Binomische Ausdrücke und Pascalsches Dreieck

$(a + b)^0 = 1a^0b^0$

$(a + b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$

$(a + b)^2 = 1a^2b^0 + 2ab + 1\,a^0b^2$

$(a + b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\,a^0b^2$

$(a + b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\,a^0b^4$

$(a + b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1\,a^0b^5$

$(a + b)^6 = 1a^6b^0 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1\,a^0b^6$

- die Ausdrücke sind ergänzt, was nicht immer eingetragen wird.
- die Potenzen von a sind immer fallend, beginnen mit n und enden mit 0
- die Potenzen von b sind immer steigend,beginnen mit 0 und enden mit n
- die Anzahlen vor den Potenzen ergeben sich aus den beiden Zahlen, die links und rechts in der Zeile darüber stehen

die Zahl 15 von dem Ausdruck a^4b^2 bedeutet, daß beim 6-maligen Multiplizieren der Klammer der Ausdruck a^4b^2 genau 15 Mal auftritt.

Die Zahlen vor den Potenzen sind im allgemeinen in dem Pascalschen Dreieck zusammengefaßt.

$$1\binom{0}{0}$$

$$1\binom{1}{0} \quad 1\binom{1}{1}$$

$$1\binom{2}{0} \quad 2\binom{2}{1} \quad 1\binom{2}{2}$$

$$1\binom{3}{0} \quad 3\binom{3}{1} \quad 3\binom{3}{2} \quad 1\binom{3}{3}$$

$$1\binom{4}{0} \quad 4\binom{4}{1} \quad 6\binom{4}{2} \quad 4\binom{4}{3} \quad 1\binom{4}{4}$$

$$1\binom{5}{0} \quad 5\binom{5}{1} \quad 10\binom{5}{2} \quad 10\binom{5}{3} \quad 5\binom{5}{4} \quad 1\binom{5}{5}$$

$$1\binom{6}{0} \quad 6\binom{6}{1} \quad 15\binom{6}{2} \quad 20\binom{6}{3} \quad 15\binom{6}{4} \quad 6\binom{6}{5} \quad 1\binom{6}{6}$$

Das Pascalsche Dreieck enthält alle Binomialkoeffizienten.
Die Binomialkoeffizienten sind die Faktoren vor den Potenzen.

Binomialkoeffizienten treten in der Kombinatorik auf bei : Ohne Reihenfolge , mit Wiederholung
Der Binomialkoeffizient berechnet die Anzahl der Möglichkeiten
k Elemente aus n Elementen auszuwählen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Betrachtet man a und b in den Binomialausdrücken als Wahrscheinlichkeiten, dann kann man sagen der Wert von a ist die Wahrscheinlichkeit, daß das gewollte Ereignis eintritt, damit also p,
und b ist die Wahrscheinlichkeit, daß das gewollte Ereignis nicht eintritt, also q.
Die Summe der beiden Werte ist damit immer 1.

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$$

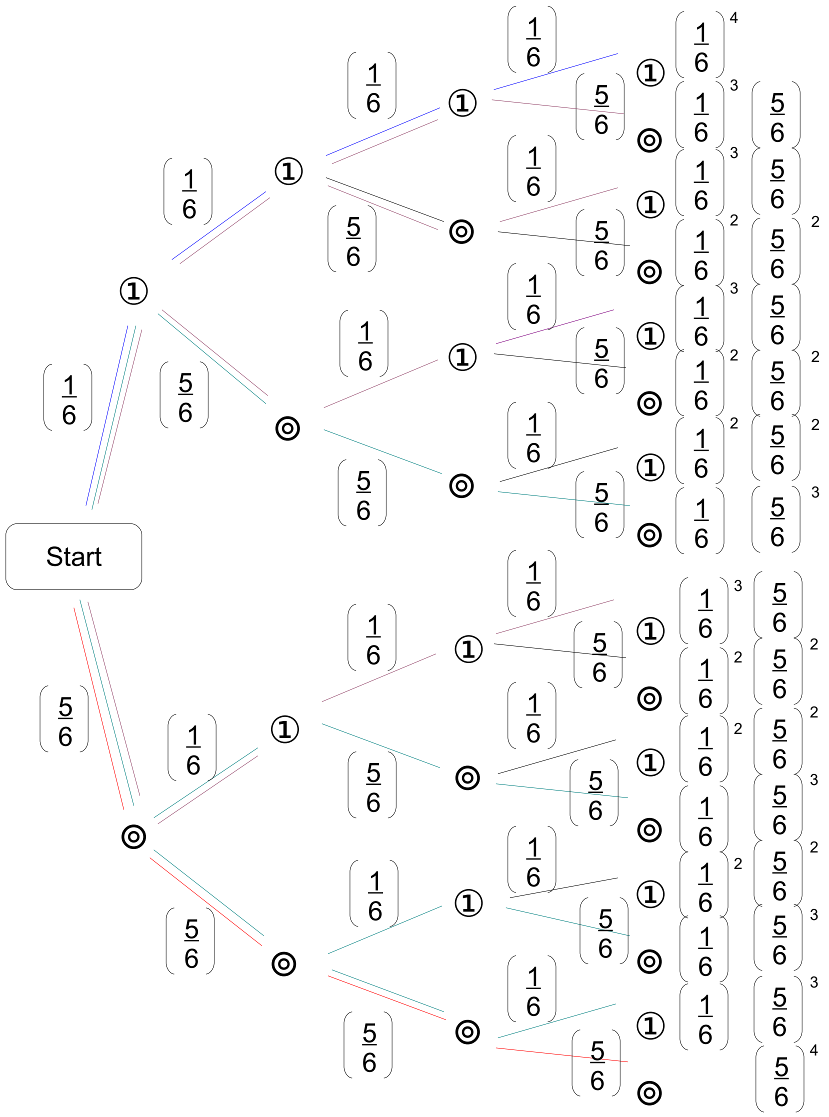
Genau das ist die Binomialverteilung. Ungeachtet der Anzahl n ist die Summe über alle möglichen Summanden immer gleich 1. Eine wichtige Grundlage für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Binomialverteilung

Definition
Die Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung für ein Merkmal, das z. B. aus zwei Ausprägungen, z. B. funktionsfähig/defekt, Wappen oder Zahl, oder blau/rot mit einer konstanten Erfolgswahrscheinlichkeit p für eine Ausprägung, z. B. defekt oder rot, annehmen kann.
Die Wahrscheinlichkeit mit der dieses Ereignis eintritt, wird mit P(X=) bezeichnet.

A und B spielen mit einem Würfel so, dass A gewinnen soll, wenn er bei 4 Würfen zweimal oder öfters eine 1 wirft; fällt die 1 nur einmal oder gar nicht, so gewinne B.
Wie groß ist das Verhältnis der Chancen?

Das Beispiel soll mit einem Baumdiagramm veranschaulicht werden.



Der Baum zeigt alle Möglichkeiten, die beim 4 maligen Würfeln auftreten können. Die Wahrscheinlichkeiten im Baum unterscheiden nur „eine 1 gewürfelt“ oder „keine 1 gewürfelt“. Damit gibt es nur zwei mögliche Ereignisse und ein Würfel ist immer wie „mit zurücklegen“, so daß hier die Binomialverteilung zum Einsatz kommt.
An jedem Pfad stehen die Wahrscheinlichkeiten und am Ende nach der 1. Pfadregel die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle Ereignisse entlang des Pfades eingetroffen sind.

