbf{P_{p=0,75}(X \le 4) = P_{p=0,25}(X \ge 6)}$.
(siehe dazu auf der Seite „Gegenwahrscheinlichkeit“ Nummer 8)
Für den p = 0,25 Wert gibt es jedoch eine Tabelle. Jetzt muss nur noch das „≥“ in ein „≤“ verwandelt werden.
$\mathbf{P_{p=0,25}(X \ge 6) = P_{p=0,25}(X \le 5)}$

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomialverteilung

Gesetze und Regeln

Binomiale Bäume

Wendet man bei solchen Bäumen den üblichen dreischrittigen Lösungsansatz:

(1) Genaue Formulierung des interessierenden Ereignisses E, von dem die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden soll.
(2) Zerlegung des interessierenden Ereignisses in Teilereignisse anhand eines Baumdiagramms.
(3) Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der interessierenden Pfade – P(E).

stößt man auf spezielle Mammutbäume, bei denen jeder Knoten genau 2 Nachfolger mit jeweils gleichbleibender Astwahrscheinlichkeit hat (Bernoulli-Kette). Es müssen nur wenige Stufen des Baumes skizziert werden, um zu erkennen, dass hier das Modell der Binomialverteilung verwendet werden kann. Auch die Zufallsvariable X und die benötigten Parameter ergeben sich anhand der Baumskizze. Damit ist geklärt, dass P(E) mit $Bin_{15;0,14}$ $(X \le 5)$ bestimmt werden kann.

$1 \cdot 0{,}86^{15} + 15 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86^{14} + 105 \cdot 0{,}14^{2} \cdot 0{,}86^{13} + 455 \cdot 0{,}14^{3} \cdot 0{,}86^{12} + 1365 \cdot 0{,}14^{4} \cdot 0{,}86^{11}$

(Zur Bestimmung der Koeffizienten siehe rechte Seite)

$= 0{,}1041 + 0{,}2542 + 0{,}2897 + 0{,}2044 + 0{,}0993$
$= 0{,}9521$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit war die Gegenwahrscheinlichkeit:
$1 - 0{,}9521 = 0{,}04785 = 4{,}78\ \%$

Natürlich ist an dem Beispiel sofort die Binomialverteilung zu erkennen. Allerdings ist zu beachten, dass die Lösung des Problems ausschließlich aus der Theorie des Baumdiagramms entstanden ist:

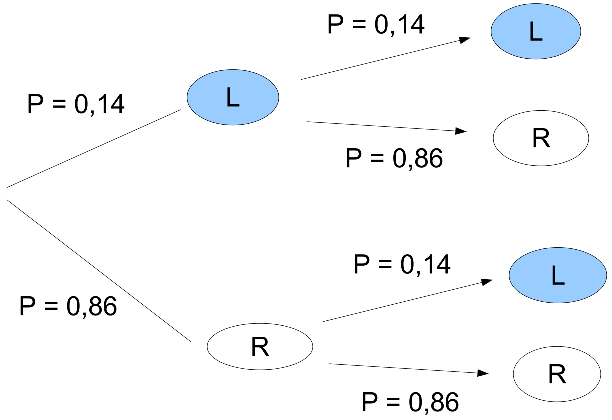
Die **Wahrscheinlichkeiten** entstehen als Produkt aus der Anzahl der jeweiligen Fälle. Jeder auftretende Linkshänder hat eine Wahrscheinlichkeit von 0,14 und jeder auftretende Rechtshänder eine Wahrscheinlichkeit von 0,86.

Die Anzahl entsteht durch Permutation von 15 Personen (=15!), wobei je nach Anzahl der Linkshänder 1,2,3,4 Elemente ununterscheidbar sind, also /LH! und der Anzahl der Rechtshänder, die ebenfalls ununterscheidbar sind /RH!.

Musterbeispiele

Der Anteil der Linkshänder betrage 14%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 15 Personen mindestens 5 Linkshänder sind?

(1) E: mind. 5 von 15 Personen sind Linkshänder



Für mindestens 5 Linkshänder ist das Gegenereignis weniger als 5 Linkshänder

Wahrscheinlichkeit	Anzahl
0 Linkshänder 15 Rechtshänder $0{,}86 \cdot 0{,}86 \cdot \ldots \cdot 0{,}86$ $= 0{,}86^{15}$	$\frac{15!}{0!15!} = 1$
1 Linkshänder 14 Rechtshänder $0{,}14 \cdot 0{,}86 \cdot 0{,}86 \cdot \ldots \cdot 0{,}86$ $= 0{,}14 \cdot 0{,}86^{14}$	$\frac{15!}{1!14!} = 15$
2 Linkshänder 13 Rechtshänder $0{,}14 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86 \cdot \ldots \cdot 0{,}86$ $= 0{,}14^{2} \cdot 0{,}86^{13}$	$\frac{15!}{2!13!} = 105$
3 Linkshänder 12 Rechtshänder $0{,}14 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86 \cdot \ldots \cdot 0{,}86$ $= 0{,}14^{3} \cdot 0{,}86^{12}$	$\frac{15!}{3!12!} = 455$
4 Linkshänder 11 Rechtshänder $0{,}14 \cdot \ldots \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86 \cdot \ldots \cdot 0{,}86$ $= 0{,}14^{4} \cdot 0{,}86^{11}$	$\frac{15!}{4!11!} = 1365$

Treffo Lernen
Christina Strauch

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Anwendung summierter Wahrscheinlichkeiten

Berechnung der Länge einer Bernoullikette

Auch bei Umkehraufgaben kann an dem baumorientierten 3-Schritt festgehalten werden. Wenige Stufen des Baumes erbringen den Nachweis, dass dieses Problem im Modell der Binomialverteilung gelöst werden kann und liefern Zufallsvariable und Parameter.

Für jedes n läßt sich eine Verteilungsfunktion $F_{n;p}(k)$ aufstellen, die folgendes Aussehen haben:

für n = 2 $\quad \binom{2}{0}p^0q^2 + \binom{2}{1}p^1q^1 + \binom{2}{2}p^2q^0$

für n = 3 $\quad \binom{3}{0}p^0q^3 + \binom{3}{1}p^1q^2 + \binom{3}{2}p^2q^1 + \binom{3}{3}p^3q^0$

für n = 4 $\quad \binom{4}{0}p^0q^4 + \binom{4}{1}p^1q^3 + \binom{4}{2}p^2q^2 + \binom{4}{3}p^3q^1 + \binom{4}{4}p^4q^0$

für n = 5 $\quad \binom{5}{0}p^0q^5 + \binom{5}{1}p^1q^4 + \binom{5}{2}p^2q^3 + \binom{5}{3}p^3q^2 + \binom{5}{4}p^4q^1 + \binom{5}{5}p^5q^0$

Außerdem ist zu berücksichtigen, dass die Verteilungsfunktion F die Wahrscheinlichkeiten von 0 bis k aufsummiert.

$$F_{n;p}(k) = P(X \le k)$$

Die Aufgabenstellung **höchstens** führt immer zur Verteilungsfunktion F:
$F(k) = P(X \le k)$

$$\boxed{\binom{5}{0}p^0q^5 + \binom{5}{1}p^1q^4 + \binom{5}{2}p^2q^3 + \binom{5}{3}p^3q^2} + \binom{5}{4}p^4q^1 + \binom{5}{5}p^5q^0$$

Damit wird von dieser Funktion die Fragestellung abgedeckt:
Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass bei n Versuchen
höchstens
k Erfolge auftreten.

Die Aufgabenstellung **mindestens** führt immer zur **Gegenwahrscheinlichkeit**, da es keine Funktion für
$P(X \ge k)$
und diese Berechnung auf
$1 - P(X \le k-1)$
zurückgeführt werden muss.