Die Analyse des Baumes liefert folgende Ergebnisse:

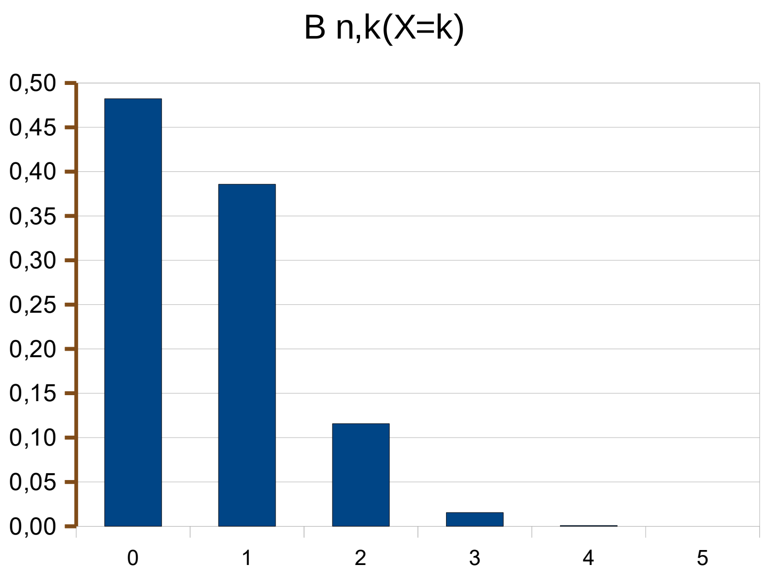
	P(„keine 1") P(X=0)	P(„eine 1") P(X=1)	P(zwei 1") P(X=2)	P(„drei 1") P(X=3)	P(„vier 1") P(X=4)
Wie viele Pfade gehören zum Ereignis?	1	4	6	4	1
Wie sehen die Einzel-wahrscheinlich-keiten an jedem dieser Pfade aus?	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$
Gesamtwahr-scheinlichkeit für das Ereignis	$1\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$4\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)$	$6\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$4\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$1\left(\frac{1}{6}\right)^4$

Betrachtet man die beiden Teilbäume, so ergibt sich folgendes Bild:

oberer Teilbaum	0	1	3	3	1
unterer Teilbaum	1	3	3	1	0
aus der Summe ergibt sich:	0 + 1	1 + 3	3 + 3	3 + 1	1 + 0
	1	4	6	4	1

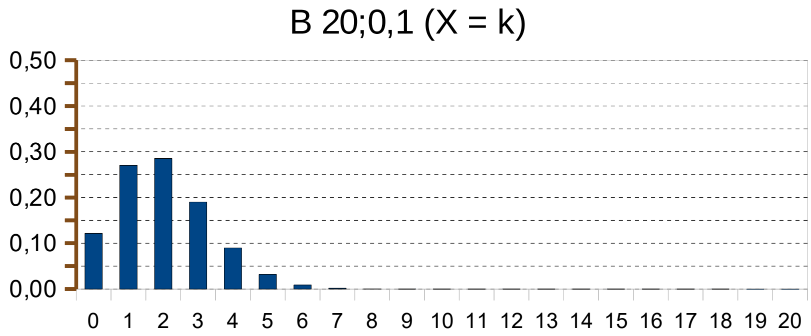
Dieses Bildungsgesetz ist bekannt aus dem Pascalschen Dreieck.

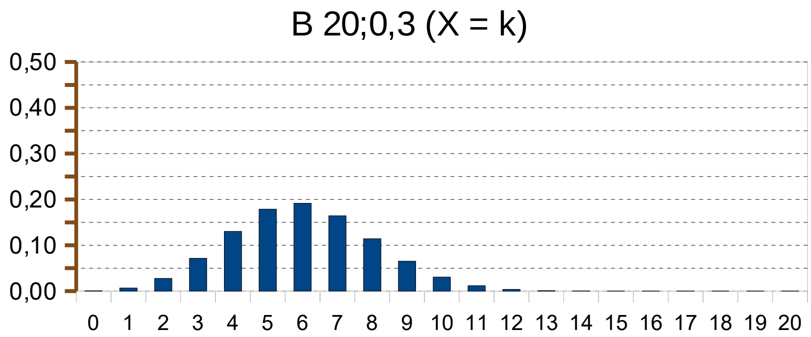
> Der Binomialkoeffizient in der Binomialverteilung gibt die Anzahl der Pfade an, die die gleiche Anzahl von positiven und negativen Ereignissen haben. Die Wahrscheinlichkeit entlang eines solchen Pfades ist immer $p^k q^{n-k}$

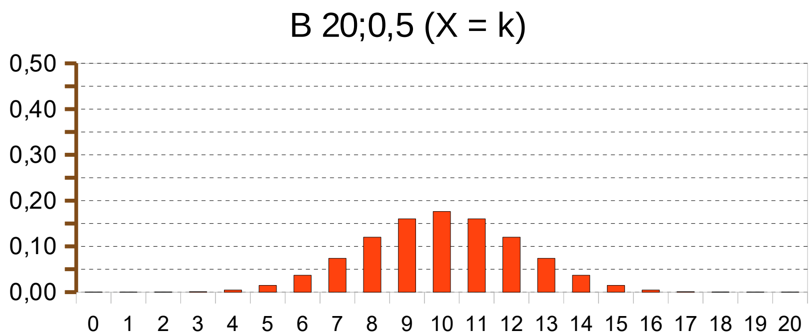


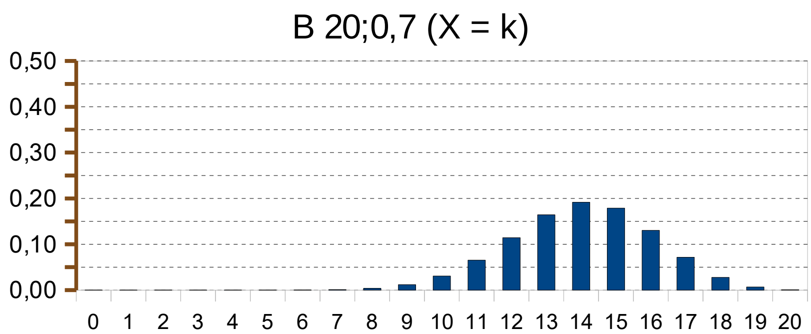
Binomialverteilungen werden üblicherweise in Säulendiagrammen dargestellt und nicht nicht in Funktionskurven, da nur ganzzahlige Werte als x möglich sind. Das ist das Säulendiagramm zum obigen Beispiel.

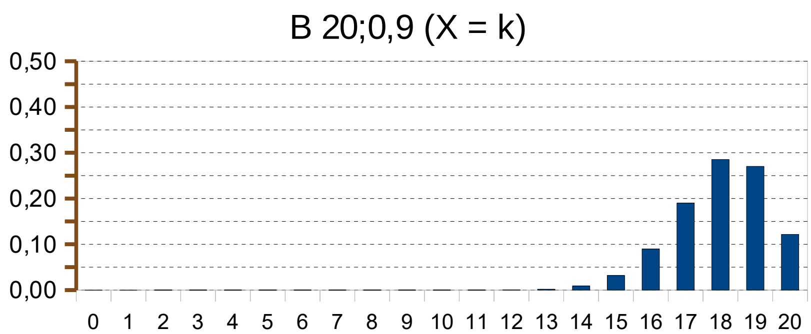
Binomialverteilung Einzelwahrscheinlichkeiten für festes n und variables p