Von dieser Funktion scheinbar nicht abgedeckt wird die Fragestellung:
Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass bei n Versuchen
mindestens
k Erfolge auftreten.

$$P(X \ge k)$$

für die Werte n = 5 und k = 3 ergeben sich aus der linken Zusammenstellung:

$$\binom{5}{0}p^0q^5 + \binom{5}{1}p^1q^4 + \binom{5}{2}p^2q^3 + \boxed{\binom{5}{3}p^3q^2 + \binom{5}{4}p^4q^1 + \binom{5}{5}p^5q^0}$$

Zu dieser Fragestellung ist das Gegenereignis:
Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass bei 5 Versuchen
höchstens
2 Erfolge auftreten.

Damit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis und der gleichen Funktion F bestimmt werden.

$$P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$$
$$= 1 - F_{n;p}(k-1)$$

(siehe dazu auch“Binomialverteilung Eigenschaften“)

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Binomial-verteilung

Umkehrprobleme Binomialer Bäume

Gegeben p und P; Gesucht ist n

Berechnung der Gesamtanzahl

Beispiel

Eine häufige Fragestellung lautet:
Ab welchem n liegt mit **mindestens** 90%-iger Wahrscheinlichkeit **wenigstens ein** Treffer vor, gegeben p = 0,3?

Lösung:
(Für die Wahrscheinlichkeit „mindestens 1“ ist die Gegenwahrscheinlichkeit „kein“.)

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$$

$$F_{n;p}(k) = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \ \dots \ + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q^1 + \binom{n}{n} p^n q^0$$

Damit führt die Fragestellung nach P(X = 0) zum **ersten Element der Summe**

$$1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 1 - 1 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{n-0}$$

Da der Wert des Binomialkoeffizienten = 1 (alle Binomialkoeffizienten „ … über 0“ führen zu einem Wert =1) und die Potenz von p dazu führt, dass p^0 =1 ebenfalls nicht geschrieben werden braucht, führt der Ausdruck zu einer Potenz der Gegenwahrscheinlichkeit.

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}7^n \geq 0{,}9$$
$$\Rightarrow \ n \geq 6{,}5 \text{ mindestens } n = 7$$

Diese Gleichung läßt sich noch über den Logarithmus nach n auflösen. Da beim Auflösen der Gleichung durch einen Logarithmus dividiert werden muss, der kleiner als 0 ist (alle Logarithmen zwischen 0 und 1 sind negativ) dreht sich das Ungleichheitszeichen bei der Division um.

Beispiel

Ab welchem n liegt mit **mindestens** 90%-iger Wahrscheinlichkeit **wenigstens zwei** Treffer vor, gegeben p = 0,3?

$$1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n - \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = 1 - 1\cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{n-0} - n\cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{n-2}$$
$$= 1 - 0{,}7^n - n\ 0{,}3 \cdot 0{,}7^n \cdot 0{,}7^{-2}$$
$$= 1 - 0{,}7^n\ (1 + n\ 0{,}3 \cdot 0{,}7^{-2})$$

Damit ist das normale schriftliche Rechnen vorbei. Diese Gleichung lässt sich per Hand nicht auflösen. Hier muss mit der Verteilungs-funktion gearbeitet werden.

$$P(X\geq 2) \quad = \quad 1 - P_{n;0,3}(X \leq 1) \quad \geq \quad 0{,}9$$
$$P(X\leq 1) \quad = \quad F_{n;0,3}\ (1) \quad \leq \quad 0{,}1$$

Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

$$\boxed{F_{n;p}\ (k) = F(n;p;k)}$$

$$F_{n;0,3}\ (1) = F(n;0{,}3;1)$$

(Wenn die Wahrscheinlichkeit für ≥ 2 90 % betragen soll, ist die Wahrscheinlichkeit für ≤ 1 10%. Es ist deshalb das Gegenereignis zu wählen, weil die Funktion F die Werte X ≤ k angibt.)

Jetzt ist für verschiedene n die Wahrscheinlichkeitsfunktion F für den Wert k=1 und p = 0,3 aufzulisten und zu prüfen, für welches n der Funktionswert kleiner als 0,1 ist

(Hier kann nicht mehr direkt gerechnet werden. Die Lösung ist nur noch über zielgerichtetes Probieren möglich, das in einer Liste dargestellt wird.

n=10	F(10;0,3;1) = 0,1493
n=11	F(11;0,3;1) = 0,1130
n=12	F(12;0,3;1) = 0,0850

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Hinweis zu den folgenden beiden Seiten

Auf den folgenden Seiten ist das nebenstehende Beispiel sehr ausführlich graphisch und rechnerisch durchgerechnet. Auf der nächsten Seite werden die Wahrscheinlichkeiten für den ersten und zweiten Wurf ermittelt, auf der darauf folgenden Seite die Wahrscheinlichkeiten für die Würfe 3 und 4. Zu allen Werten ist erkennbar, wie sie entstehen. Es wird empfohlen die Werte alle mit dem GTR nachzurechnen, um den Lösungsweg zu verstehen.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten $\binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$

entsprechen der Funktion B(n;p;k)

$$\binom{1}{1} \frac{1}{6}^{1} \frac{5}{6}^{0}$$

B(1;0,666; 1)

= $0,166\overline{6}$

Die summierte Wahrscheinlichkeit

$P(X \geq 2) = 1 - F(1)$

entsteht durch aufsummieren der einzelnen B Funktionswerte vom unteren Rand der Seite, da dort die Position für k=0 liegen.

Am unteren Rand sind die Wahrscheinlichkeiten für „in keinem Wurf eine 6“ Damit gibt es keine günstiges Ereignis, also k=0

F(2;0,666; 1)

= 0,9722

B(2;0,666; 1)

= $0,277\overline{7}$

B(2;0,666; 0)

= $0,694\overline{4}$

Beispiel

Wie oft muss man einen gerechten Würfel mind. werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 95% mind. 3-mal eine „6“ zu erhalten?

(1) E: Man erhält mindestens 3-mal eine „6“

$P(X \geq 2) \geq 0{,}95$

$Bin_{n;\,0,167}(X \geq 2) \geq 0{,}95$

Es ist die summierte Binomialfunktion (Verteilungsfunktion) zu verwenden

$Bin_{n;\,0,167}(X \geq 2) = 1 - F_{n;\,0,167}(1) \geq 0{,}95$

Die summierte Binomialfunktion arbeitet aber mit $X \leq c$

$1 - F_{n;0,167}(X \leq 1) \geq 0{,}95$

$F_{n;0,167}(X \leq 1) \leq 0{,}05$

Gesucht ist also der Wert n, ab dem die Verteilungsfunktion F für die Werte p = 1/6 und und k = 2 einen Funktionswert kleiner als 0,05 liefert.

Die Rechnung für die ersten vier Würfe zeigt, dass der Wert der Funktion F(n; 1/6 ; 1) stetig abnimmt:

F(2; 1/6 ; 1) = 0,9722
F(3; 1/6 ; 1) = 0,9259
F(4; 1/6 ; 1) = 0,8680

Damit ist die Berechnung fortzusetzen, bis auf der rechten Seite ein Wert kleiner als 0,05 steht. Da eine explizite Auflösung nach n nicht möglich ist, hilft nur, in der Funktion F den Wert für n weiter zu erhöhen und zu kontrollieren, ab wann der Funktionswert kleiner als 0,05 beträgt.

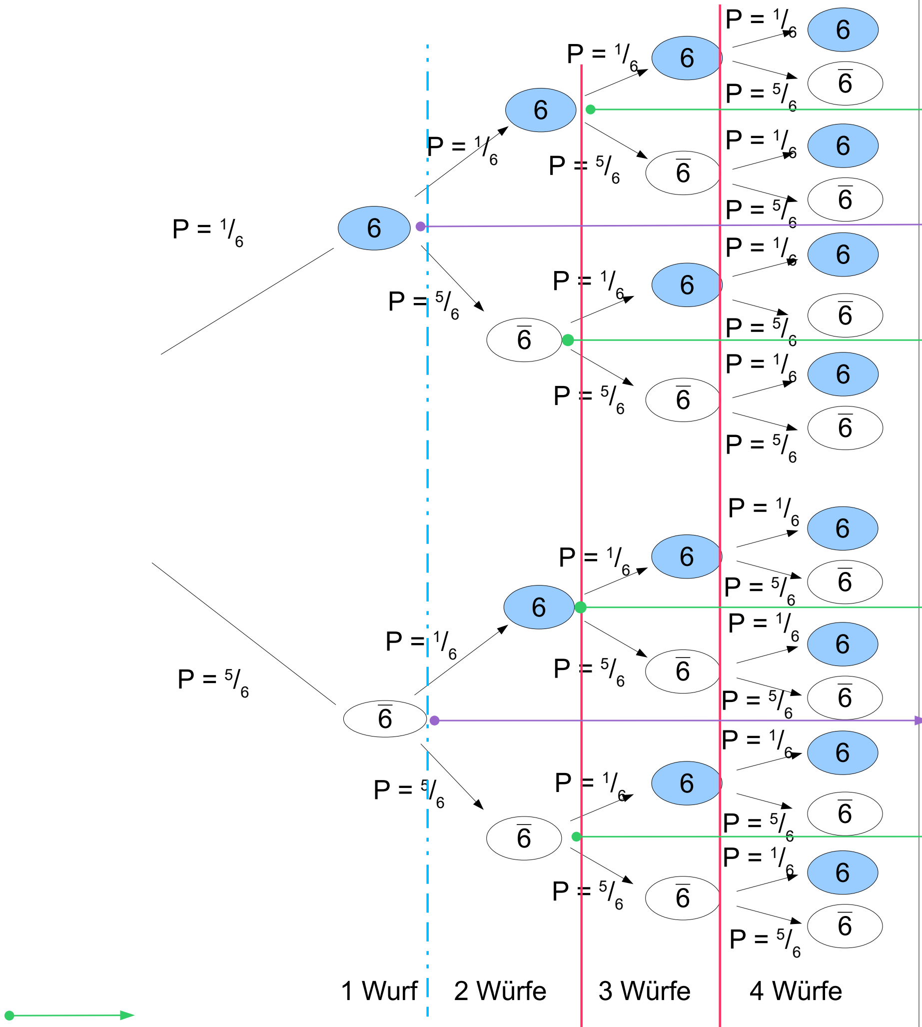
Dieser Wert wird für n = 27 erreicht. Die Berechnung sollte mit dem GTR unbedingt gemacht werden, um die Systematik zu erkennen.

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Erster und zweiter Wurf



Der Anfang eines jeden solchen Pfeiles liegt bei einem Ereignis des 2. Wurfes.
Das Ende des Pfeiles bei den Wahrscheinlichkeiten, die zu diesem Pfad gehören.
Die Anzahl der Pfeile ist die Anzahl der Ereignisse mit gleichen Wahrscheinlichkeiten, diese Anzahl wird durch den jeweils davor stehenden Binomialkoeffizienten bestimmt.

Musterbeispiele

B(1;0,166; k) | **B(2;0,166; k)**

1 Wurf:

$\binom{1}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^0$

B(1;0,166; 1)
= 0,166$\overline{6}$

$\binom{1}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^1$

B(1;0,166; 0)
= 0,83$\overline{3}$

2 Würfe:

$\binom{2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0$

B(2;0,166; 2)
= 0,027$\overline{7}$

F(2;0,166; 1)
= 0,9722

$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1$

B(2;0,166; 1)
= 0,277$\overline{7}$

+

$\binom{2}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^2$

B(2;0,166; 0)
= 0,694$\overline{4}$

+

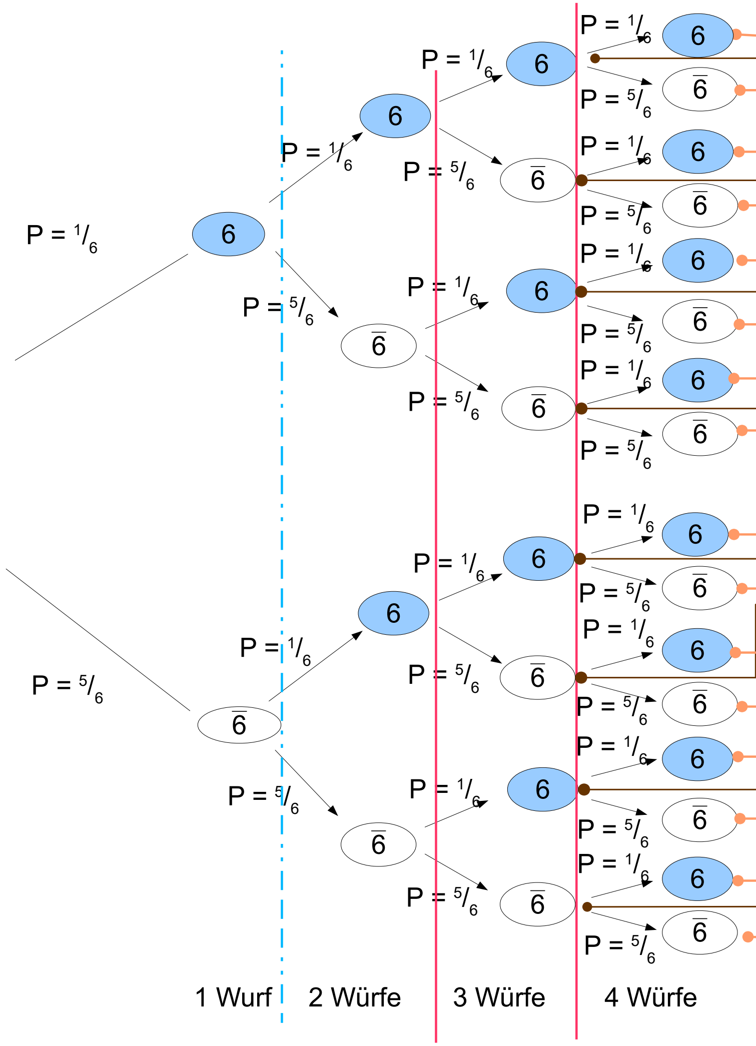
1 Wurf | 2 Würfe

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Dritter und vierter Wurf



Ereignisse des Wurfes 3

Ereignisse des Wurfes 4

Die Bedeutung der Pfeile auf der vorhergehenden Seite

B(3;0,166; k)

$\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0$

B(3;0,166; 3)

= 0,004$\overline{629}$

$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$

B(3;0,166; 2)

= 0,069$\overline{4}$

F(3;0,166; 1)

= 0,9259

$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$

B(3;0,166; 1)

= 0,347$\overline{2}$

$\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3$

B(3;0,166; 0)

= 0,578$\overline{703}$

3 Würfe

B(4;0,666; k)

$\binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$

B(4;0,166; 4)

= 0,0007716

$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$

B(4;0,166; 3)

= 0,015432

$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$

B(4;0,166; 2)

= 0,115$\overline{740}$

F(4;0,166; 1)

= 0,868055

$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$

B(4;0,166; 1)

= 0,385802

$\binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$

B(4;0,166; 0)

= 0,482253

4 Würfe

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	Die Werte von F für n = 26 und einigen Prozentsätzen, der hier interessierende Prozentsatz ist 1/6 = 0,1666	

		p				
n	**k**	**0,1667**	**0,1767**	**0,1867**	**0,1967**	**0,1000**
26	**0**	0,0087	0,0064	0,0046	0,0034	0,0646
	1	0,0542	0,0420	0,0324	0,0248	0,2513

Die Werte von F für n = 27 und einigen Prozentsätzen, der hier interessierende Prozentsatz ist 1/6 = 0,1666

		p				
n	**k**	**0,1667**	**0,1767**	**0,1867**	**0,1967**	**0,1000**
27	**0**	0,0073	0,0053	0,0038	0,0027	0,0581
	1	0,0466	0,0357	0,0272	0,0206	0,2326

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung		

Umkehrprobleme Binomialer Bäume

Gegeben n und p; Gesucht P

Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Beispiel

Ein Tierarzt behandelt 10 kranke Tiere mit einem Medikament, das nach Angaben des Herstellers in 80 % aller Anwendungen zur Heilung führt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 9 von 10 Tieren geheilt?