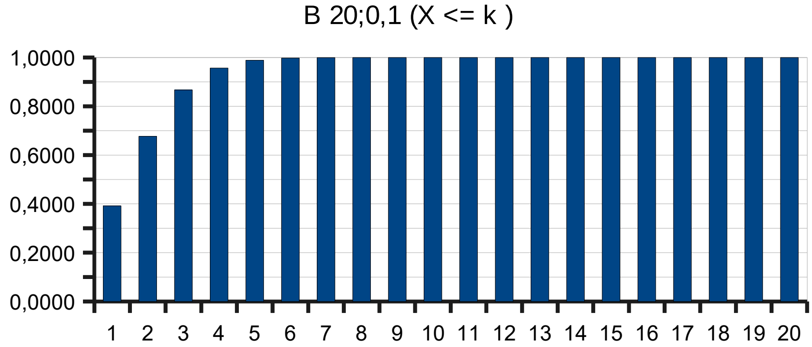


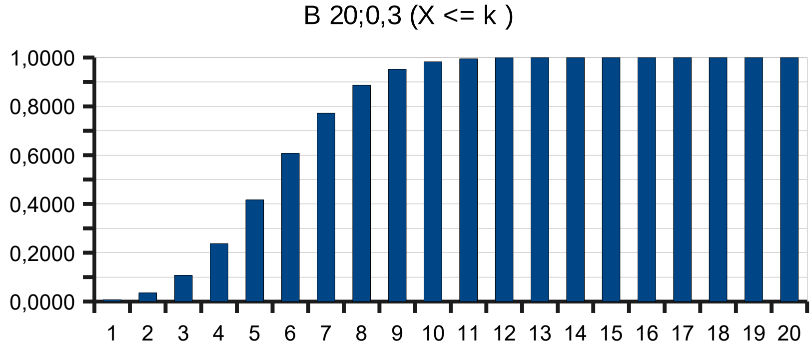
- für wachsendes p wandern die Säulendiagramme in Richtung n.
- damit verschiebt sich auch das Maximum der Funktionswerte und damit der Erwartungswert.
- die Wahrscheinlichkeit des Erwartungswertes nimmt bis p = 0,5 ab und danach wieder zu.
- die Säulendiagramme von p und 1 – p ähneln sich, sie sind spiegelsymmetrisch zu 0,5
- die Wahrscheinlichkeit p = 0,5 an ein vollständig symmetrisches Kurvenbild. je weiter die Wahrscheinlichkeit nach 0 oder nach 1 geht, desto unsymmetrischer werden die Kurvenbilder

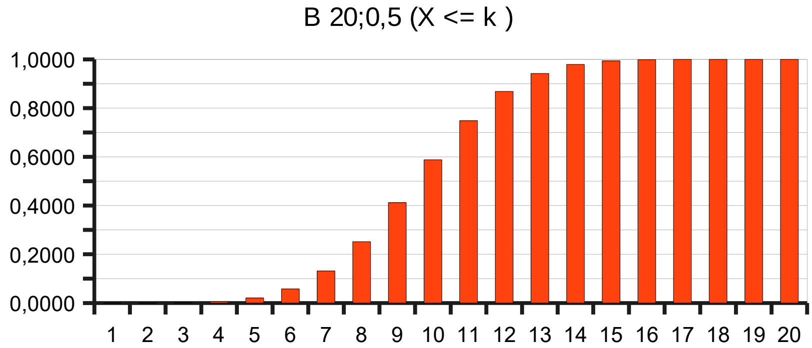
Neben den Säulendiagrammen, die die Einzelwahrscheinlichkeit darstellen sind Säulendiagramme interessant, die die Summe der Wahrscheinlichkeiten bis zu einem festen k darstellen.

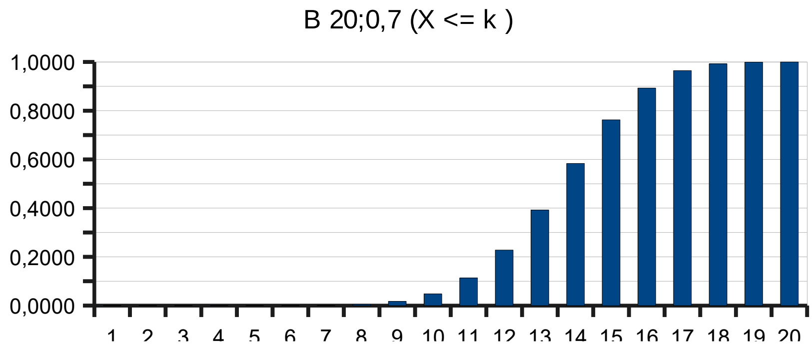
Binomialverteilung Summenwahrscheinlichkeiten für festes n und variables p

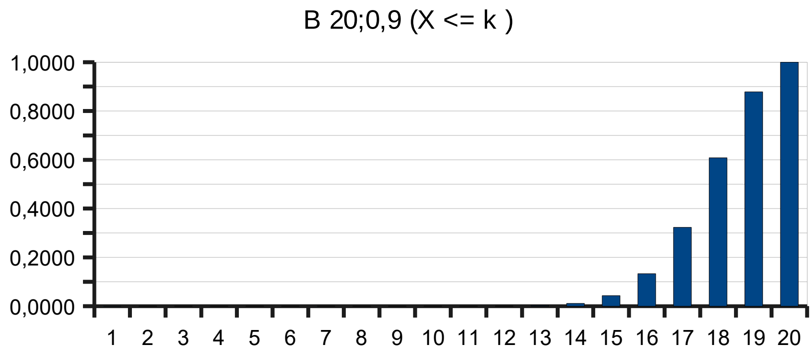
Unterschiede an den Summenwahrscheinlichkeiten sind kaum zu erkennen. Man erkennt nur, daß auch diese Funktionen nach rechts verschoben werden.











Wechsel von der Binomialverteilung zur Normalverteilung

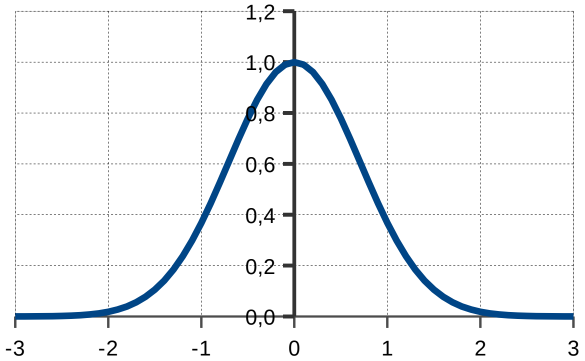
Bei der Berechnung de Erwartungswertes und der Streuung stellt man bei der Binomialverteilung schnell fest, dass die entstehenden Dezimalzahlen bei der Umsetzung und der Interpretation Probleme bereiten. Diese Probleme resultieren daraus, dass die Binomialverteilung eine sogenannte diskrete Verteilung ist, die nur für ganzzahlige x – Werte definiert ist.
Durch die Benutzung einer stetigen Verteilung, die auch für reelle x – Werte definiert ist, würde dieses Problem nicht auftreten. Deshalb versucht man aus der Binomialverteilung eine stetige Verteilung zu erzeugen, die aber trotzdem die Werte der Binomialverteilung widerspiegelt.

Wichtig für diese Überlegung ist der sogenannte „Zentrale Grenzwertsatz“ :

Für wachsende Werte von n nähert sich jede Verteilung der Normalverteilung an.

Zum Einstieg der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bereits bekannt: Für eine wachsende Anzahl von Versuchen konvergiert die Häufigkeit des Ereignisses gegen die Wahrscheinlichkeit. Der Zentrale Grenzwertsatz ist damit eine Erweiterung. Es konvergiert nicht nur die Wahrscheinlichkeit, sondern auch der Mittelwert und die Streuung gegen die Normalverteilung. Daraus resultiert, dass viele Probleme mit Hilfe der Normalverteilung gelöst werden, obwohl sie zunächst einer anderen Verteilung zuzuordnen sind.
Deshalb löst man auch viele Probleme der Binomialverteilung mit der Normalverteilung.

Die Grundgleichung der Normalverteilung lautet : $y = e^{-x^2}$



Die Funktion sieht dem Säulendiagramm einer Binomialverteilung schon sehr ähnlich. Die höchste Stelle der Funktion ist die Stelle des **Erwartungswertes**. Bei der Binomialverteilung ist aber auch noch die Summe über alle Säulen gleich 1, da das die Gesamtwahrscheinlichkeit darstellt. Für diese Funktion würde das bedeuten, dass die Fläche unter der Funktion gleich 1 ist. Das wird wahrscheinlich nicht der Fall sein.
Diese Funktion soll in eine standardisierte Funktion umgewandelt werden.