Lösung:

Ereignis X: Tier wird geheilt

gegeben: $n = 10$; $p = 0{,}8$

gesucht: P

$$P^{10}_{0,8}\,(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} 0{,}8^{9}\, 0{,}2^{1} + \binom{10}{10} 0{,}8^{10}\, 0{,}2^{0} = 0{,}3758$$

Lösung über die Verteilungsfunktion F :

$$F_{10\,;\,0,8}\,(X \geq 9) = 1 - F_{10\,;\,0,8}\,(X \leq 8) \quad 1 - 0{,}6242 = 0{,}3758$$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung		

Umkehrprobleme Binomialer Bäume

Gegeben n und P; Gesucht p

Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeit

Beispiel

Ein Gerät besteht aus 5 Bauteilen, die unabhängig voneinander mit der gleichen Funktionswahrscheinlichkeit arbeiten. Fällt ein Bauteil aus, so arbeitet das Gerät nicht mehr. Welche Funktionswahrscheinlichkeit müssen die Bauteile haben, wenn das Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % funktionieren soll?

Lösung:

Ereignis X: Bauteil funktioniert

gegeben: $n = 5$; $P > 0,95$

gesucht: p

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 > 0,95$$

$$1 \cdot p^5 > 0,95 \quad | \sqrt[5]{\ }$$

$$p > \sqrt[5]{0,95} \approx 98,98\%$$

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Umkehrprobleme Binomialer Bäume

Gegeben n und p (P aus Funktion bestimmen); Gesucht k

Berechnung der wahrscheinlichsten Treffer- oder Versuchsanzahl

Beispiel

Ein Großhändler versorgt 10 Geschäfte, von denen jedes Bestellungen mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,4 aufgibt.

a) Wie viel Bestellungen laufen mit **größter Wahrscheinlichkeit** ein? Welche Anzahl an Bestellungen ist am wahrscheinlichsten?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der Bestellungen um höchstens 1 vom wahrscheinlichsten Wert ab?

Lösung:

Ereignis X: Anzahl der Bestellungen

gegeben: n = 10; p = 0,4

gesucht: k

a) Bestimme aus der Funktion $P^{10}_{0,4}$ den Wert k, der die größte Wahrscheinlichkeit liefert: k = 4, da $P^{10}_{0,4}(X=4) = \mathbf{0{,}25}$

b) $P^{10}_{0,4}(3 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 2) = 66{,}6\%$

(Da die Summenfunktion immer das Gleichheitszeichen mit einschließt, braucht bei 5 nicht geändert werden, aber bei $P(X \le 3)$ wäre die 3 mit ausgeschlossen, was nicht sein soll, deshalb muss man die untere Grenze $P(X \le 2)$ wählen.)

Beispiel

Nach einem Maschinenschaden sind erfahrungsgemäß 70 % der Teile Ausschuss. Es werden 50 Teile beliebig entnommen. Mit wie vielen Teilen muss man mindestens rechnen, wenn man ein **Risiko von höchstens 10 %** eingehen möchte?

Lösung:

Ereignis X: Anzahl der schlechten Teile

gegeben: n = 50; p = 0,7 $\mathbf{P(X \ge k) \le 0{,}10}$

gesucht: k

$$P^{50}_{0,7}(X \ge k) \le 0{,}10$$

$$1 - P^{50}_{0,7}(X \le k-1) \le 0{,}10$$

(Alle Wahrscheinlichkeiten mit $P(X \ge k)$ müssen umgewandelt werden in eine Wahrscheinlichkeit $P(X\le k-1)$, da nur Funktionen existieren, die von 0 bis k aufsummieren. Damit kommt die Gegenwahrscheinlichkeit zum tragen. Es muss deshalb auch auf k – 1 zurückgegriffen werden, da es keine Funktionen für $P(X< k)$ gibt. Da es sich hier um diskrete Werte handelt, ist der nächst kleinere mögliche Wert k-1)

$$P^{50}_{0,7}(X \le k-1) \ge 0{,}90$$

Aus Tafeln oder einer Funktionstabelle ist der Wert von k abzulesen. Die Lösung kann also nur über Listen erfolgen und nicht direkt ausgerechnet werden. Aus der nebenstehenden Tabelle ist zu entnehmen, dass bei p=0,7 für k = 39 die vorgegebene Wahrscheinlichkeit erfüllt ist.

		p			
n	**k**	**0,3**	**0,7**	**0,96**	**0,98**
50	**35**	1,0000	0,5532	0,0000	0,0000
	36	1,0000	0,6721	0,0000	0,0000
	37	1,0000	0,7771	0,0000	0,0000
	38	1,0000	0,8610	0,0000	0,0000
	39	1,0000	0,9211	0,0000	0,0000
	40	1,0000	0,9598	0,0000	0,0000
	41	1,0000	0,9817	0,0001	0,0000

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Warteaufgaben** **Wahrscheinlichkeit, dass dem 1. Treffer k Nieten vorausgehen** $P^n_p\,(\overline{X} = k,\, X = 1) = q^k\, p^1 = (1-p)^k\, p^1$ k – Mal tritt das Ereignis $\overline{X}$ mit der Wahrscheinlichkeit q ein, erst dann 1 mal das Ereignis X. **Wahrscheinlichkeit, dass dem 2. Treffer k Nieten und ein Treffer vorausgehen** $P^n_p\,(\sum P(\overline{X} = k-1,\, X = 1)\,,\, X = 1) = \left(\binom{k}{k-1} q^{k-1} p^1\right) p = k\,(1-p)^k\, p^2$ Es gibt genau k Möglichkeiten, dass bis zu einer Versuchsanzahl von k Ereignissen genau einmal das Ereignis X eintrat und k – 1 mal das Ereignis $\overline{X}$. Im k + 1 Versuch tritt dann das Ereignis X wieder mit einer Wahrscheinlichkeit von p ein. **Wahrscheinlichkeit, dass der 1. Treffer beim k-ten Wurf oder später erscheint** $P^n_p\,(\overline{X} = k-1,\, X = 0) = q^{k-1}\, p^0 = (1-p)^{k-1}$ Es ist mindestens k–1 – Mal das Ereignis $\overline{X}$ eingetreten, was danach kommt ist unbekannt. deshalb ist k–1 mal die Wahrscheinlichkeit q eingetreten.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Wahrscheinlichkeit, dass beim m-ten Treffer k Versuche mit m–1 Treffer und k–(m-1) Fehlversuche vorausgegangen sind.**	

$$P^n_p(\overline{X} = k-m+1,\ X = m) = \binom{k}{m-1} q^{k-m+1}\, p^m = (1-p)^{k-1}$$

Binomialkoeffizient eigentlich:

$$\binom{k}{k-m+1} = \left(\frac{k!}{(k-m+1)!\,(k-(k-m+1))!}\right) = \left(\frac{k!}{(k-m+1)!\,(m-1)!}\right) = \binom{k}{m-1}$$

Wahrscheinlichkeit, dass der m-ten Treffer beim k-ten Versuch oder später eintritt

$$\binom{k-1}{0} p^0 q^{k-1} + \binom{k-1}{1} p^1 q^{k-2} + \binom{k-1}{2} p^2 q^{k-3} + \ldots + \binom{k-1}{m-1} p^{m-1} q^{k-m}$$

Auch, wenn schon mehrmals als m-1 Mal das Ereignis X eingetreten sein könnte, da k–1 größer als m–1 ist, sollen ja nur die Fälle betrachtet werden, bei denen beim k-ten Versuch das m-te positive Ereignis eintritt, also alle anderen ignoriert. Deshalb kann nur bis m-1 summiert werden.

$$\sum_{r=0}^{m-1} \binom{k-1}{r} p^r q^{k-r-1}$$

Die obere Grenze von $r = m - 1$ liefert beim Exponenten von q

$$k - (m-1) - 1 = k - m + 1 - 1 = k - m$$

was in der Summendarstellung genau dem letzten Exponenten von q entspricht

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomialverteilung

Erwartungswert der Binomialverteilung

Hat eine Zufallsvariable X die Werte x_1; x_2; x_3; ..x_n dann heißt

$$E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + x_3 \cdot P(X=x_3) + \ldots + x_n \cdot P(X=x_n)$$

Erwartungswert von X.