Zunächst werden die Wendepunkte auf den Wert 1 gebracht. Die Wendepunkte kennzeichnen die Streuung der Wahrscheinlichkeit.

$$y = e^{-x^2}$$

Für Wendepunkte benötigt man die 2. Ableitung:

$$y' = -2x\, e^{-x^2}$$

$$y'' = -2\,(e^{-x^2} - 2x^2\, e^{-x^2})$$

$$y'' = -2\, e^{-x^2}\,(1 - 2x^2)$$

$$x_{w1} = -\sqrt{½} \qquad x_{w2} = +\sqrt{½}$$

Eigenschaften der Binomialverteilung:

Varianz : VAR(X) = σ^2 = n p (1 – p)

je größer dieser Wert wird, desto breiter wird das Histogramm der Binomialverteilung und desto flacher werden die Säulen. (Wenn es mehr Säulen gibt, muss die Säulenhöhe kleiner werden, damit die Gesamtsumme der Säulenhöhen bei 1 bleibt). Benutzt man statt der Zufallsvariablen X – E(X) jetzt die normierte Zufallsvariable (X – E(X)) / σ wird durch die Division das Verbreitern verhindert.

Um die Fläche unter einer Funktion zu bestimmen, muss man die Funktion integrieren. Unglücklicher Weise kann man für diese Funktion keine Stammfunktion in einem geschlossenen Ausdruck angeben, so dass diese Funktion früher nur über Tabellen behandelt werden konnte. Um noch einmal Klarheit zu schaffen:

es gibt auch für diese Funktion eine Stammfunktion
man kann diese Funktion aber nicht mit den üblichen Integrationsmethoden bestimmen.

Für den GTR ist das kein Problem, da er sowieso keine Stammfunktionen berechnen kann, sondern die Flächeninhalt tatsächlich über die „Streifenmethode“ für bestimmte Integrale berechnet.

Es hat sich gezeigt, dass die Fläche unter der Funktion genau den Wert $\sqrt{2\pi}$ hat. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}$

Die Dichtefunktion φ(x) der standardisierten Normalverteilung

Damit erhält man dann endgültig die **Standardisierte Normalverteilung**:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

mit den Eigenschaften:

- der Mittelwert (Erwartungswert) ist 0
- die Wendepunkte (Streuung) ist bei ± 1
- die Fläche unter der Kurve (summierte Wahrscheinlichkeit) ist gleich 1.

Bildet man von dieser Funktion die 1. Ableitung erhält man:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x\, e^{-x^2} = \boxed{-x\ \varphi(x)} \qquad x_E = 0$$

für die 2. Ableitung ergibt sich

$$\varphi''(x) = -\varphi(x) - x\,\varphi'(x)$$

$$\boxed{\varphi''(x) = (-1 + x^2)\,\varphi(x)} \qquad x_{w1} = -1 \qquad x_{w2} = +1$$

Erwartungswert : E(X) = μ = n p

Für größer werdendes n (Anzahl) oder größer werdendes p wandert der Erwartungswert weiter nach rechts. Ein weiteres Problem ist, dass der Erwartungswert einer Binomialverteilung nicht im Nullpunkt liegt und deshalb muß die Funktion so verschoben werden, damit das Maximum bei dem Wert μ liegt.

(Bei Verallgemeinerungen von Funktionen führt ein Ausdruck (x – c) immer zu einer Verschiebung der Funktion in x Richtung um c Einheiten)

Eine Verschiebung der Funktion auf den Erwartungswert μ führt zu der Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2}$

Bis dahin haben wir erreicht, dass der Erwartungswert bei μ liegt. Jetzt muß noch gesichert werden, dass die Streuung bei σ und die Fläche unter der Kurve den Wert 1 hat, da diese Fläche die Verteilungsfunktion darstellt und als Gesamtsumme den Wert 1 haben muß.

(Bei Verallgemeinerungen von Funktionen führt ein Ausdruck bx immer zu einem Strecken und Stauchen in x Richtung. b > 1 drückt die Funktion zusammen und b < 1 zieht die Funktion auseinander. Wenn σ > 1 ist, ist 1/ σ < 1

Der Erwartungswert liegt bei μ und der Ausdruck x – μ erreicht, dass der Erwartungswert damit auf 0 liegt. Jetzt geht es um einen Faktor vor dem x, der ein Strecken/Stauchen in x – Richtung bewirkt, so dass der Wendepunkt bei x = σ liegt.

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2}$$

$$\varphi'(x) = -b(x-\mu)\, e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2}$$

$$\varphi''(x) = -b\, e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2} + b^2 (x-\mu)^2\, e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2}$$

$$\varphi''(x) = \left(-b + b^2 (x-\mu)^2\right) e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2}$$

Für den Wendepunkt die 2. Ableitung Null setzen, es reicht, wenn man die Klammer Null setzt.

$$-b + b^2 (x-\mu)^2 = 0$$

$$b (x-\mu)^2 = 1$$

$$(x-\mu)^2 = \frac{1}{b}$$

$$x - \mu = \pm\sqrt{\frac{1}{b}} = \sigma$$

(σ ist nicht der tatsächliche x Wert des Wendepunktes , sondern ist der Abstand des Wendepunktes zum Erwartungswert, damit nicht x, sondern x – μ)

durch Quadrieren der Gleichung und Multiplizieren mit b erhält man folgende Gleichung

$$b\,\sigma^2 = 1$$

und nach Auflösen nach b ergibt sich: $b = \frac{1}{\sigma^2}$

Damit ändert sich aber die Funktion und somit auch die Fläche unter der Funktion. Die Fläche unter der Funktion muß aber nach wie vor 1 bleiben.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \qquad t = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sigma} \qquad dx = \sigma\, dt$$

Integrationsmethode „Substitution“, in Schule wieder mal nicht behandelt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} \sigma\, dt = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \sigma \cdot 1$$

deshalb muß der Vorfaktor ergänzt werden zu : $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ dann ist die Fläche unter der Kurve wieder 1.

Mit diesem Wert ergibt sich als Funktion der Normalverteilung zu einer vorgegebenen Binomialverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

Deshalb betrachtet man statt P(x = k) die Wahrscheinlichkeit $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = B_{n;p}(k)$

Je größer n wird, desto mehr nähert sich das Histogramm der standardisierten Zufallsgröße $\frac{X-\mu}{\sigma}$ einer symmetrischen Glockenkurve an.

Diese Funktion lässt sich dann wie oben beschreiben mit : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2} x^2}$

Damit lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen (z.B große Werte für n) die Binomialverteilung durch die stetige Normalverteilung ersetzen. Das Gegenstück zu den einzelnen Säulen ist die Funktion φ (x) und das Gegenstück zu den summierten Säulen ist die Funktion Φ(x) als Stammfunktion von φ (x), die sich aber nicht als geschlossene Funktion darstellen lässt. Der GTR beherrscht aber beide Funktionen.