Wir betrachten eine Bernoulli-Kette der Länge n = 3 und bestimmen den Erwartungswert der Zufallsvariablen X(ω), die die Anzahl der Treffer (Einsen) angibt, z.B. X(1, 0, 1) = 2, dann erhalten wir für alle möglichen Ereignisse folgende Angaben.

	Treffer
ω1 = (0 ,0 , 0)	**0**
ω2 = (0 ,0 , 1) ω3 = (0 ,1 , 0) ω4 = (1 ,0 , 0)	**1**
ω5 = (0 ,1 , 1) ω6 = (1 ,0 , 1) ω7 = (1 ,1 , 0)	**2**
ω8 = (1 ,1 ,1)	**3**

k	0	1	2	3
P(X=k)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Damit liefert die Formel für den Erwartungswert:

$$E(X) = 0 \cdot q^3 + 1 \cdot 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3 \cdot p^3$$

Da der erste Summand wegen des Koeffizienten 0 wegfällt haben alle Summanden den Faktor p:

$$\begin{aligned} E(X) &= 3p\,(q^2 + 2pq + p^2) \\ &= 3p\,(q + p)^2 \\ &= 3\,p \end{aligned}$$

Dabei gilt : q + p = 1
Die Zahl 3 entspricht dem n.

Damit liegt die Vermutung nahe, die sich auch allgemein bestätigen läßt:

$$\boxed{E(X) = n \cdot p}$$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Varianz der Binomialverteilung

Der Erwartungswert μ gibt an, wo das "Zentrum" der Verteilung ist, er sagt nichts darüber aus, wie die Verteilung um ihr Zentrum gruppiert ist. Wir benötigen für statistische Anwendungen ein Maß für die Streuung einer Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert.
Um eine mittlere Abweichung zu definieren, müssen wir wie beim Erwartungswert die Häufigkeit beachten, mit der die Abweichungen $k_i - \mu$ auftreten.
Zudem sind wir nicht am Vorzeichen der Abweichungen interessiert, daher nehmen wir die Quadrate $(ki - \mu)^2$. Möglich wären auch die Beträge $| k_i - \mu |$ gewesen, jedoch ist das Rechnen mit ihnen recht unhandlich.

Die Formel für die Varianz

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$$

wobei h_i die relativen Häufigkeiten sind, liefert für das beim Erwartungswert betrachtete Beispiel:

ω1 = (0 ,0 , 0) $\mathbf{(0 - 3p)^2}$

ω2 = (0 ,0 , 1)
ω3 = (0 ,1 , 0) $\mathbf{(1 - 3p)^2}$
ω4 = (1 ,0 , 0)

k	0	1	2	3
P(X=k)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

ω5 = (0 ,1 , 1)
ω6 = (1 ,0 , 1) $\mathbf{(2 - 3p)^2}$
ω7 = (1 ,1 , 0)

ω8 = (1 ,1 ,1) $\mathbf{(3 - 3p)^2}$

$$V(X) = q^3 \cdot (0 - 3p)^2 + 3pq^2 \cdot (1 - 3p)^2 + 3p^2q \cdot (2 - 3p)^2 + p^3 \cdot (3 - 3p)^2$$

$$= q^3 \cdot 9p^2 + 3pq^2 \cdot (1 - 3p + 9p^2) + 3q^2p \cdot (4 - 6p + 9p^2) + p^3 \cdot (9 - 18p + 9p^2)$$

führt nach längerem Umrechnen zu

$$= 3 \cdot p \cdot q$$

Damit liegt die Vermutung nahe, die sich auch allgemein bestätigen läßt:

$$\boxed{V(X) = n \cdot p \cdot q}$$

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Hypothesentest		

Hypothesentest

Grundsätzlich unterscheidet man beim Hypothesentest, ob es sich um die **Bestätigung oder Verwerfung einer Hypothese** handelt, oder ob man **zwei Hypothesen gegenüberstellt**, um diejenige zu finden, die wahrscheinlicher ist.

Einfacher Hypothesentest

Gibt es nur eine Hypothese unterscheidet man zwischen einem linksseitigen und einem rechtsseitigen Hypothesentest. Es kommt darauf an, Kriterien zu finden, nach denen die Hypothese

- abzulehnen ist oder
- nicht abgelehnt werden kann.

Grundsätzlich wird eine Hypothese nicht angenommen. Dass eine Hypothese nicht abgelehnt wird, heißt nicht automatisch, dass sie richtig ist, sondern nur, dass sie mit dieser Untersuchung nicht widerlegt werden kann. Andere Tests, die z.B noch nicht bekannt sind, könnten die Hypothese widerlegen.

Bei einem **linksseitigen Test** wird die Hypothese aufgestellt:
Liegt die Anzahl der Ereignisse **unter einer festgelegten Schranke**, dann ist die Hypothese abzulehnen. Alle Werte, die größer sind, widersprechen der Hypothese nicht.

Bei einem **rechtsseitigen Test** wird die Hypothese aufgestellt:
Liegt die Anzahl der Ereignisse **über einer festgelegten Schranke**, dann ist die Hypothese abzulehnen. Alle Werte, die kleiner sind, widersprechen der Hypothese nicht.

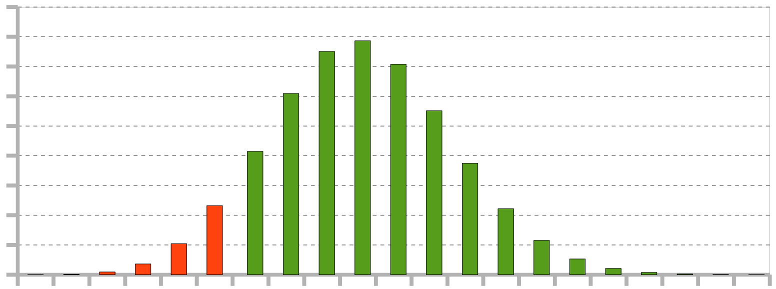
Bei einem **zweiseitigen Test** lautet die Hypothese:
Liegt die Anzahl der Ereignisse **unter einer Schranke** _oder_ **über einer Schranke**, dann ist die Hypothese abzulehnen.
(Zumindest für das Abitur nicht relevant)

Die Anzahl der durchgeführten Proben bezeichnet man mit n, die Anzahl der positiv gefundenen Ereignisse mit k (entsprechend der Bedeutung in der Binomialverteilung).

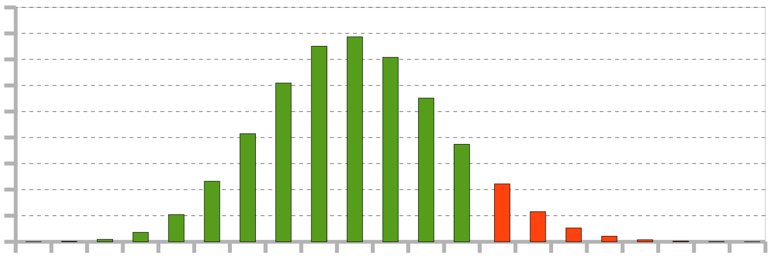
Das Problem bei der Durchführung der Tests:
Auch Ereignisanzahlen, die über/unter der vorgegeben Schranke liegen sind durchaus möglich, aber wenn sie eintreten geht man **immer** davon aus, dass die Hypothese **falsch** ist, obwohl sie in wenigen Fällen auch richtig sein kann.