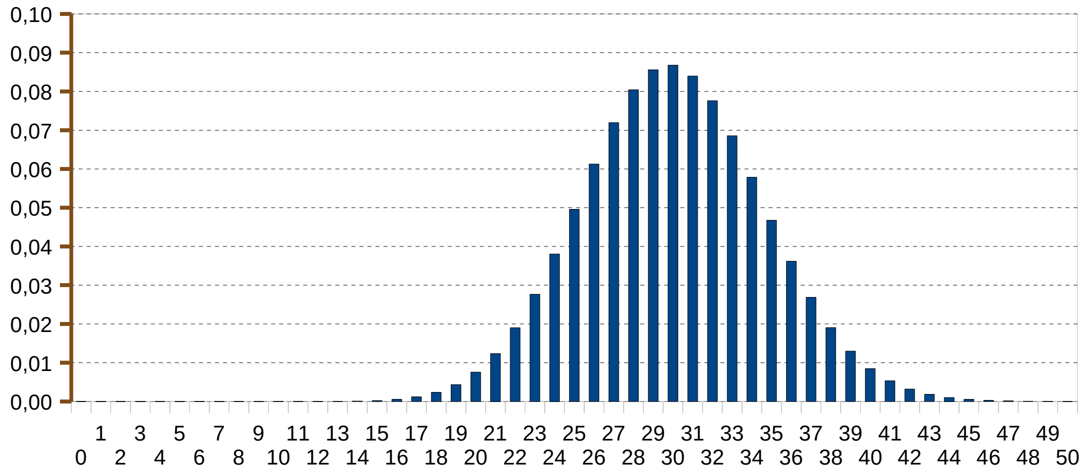
Die Dichtefunktion φ(x) der Standardnormalverteilung

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,10	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,20	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,30	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,40	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,50	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,60	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,70	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,80	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,90	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,00	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,10	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,20	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,30	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,40	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,50	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,60	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,70	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,80	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,90	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,00	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,10	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,20	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,30	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,40	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,50	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,60	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,70	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,80	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,90	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,00	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,10	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,20	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,30	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,40	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,50	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,60	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,70	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,80	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,90	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,00	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y – Achse, deshalb ist der Funktionswert von x = - 2,4 identisch mit dem Funktionswert von x = + 2,4.

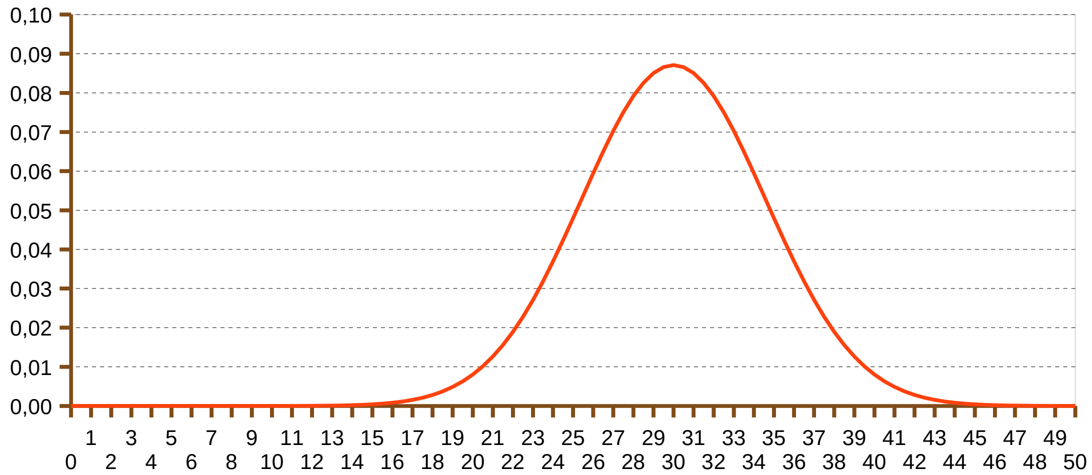
Das Kurvenbild der Binomialverteilung im Vergleich zur Normalverteilung.

Für das Kurvenbild der Binomialverteilung wurden die Werte n = 100 und p = 0,3 benutzt.

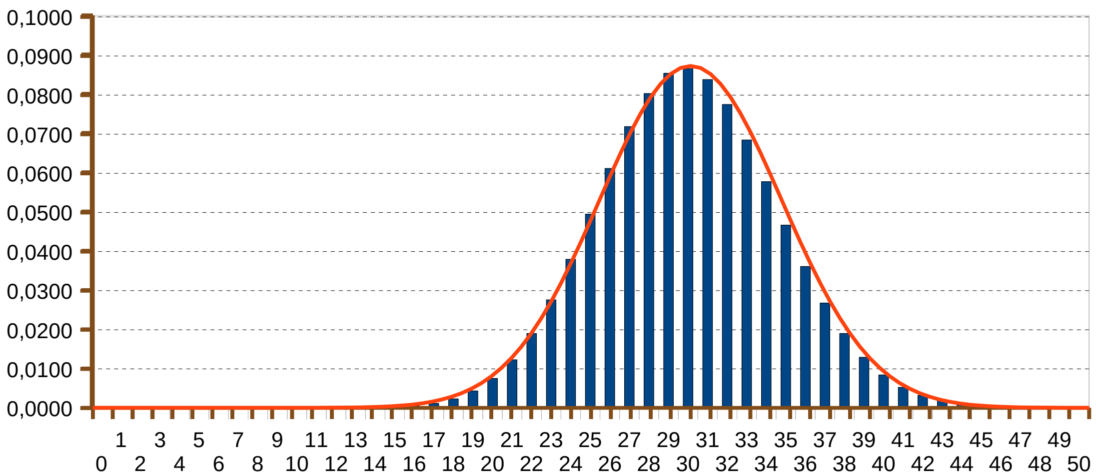


Die Werte n = 100 und p = 0,3 führen zur den Werten μ = 30 und σ = 4,58.

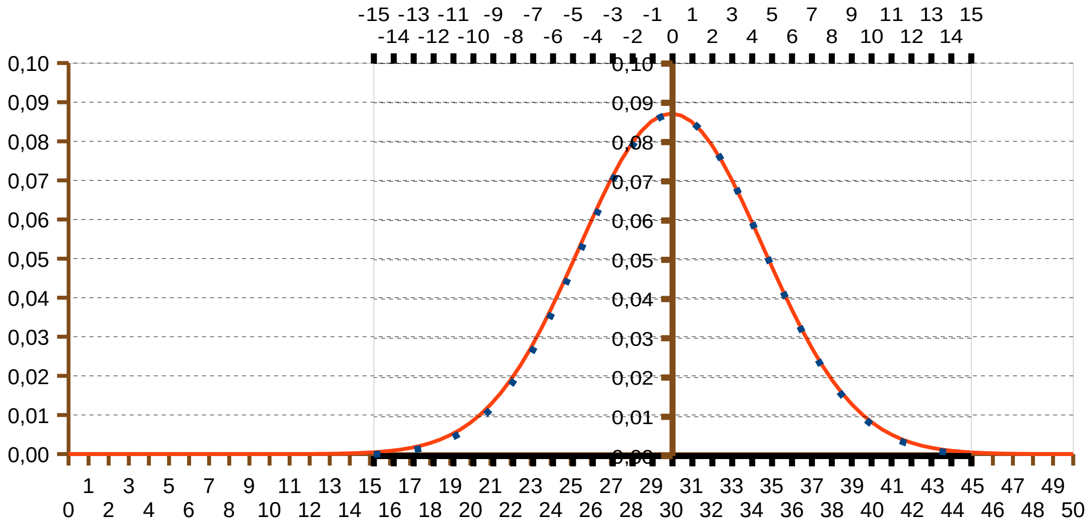
und diese zu einer Normalverteilung $y = \dfrac{1}{4{,}58\,\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{(x-30)^2}{4{,}58}}$



Man kann die beiden Kurven auch übereinander legen:



Da die Funktionsverschiebung um μ die Funktion nicht streckt oder staucht, kann man die ursprüngliche Funktion auch auf die y – Achse verschieben und es ergeben sich links und rechts vom Erwartungswert, der jetzt 0 ist, das gleiche Kurvenbild.
Im unten abgebildeten Kurvenbild ist die rote Kurven die gleiche, wie auf der vorherigen Seite. Die blau punktierte Linie ist die Kurven mit dem gleichen σ aber dem Erwartungswert 0. Die x Ache der blau punktierten Kurve ist oberhalb der Kurven angegeben. Positioniert man beide Kurven genau über dem Erwartungswert, die 0 der blauen Kurven muß auf der 30 der roten Kurven liegen und stellt bei beiden Kurven die gleiche Breite ein, hier jeweils 15 nach links und rechts, sind die Kurven Deckungsgleich.