Eine Hypothese wird abgelehnt, obwohl sie richtig ist. In diesen Fällen spricht man von einem α – Fehler

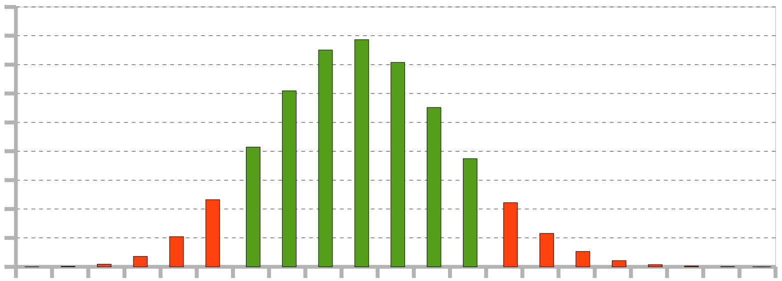
Linksseitiger Hypothesentest



Rechtsseitiger Hypothesentest



Zweiseitiger Hypothesentest



Abitur in Mathematik: Stochastik		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Hypothesentest	Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler ist genau die Summe der Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Ereignis eintreten kann, bei dem die Anzahl k größer ist als die vorgegebene Grenze. „Der Test verlief so ungünstig, dass er suggeriert, die Hypothese sei falsch, obwohl sie richtig ist.“ Dieser Fehler ist nicht zu erkennen, man muss mit ihm leben ! Für das Festlegen der Schranken für die Ablehnung/Annahme der Hypothese gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten: 1. Ist die Anzahl k größer/kleiner als ein festgelegter Wert k_0, dann ist die Hypothese abzulehnen. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, mit denen trotzdem größere/kleinere Werte auftreten ist das Signifikanzniveau für den α – Fehler 2. Das Signifikanzniveau für den α – Fehler (Irrtumswahrscheinlichkeit) soll auf einen bestimmten Wert begrenzt werden. Ab/bis zu welcher Anzahl k_0 ist die Hypothese abzulehnen oder nicht abzulehnen.	

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Alternativer Hypothesentest

Bei einem solchen Test wird die Aussage einer sogenannten Nullhypothese H_0 gegen eine alternative Hypothese H_1 getestet. Ein solcher Test führt immer dazu, dass es für die eine Hypothese ein linksseitiger Hypothesentest ist und für die andere Hypothese ein rechtsseitiger Hypothesentest ist.

Ein Hypothesentest für die Nullhypothese H_0 gegen die Alternative H_1 basierend auf den Beobachtungswerten x_1, x_2, ..., x_n besteht nun aus der Angabe eines kritischen Bereichs K (Verwerfungsbereich) zusammen mit der Entscheidungsregel:

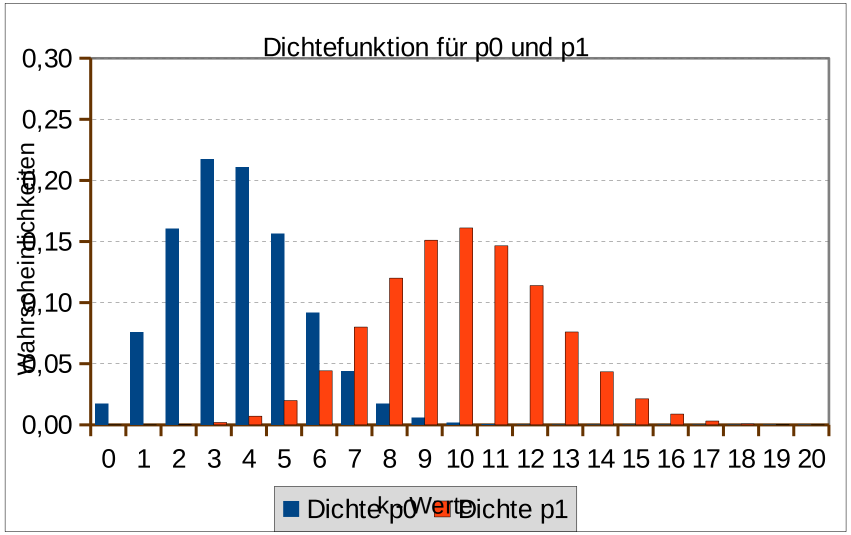
- Verwerfe die Nullhypothese, falls die Beobachtungswerte im kritischen Bereich liegen.
- Belasse die Nullhypothese, falls nicht.

Ein statistischer Nachweis/Beweis gelingt bloß dann, wenn die Nullhypothese verworfen wird. Belassen der Nullhypothese bedeutet dagegen **nicht**, daß H_0 damit statistisch bewiesen ist!
Am besten lässt sich die Problematik an einem Bild veranschaulichen.
(s. nebenstehendes Diagramm)

Die Nullhypothese entspricht den blauen Balken im Diagramm, die Alternativhypothese den roten Balken. In beiden Fällen handelt es sich um die Dichtefunktion, dh. die Angabe der Wahrscheinlichkeit für jeweils einen Wert k (P(X=k)).
Die Nullhypothese gilt für k=0 bis k = 9 (oder10). Die Alternativhypothese von k=3 bist k = 17.

Was bedeutet das für den Test:

Werte von k > 10 werden wohl nicht auftreten, denn dann wäre die Summe der Wahrscheinlichkeiten bereits so nahe bei 1, dass man sie als sicher ansehen kann. Bei Werten k < 3 ist die Sache auch soweit klar, dass in diesem Bereich H_1 kaum auftreten kann. Was ist aber mit k = 6 oder k = 7. Ist diese Anzahl H_0 oder H_1 zuzuordnen.



Und an dieser Stelle kommt genau der α – Fehler zum Tragen:

Legt man die Grenze für k_0 zur Bestätigung oder Verwerfung von H_0 auf den Wert k= 6, dann gehören die Werte k > 6 zum α – Fehler. Man lehnt H_0 ab, obwohl es noch richtig sein könnte und entscheidet sich für H_1 . H_1 hat dort bereits eine höhere Wahrscheinlichkeit als H_0, trotzdem kann auch H_0 noch existieren.

> Die Hypothese H_0 wird **abgelehnt, obwohl sie richtig ist**.
> In diesen Fällen spricht man von einem α – Fehler oder Fehler 1. Art

Was ist andererseits mit k = 5.

Bei k=5 glaubt man, sich im Bereich von H_0 zu befinden, weil dort H_0 eine höhere Wahrscheinlichkeit wie H_1 hat. Aber H_1 ist auch mit k = 5 und k = 4 möglich. In diesem Fall spricht man von einem β – Fehler, man nimmt H_0 an, obwohl H_1 richtig wäre.

> Die Hypothese H_0 wird **angenommen, obwohl sie falsch ist**.
> In diesen Fällen spricht man von einem β – Fehler oder Fehler 2. Art

β – Fehler setzen immer eine zweite Hypothese voraus und sind für das Abitur nicht relevant.