Wenn man eine Binomialverteilung in eine Normalverteilung ändert, kann man die Normalverteilung auch beim Erwartungswert 0 betrachten, solange man das σ beibehält.
Bei dieser Normalverteilungsfunktion kann man folgende Eigenschaften feststellen:

- Die Funktion ist symmetrisch zu Erwartungswert.
- Die Fläche unter der Kurve links und rechts vom Erwartungswert ist gleich, nämlich ½ (Die Fläche ist gleich der Verteilungsfunktion und die muß insgesamt 1 sein.)
- Betrachtet man einen beliebigen, aber festen Abstand (k Wert) vom Erwartungswert, sind die Flächen bis zu Erwartungswert gleich und die Flächen außerhalb des gewählten k Wertes sind auch gleich.

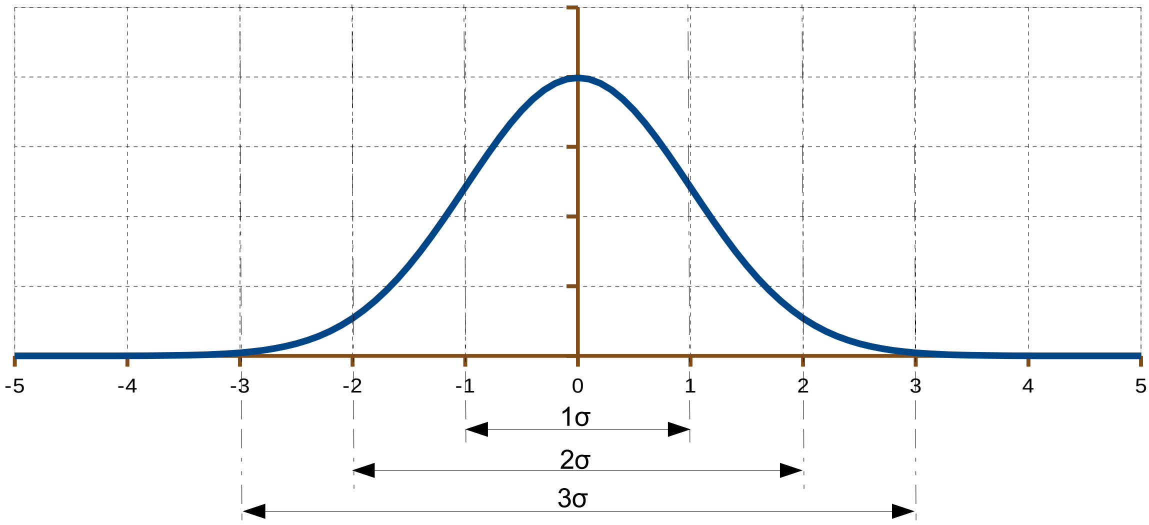
σ – Intervalle

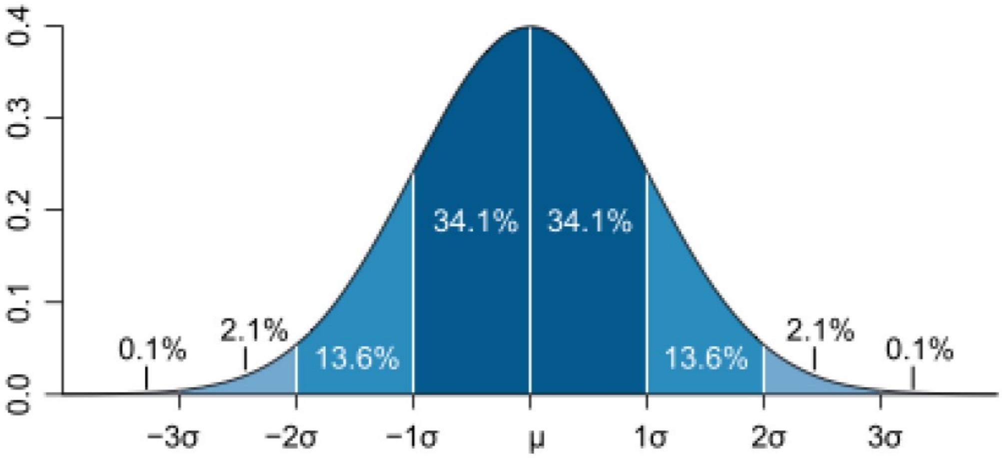
Was nicht so leicht nachzuweisen ist, da es für die Fläche keine Stammfunktion gibt, ist die Tatsache,

- unabhängig, wie groß das σ ist, sind die Flächen unterhalb der Kurven, gemessen in σ Abständen immer gleich

In σ – Abständen gemessen hat man unter der Kurven immer den gleichen Flächeninhalt.

Das führt dazu, daß man sich bei seinen Berechnungen auf die Standard Normalverteilung beschränken kann, die μ = 0 und σ = 1 hat und man kann alle Aussagen aus dieser Verteilung beziehen, solange man sich nicht auf konkrete k Werte bezieht, sondern nur auf Vielfache von σ . Diese Vielfachen von σ lassen sich dann einfach auf die konkreten Verteilungen übertragen.





Berechnungen haben gezeigt, daß

- das Intervall $\mu \pm 1 \cdot \sigma$ enthält etwa 68% der Gesamtfläche,
- das Intervall $\mu \pm 2 \cdot \sigma$ enthält etwa 95% der Gesamtfläche
- das Intervall $\mu \pm 3 \cdot \sigma$ enthält etwa 99% der Gesamtfläche

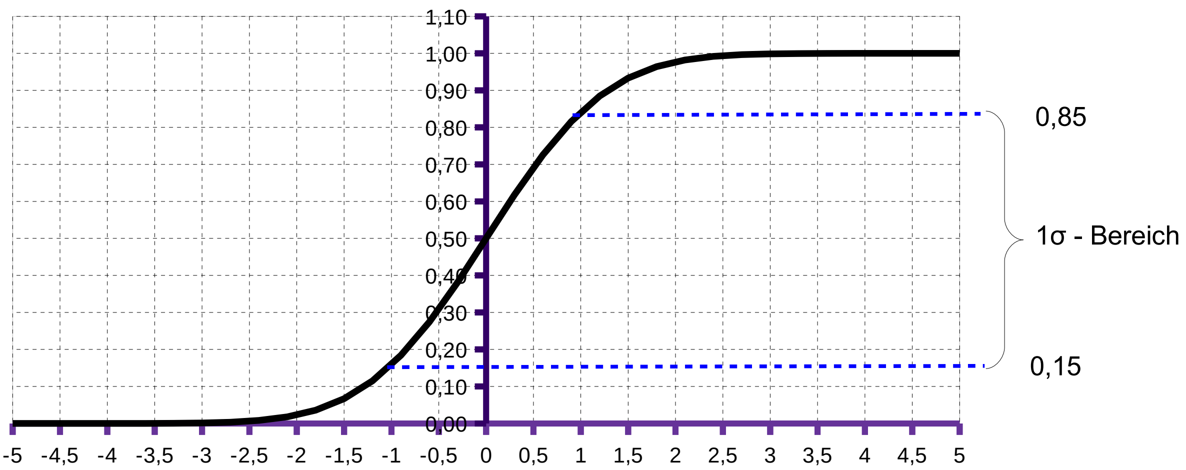
betragen.

Die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung

Die Fläche unter der Dichtefunktion gibt gleichzeitig den Wert der Verteilungsfunktion an. Die Verteilungsfunktion ist monoton wachsend, da es nur Flächenteile oberhalb der x – Achse gibt. Ihr kleinster Wert bei $-\infty$ ist 0 und ihr größter Wert bei $+\infty$ ist 1. Die Stelle x = 0, die den Extremwert der Funktion φ (x) darstellt ist damit der Wendepunkt der Stammfunktion.

> Zur absoluten Sicherstellung:
> Für die oben angegebene Funktion φ(x) ***existiert*** eine Stammfunktion !
> Man kann diese Funktion ***nur nicht*** in einer der üblichen Funktionsdarstellungen ***angeben*** !
> Die Aussage: Es gibt keine Stammfunktion ist **falsch** !

Die Verteilungsfunktion für die Standard Normalverteilung hat folgendes Aussehen:



Der 1σ Bereich umfasst die y – Werte von x = - 1 bis x = +1. Diese beiden Werte sind die Wendepunkte von φ(x) und damit die Grenzen des 1σ Bereichs. Die Wahrscheinlichkeit des 1σ Bereichs ist die Differenz der beiden Wahrscheinlichkeiten an diesen Punkten. Bereits an dieser etwas groben Zeichnung sieht man, daß diese Differenz etwas 0,7 betragen muß.
In Anlehnung an die **Dichtefunktion φ(x)** bezeichnet man die **Verteilungsfunktion mit Φ(x)** .
Verteilungsfunktionen erhalten immer den Großbuchstaben der Bezeichnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion. Deshalb sollten diese auch immer mit einem Kleinbuchstaben bezeichnet werden.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Die Verteilungsfunktion Φ(x) der Standardnormalverteilung

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,50	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,60	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,70	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,80	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,90	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Der Wert der Verteilungsfunktion für x = 0 beträgt 0,5. Links und rechts des Erwartungswertes ist die Wahrscheinlichkeit gleich 0,5. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt P(0 | 0,5).
Das bedeutet für die Funktion gilt die folgende Formel, wenn der Punkt, zu dem die Symmetrie besteht $P(x_0 \mid y_0)$ ist.

$$\mathbf{\tfrac{1}{2}\,[\, f(x_0+h) + f(x_0-h)\,] = y_0}$$

$$\tfrac{1}{2}\,[\,\Phi(x) + \Phi(-x)\,] = 0{,}5 \qquad x_0 = 0 \text{ und } h = x$$

oder umgestellt

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Der etwas unhandliche Ausdruck der Dichtefunktion und der nicht vorhandene Ausdruck für die Verteilungsfunktion führten dazu, daß man diese Werte immer nur aus Tabellen ablesen konnte. Die heute verfügbaren Taschenrechner haben damit ein Ende gemacht. Jeder einigermaßen gute Taschenrechner bietet die Möglichkeit die Werte zu berechnen. Übliche Bezeichnungen für die beiden Funktionen sind immer der Name der Verteilungsfunktion und daran angehängt ein „pdf“ für die Dichtefunktion und ein „cdf“ für die Verteilungsfunktion.
Bei guten Taschenrechnern kann man bei der Verteilungsfunktion eine untere und eine obere Grenze eingeben. Damit kann man Wahrscheinlichkeiten beliebiger Bereiche berechnen. Läßt der Taschenrechner nur die Eingabe einer oberen Grenze (die meisten Schultaschenrechner) zu, muß man die Differenz selbst berechnen.

Berechnung des Sigma – Bereiches

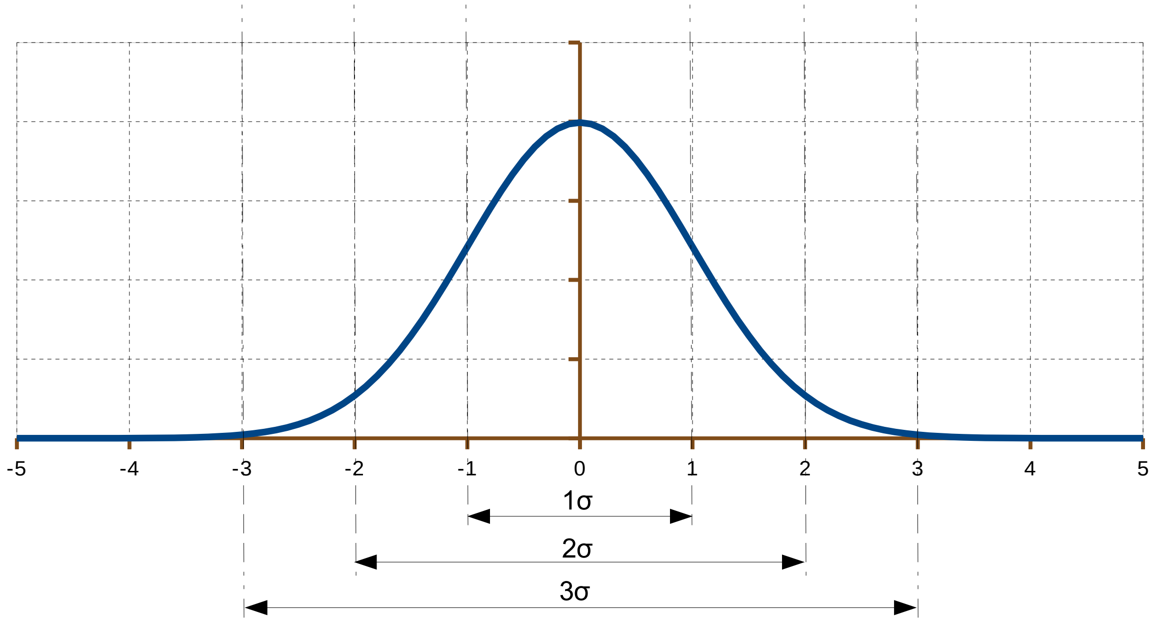
Die Berechnung der Sigma Bereiche stellt damit kein Problem mehr dar. Man könnte sogar die Wahrscheinlichkeit für den 1,6534 σ Bereich berechnen.

Das Problem stellt die Umkehrung dar.
Man hat eine Verteilung, z.B. eine Binomialverteilung mit bekanntem μ und σ . Die Frage ist jetzt:
Wie weit muß mein σ Bereich gehen, damit die Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Ereignisse 95% betragt.
Anders formuliert:
Wie groß muß das k sein, damit die summierte Wahrscheinlichkeit von 0 bis k gleich 0,95 beträgt.

Andere Fragestellung:
Wie groß muß mein k sein, damit die Wahrscheinlichkeit für alle Ereignisse, die größer als diese k sind höchsten 5% beträgt.
Hier sind die summierten Wahrscheinlichkeiten gegeben und es sind die σ Bereiche gesucht, die diesen Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Genau das machen die Hypothesentests.

Was man hier braucht sind die sogenannten α Quantile. Der Begriff kommt aus der Statistik (nicht Wahrscheinlichkeit) und gibt die Bereiche an, deren Häufigkeit des Auftretens größer oder kleiner dem angegebenen α entsprechen.

Unter Verwendung der σ – Regel liegt ein bestimmter Anteil der Ereignisse innerhalb eines Vielfachen des σ Bereichs. Für jede Sicherheitswahrscheinlichkeit kann man einen Faktor für das finden, so dass ein Bereich gekennzeichnet wird, in dem die geforderte Anzahl von Ereignissen liegt



$$P(\mu - c\sigma ; \mu + c\sigma) = 1 - \alpha = \beta$$

Dabei stellt β die **Sicherheitswahrscheinlichkeit** und α die **Irrtumswahrscheinlichkeit** dar.

Das eigentliche Problem stellt die Frage dar, wie groß muss denn das σ Intervall sein, damit die Ergebnisse mit β Sicherheit in dem Intervall liegen. Da die Wahrscheinlichkeitskurven sich doch unterscheiden und damit die σ Intervalle unterschiedliche Breite annehmen können, bezieht man sich zunächst auf die Standardnormalverteilung. Bei dieser Verteilung ist der Mittelwert fest mit μ = 0 und die Streuung σ = 1.

Aus diesen Werten lässt sich der Faktor c berechnen. Der Vorteil ist, man braucht nur die Sicherheitswahrscheinlichkeit β und kann den Wert für c berechnen. Das erledigt die im Taschenrechner implementierte Funktion InvNorm () , bei der die Werte für μ und σ auf 0 und 1 bleiben müssen.
Das Ergebnis ist der gesuchte Faktor c für die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit.