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

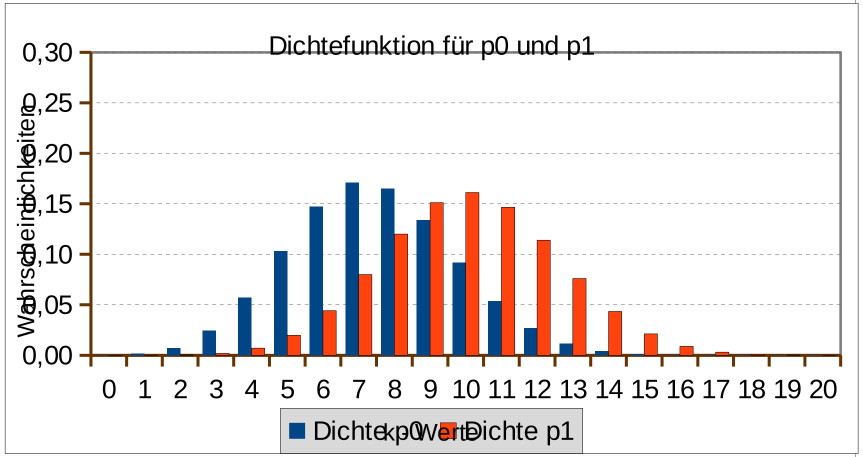
Hypothesentest

Die Nullhypothese und Alternative sind nicht gleichwertig:

- Wir wollen unbedingt vermeiden, daß wir die Nullhypothese verwerfen, obwohl sie wahr ist ("peinlicher Irrtum", Fehler 1. Art).
- Wenn unsere Untersuchung nicht genau genug ist (z.B. aufgrund einer zu geringen Stichprobengröße), kann es aber durchaus passieren, daß wir einen vorhandenen Effekt nicht
- entdecken, also die Nullhypothese belassen,obwohl sie falsch ist (Fehler 2. Art)

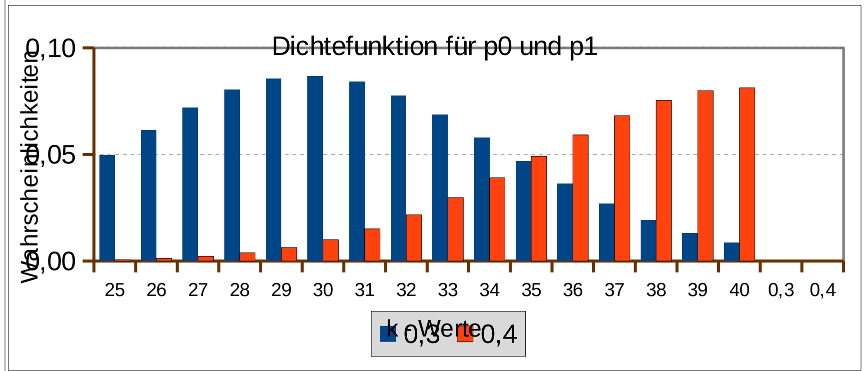
Bei einem Hypothesentest beschreibt das Signifikanzniveau die **(maximale) Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art**, die wir zulassen wollen. Für unseren Test soll also auf jeden Fall gelten:
P_{H0} [(X_1,X_2, ...,X_n) liegt im Verwerfungsbereich] ≤ α.
Das bedeutet für einen rechtsseitigen Test, dass die aufsummierte Wahrscheinlichkeit ab einem Wert k_0 kleiner als α sein muss

n = 25; p_0 = 0,3; p_1 = 0,4



Aus den beiden Dichtfunktionen wird ein weiteres Problem sichtbar, dass man aus den Eigenschaften der Binomialverteilung ableiten kann:
Liegen für ein Festes n die Wahrscheinlichkeiten dicht beieinander, dann sind die beiden Dichtefunktionen sehr ähnlich.
Das rechte Bild zeigt die Dichtefunktionen für n=25 und p_0 =0,3 und p_1 = 0,4.
Der Überlappungsbereich ist sehr groß, von k=4 bis k=14, bei k=8 und k= 9 sind die Wahrscheinlichkeiten annähernd gleich, aber sehr hoch. Damit wird kaum eine brauchbare Aussage möglich sein.

n = 100; p_0 = 0,3; p_1 = 0,4



Das zweite Bild zeigt die Dichtefunktionen für die gleichen Wahrscheinlichkeiten, aber für n = 100. Man erkennt deutlich, dass die beiden Dichtefunktionen weiter auseinandergezogen sind und die Wahrscheinlichkeiten an der Grenze (Balken von H_1 größer als der von H_0) bei 0,05 liegen, während sie bei n=25 bei 0,15 liegen, also wesentlich größer. Daraus ergeben sich zwei wesentliche Merkmale:

1. Je näher die Wahrscheinlichkeiten beieinander liegen, desto schlechter die Trennung in H0 und H1
2. Je kleiner der Stichprobenumfang, desto schlechter die Trennung in H0 und H1

Bei welchem k legt man die kritische Zahl fest. Klar ist bei allen Fällen, wenn man den α – Fehler verkleinern will, erhöht man den β – Fehler und umgekehrt.
Je größer das k, desto kleiner der α –Fehler , und desto größer der β – Fehler
Je kleiner das k, desto kleiner der β – Fehler und desto größer der α –Fehler

Eine sinnvolle Trennstelle ist offenbar dasjenige k, an dem die Säule für die Hypothese H_0 kleiner wird, als die Säule für H_1. In diesem Beispiel ist das genau zwischen den Werten k = 34 und k = 35 der Fall. Also ist einer dieser Werte eine gut geeignete Trennstelle.

Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Linksseitiger Hypothesentest

Ablaufschema beim linksseitigen Hypothesentest

1) Festlegung der Hypothesen: H_0: $p \geq p_0$; (H_1: $p < p_0$)

   (beim linksseitigen Hypothesentest immer **$p \geq p_0$**)

2) Festlegung des Stichprobenumfangs n und der Irrtumswahrscheinlichkeit α
3) Festlegung der Zufallsvariablen X (immer) und ihrer Verteilung (verlangen manche Lehrer nicht; in der Schule ist es fast immer die Binomialverteilung)
4) Bestimmung der linken Grenze gL aus der Bedingung $P(X \leq g_L) \leq \alpha$ und damit des Ablehnungsbereichs $K = \{0, \ldots, g_L\}$
5) Angabe der Entscheidungsregel oder Entscheidung aufgrund eines konkreten Stichprobenergebnisses

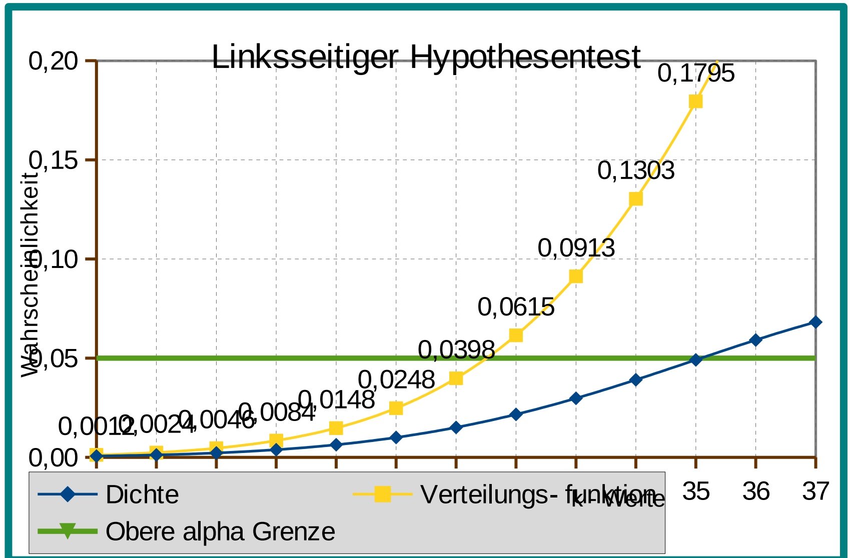
Bei einem linksseitigen Hypothesentest sprechen kleine Werte der Zufallsvariablen gegen die Hypothese, also Werte, die links auf dem Zahlenstrahl bzw. links vom Erwartungswert liegen. Wenn eine Partei behauptet, sie habe einen Stimmenanteil von mindestens 40 %, macht es uns stutzig, wenn zu wenige Leute behaupten, diese Partei wählen zu wollen.

k	$B_{100;0,4}(k)$	$F_{100;0,4}(k)$
27	0,00220	0,004600
28	0,00383	0,008433
29	0,00634	0,014775
30	0,01001	0,024783
31	0,01507	0,039848
32	0,02166	0,061504
33	0,02975	0,091254
34	0,03908	0,130337
35	0,04913	0,179469
36	0,05914	0,238611
37	0,06820	0,306810
38	0,07538	0,382188
39	0,07989	0,462075
40	0,08122	0,543294

Die strich-punktierte Linie kennzeichnet die Grenze für die Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% = 0,05. Dieser Wert liegt zwischen den k-Werten 31 und 32. Wenn sich immer noch 33 Personen für diese Partei entscheiden, dann liegt dieser Wert nicht im Ablehnungsbereich.
Man kann daraus nicht schließen, dass der Stimmenanteil gesunken ist.

Beispiel
Bei einer Wahl hatte eine Partei einen Stimmenanteil von 40 %. Nach der Wahl hat sie einige unbequeme Maßnahmen ergriffen, und man vermutet, dass der Stimmenanteil gesunken ist. Bei einer Umfrage unter 100 Personen geben 33 an, dass sie die Partei wieder wählen würden. Kann man hieraus bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % schließen, dass der Stimmenanteil gesunken ist?

Lösung
1) Wir führen den Hypothesentest nach dem Muster durch:
   H_0: $p \geq 0{,}4$; H_1: $p < 0{,}4$
2) n = 100; α = 0,05
3) X = Anzahl der Personen in der Stichprobe, die die Partei wieder wählen würden X ist bei wahrer Nullhypothese binomialverteilt mit den Parametern n = 100 und p = 0,4
4) $P(X \leq g_L) \leq 0{,}05 \Rightarrow g_L = 31$ (Tabelle siehe Rückseite);
   Ablehnungsbereich $K = \{0, \ldots, 31\}$
5) Da $33 \notin K$ ist, kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % nicht behaupten, dass der Stimmenanteil der Partei gesunken ist. Wäre kein Stichprobenergebnis bekannt, so würde man an dieser Stelle die Entscheidungsregel formulieren: Wenn höchstens 31 Leute angeben, die Partei wieder wählen zu wollen, kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % behaupten, dass der Stimmenanteil der Partei gesunken ist.



Abitur in Mathematik: Stochastik

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Rechtsseitiger Hypothesentest

Ablaufschema beim rechtsseitigen Hypothesentest

1) Festlegung der Hypothesen: H_0: $p \le p_0$; (H_1: $p > p_0$)

   (beim rechtsseitigen Hypothesentest immer **$p \le p_0$**)

2) Festlegung des Stichprobenumfangs n und der Irrtumswahrscheinlichkeit α
3) Festlegung der Zufallsvariablen X (immer) und ihrer Verteilung (verlangen manche Lehrer nicht; in der Schule ist es fast immer die Binomialverteilung)
4) Bestimmung der rechten Grenze g_R aus der Bedingung $P(X \ge g_R) \le \alpha$ und damit des Ablehnungsbereichs $K = \{g_R, \ldots, n\}$
5) Angabe der Entscheidungsregel oder Entscheidung aufgrund eines konkreten Stichprobenergebnisses

Bei einem rechtsseitigen Hypothesentest sprechen große Werte der Zufallsvariablen gegen die Hypothese, also Werte, die rechts auf dem Zahlenstrahl bzw. rechts vom Erwartungswert liegen. Wenn eine Firma behauptet, sie habe bei der Produktion von Taschenrechnern eine Ausschussquote von höchstens 5 %, macht es uns stutzig, wenn zu viele defekte Taschenrechner reklamiert werden.

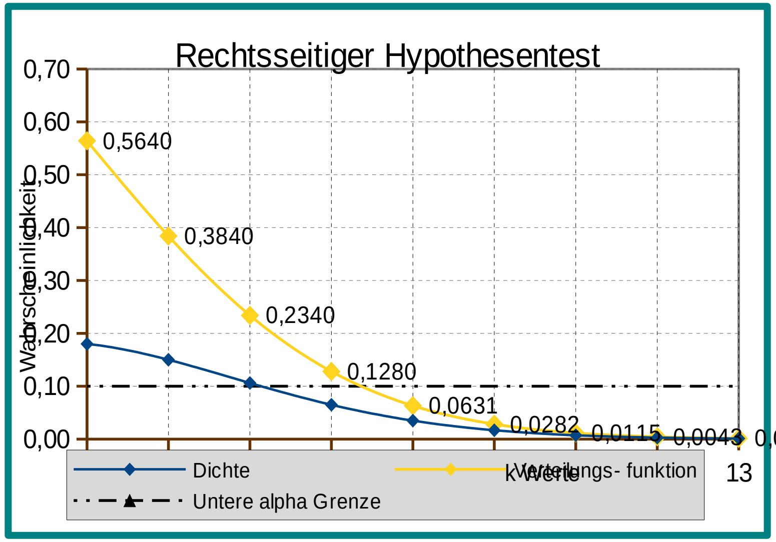
	Dichte	umgekehrte Verteilungsfunktion
5	0,180018	0,564019
6	0,150015	0,384001
7	0,106026	0,233986
8	0,064871	0,127960
9	0,034901	0,063090
10	0,016716	0,028188
11	0,007198	0,011472
12	0,002810	0,004274
13	0,001001	0,001464
14	0,000327	0,000463
15	0,000099	0,000136

An der umgekehrten Verteilungsfunktion (Linie mit den Quadraten) ist zu erkennen, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% = 0,1 zwischen den k Werten 8 und 9 liegt. Bei k = 9 kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,1 davon ausgehen, dass die Fehlerrate von 5% nicht stimmt.
Die Summe von 9 bis 30 ergibt 0,0631 (s. Kurvenbild). Die Summe von 8 bis 30 ergibt 0,1280, also mehr als 0,1

Beispiel
Die Behauptung der Firma soll mit einer Stichprobe von 100 Taschenrechnern untersucht werden. Wie viele defekte Taschenrechner müssen mindestens gefunden werden, damit man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % schließen kann, dass die Ausschussquote höher als von der Firma angegeben ist?

Lösung
Wir führen den Hypothesentest nach dem Muster durch:

1) H_0: $p \le 0{,}05$; H_1: $p > 0{,}05$
2) n = 100; α = 0,10
3) X = Anzahl der defekten Taschenrechner in der Stichprobe X ist bei wahrer Nullhypothese binomialverteilt mit den Parametern n = 100 und p = 0,05
4) Ansatz: $P(X \ge g_R) \le 0{,}10$
5) Da eine solche Wahrscheinlichkeit nicht direkt aus der Tabelle abgelesen werden kann, muss man zunächst umformen bzw. zum Gegenereignis übergehen:
   $P(X \ge g_R) \le 0{,}10 \Leftrightarrow P(X \le g_{R-1}) \ge 0{,}90 \Rightarrow g_{R-1} = 8$ (aus Tabelle)
   $\Leftrightarrow g_R = 9$; Ablehnungsbereich $K = \{9, \ldots, 100\}$
6) Wenn mindestens 9 defekte Taschenrechner entdeckt werden, kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % behaupten, dass die Angaben der Firma nicht zutreffen.
   Nur wenn ein Stichprobenergebnis bekannt wäre, könnte man ein konkretes Urteil fällen.



Abitur in Mathematik: Stochastik		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Hypothesentest	ACHTUNG Bei der Berechnung der umgekehrten Verteilungsfunktion Die summierte Verteilungsfunktion binomcdf(n,p,k) liefert für n = k immer den Wert 1, da dann alle möglichen Wahrscheinlichkeiten summiert sind. Damit wird bei der Berechnung von 1 – binomcdf(n,p,n) immer der Wert 0 entstehen. Aber die Einzelwahrscheinlichkeit für n ist niemals 0, sondern immer ein Wert größer 0, nämlich binompdf(n,p,n). Deshalb ist bei der umgekehrten Wahrscheinlichkeit immer ein k Wert weniger zu benutzen. Damit sieht die notwendige Formel so aus: 1 – binomcdf(n,p,**k-1**) Die Werte von k sind bei der Eingabe in den GTR jeweils die X-Werte in der ersten Spalte.	