Die Standard–Normalverteilung wird in der Literatur häufig mit Φ bezeichnet und damit die Inverse der Standard–Normalverteilung mit Φ^{-1} . Der einzige Übergabeparameter für diese Funktion ist der Wert von β. Das Ergebnis (der zurückgelieferte Funktionswert) ist der Multiplikator für Sigma, um die gewünschte Sicherheitswahrscheinlichkeit zu bekommen.

Die Fläche unter der Standard – Normalverteilung hat den Wert 1. Die Grenzen für das Integral laufen von $-\infty$ bis $+\infty$. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es für Werte kleiner als – 4 und größer als +4 kaum noch nennenswerte Flächeninhalte gibt.
Mit dem Flächeninhalt von 1 ist auch der Flächeninhalt bis x = 0 eindeutig mit ½ gegeben. Geht man von x = 0 beidseitige (oder auch einseitig) nach außen, kann man für jeden x Wert die Fläche um den Erwartungswert bestimmen. Für jeden gewählten Flächeninhalt lässt sich eindeutig ein zugehöriges x bestimmen, das sich links und rechts vom Mittelwert befindet und den gegebenen Flächeninhalt einschließt. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden diese x Werte nicht mit ihren absoluten Werten angegeben, sondern als Vielfache der Streuung. Genau dieser Vervielfachungsfaktor ist der Wert c, der oben angegeben wurde und das Ergebnis der Inversen Standard Normalverteilung ist.

Ein großer Teil dieser c Werte ist auch in der Literatur unter der Bezeichnung „Quantile der Standard Normalverteilung“ zu finden.

$$\Phi^{-1}(\beta) = c$$

oder $P(\mu - c\sigma \le X \le \mu + c\sigma) = \beta$

$$\Phi(\mu + c\sigma) - \Phi(\mu - c\sigma) = \beta$$

in diesem Fall liegt das Ereignis X zwischen den Werten $\mu - c\sigma$ und $\mu + c\sigma$.

Für vorgegebene σ Bereiche ergeben sich folgende Faktoren:

1σ-Bereich:	$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$	≈ 68,3 %
2σ-Bereich:	$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$	≈ 95,4 %
3σ-Bereich:	$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$	≈ 99,7 %

In umgekehrter Weise erhält man für vorgegebene Prozentzahlen:

$P(\mu - 0{,}67\sigma \le X \le \mu + 0{,}67\sigma)$	≈ 50 %	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma)$	≈ 90 %
$P(\mu - 0{,}84\sigma \le X \le \mu + 0{,}84\sigma)$	≈ 60 %	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma)$	≈ 95 %
$P(\mu - 1{,}04\sigma \le X \le \mu + 1{,}04\sigma)$	≈ 70 %	$P(\mu - 2{,}33\sigma \le X \le \mu + 2{,}33\sigma)$	≈ 98 %
$P(\mu - 1{,}15\sigma \le X \le \mu + 1{,}15\sigma)$	≈ 75 %	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma)$	≈ 99 %
$P(\mu - 1{,}28\sigma \le X \le \mu + 1{,}28\sigma)$	≈ 80 %	$P(\mu - 3{,}29\sigma \le X \le \mu + 3{,}29\sigma)$	≈ 99,9 %

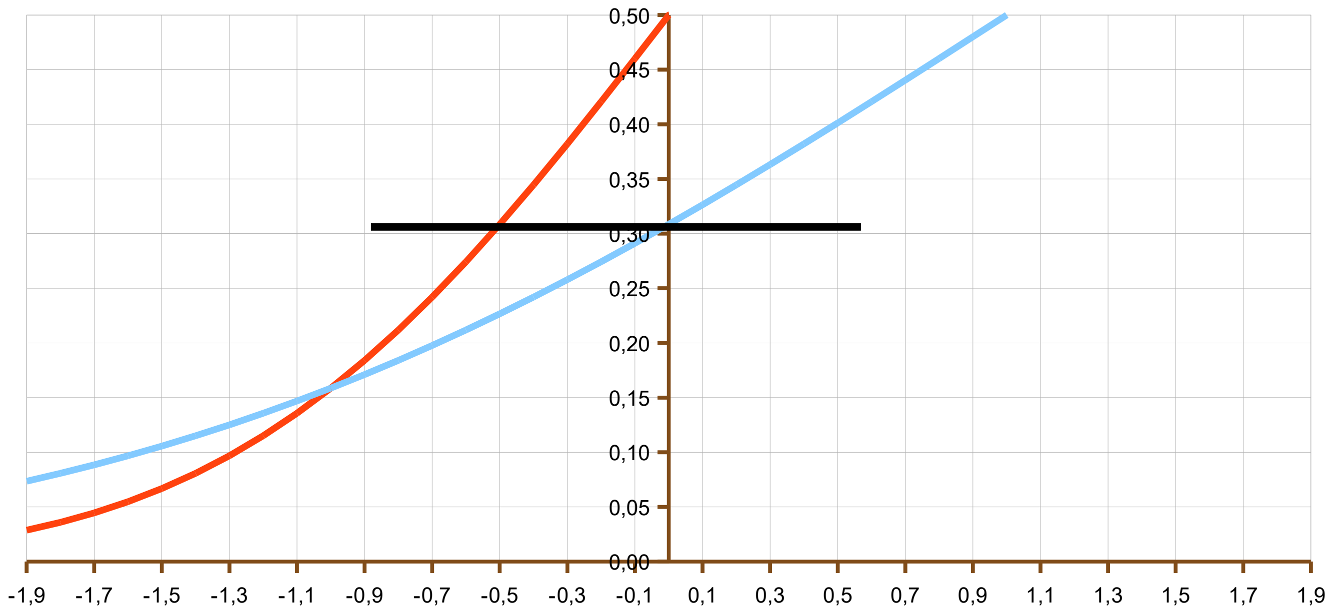
Betrachtung einer beliebigen Normalverteilung zur Umrechnung auf die Standard-Normalverteilung.

Weiter oben wurde bereits die Umrechnungsformel auf die Standard-Normalverteilung angegeben:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Wie ist mit dieser Umrechnung zu arbeiten. Zunächst muss festgehalten werden, dass jeder x Wert einzeln umgerechnet werden muss, dh. man kann hat keine umgerechnete Funktionsgleichung, sondern muss alles punktweise berechnen. Dazu soll folgendes Beispiel betrachtet werden:

Gesucht ist der Wert von P, für eine Normalverteilung mit μ = 1 und σ = 2 und dem Punkt x = 0.
Nach der Umrechnung auf die Standard-Normalverteilung erhält man für z = ½ . Dazu sollen jetzt die beiden unterschiedlichen Verteilungsfunktionen betrachtet werden.



Die blaue Funktionskurve ist die Kurve für: μ = 1 und σ = 2. Für den Wert x = 0 kann man den Funktionswert 0,3 ablesen. Der genaue wert beträgt 0,3085.
Die rote Kurve ist die Standard-Normalverteilung für μ = 0 und σ = 1. Die Frage, die jetzt steht ist, bei welchem x-Wert der roten Kurve wir der Funktionswert 0,3 erreicht. Wenn man ach der Position y = 0,3 nach links auf die rote Kurven geht bekommt man den Wert - 0,5. Das entspricht der Umrechnung:

Für den Wert z = - 0,5 erhält man in der Standard-Normalverteilung den gleichen Wert wie bei der Verteilung μ = 1 und σ = 2 und x = 0.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{0 - 1}{2} = -0{,}5$$

Auf den folgenden beiden Seiten sind die Tabellen für den einseitigen Test zusammengestellt.
Heutzutage braucht man diese Tabellen nicht mehr, da die gesuchten c – Werte auch über den Taschenrechner ermittelt werden können. Dazu gibt man im Taschenrechner die Funktion

InvNormVert

ein und läßt die Werte μ = 0 und σ = 1 stehen.
Der Rückgabewert der Funktion ist genau das gesuchte c.

Ändert man die Werte für μ und σ auf die tatsächlichen Werte, gibt die Funktion schon die gesuchte Position k zurück. Er führt dann die Umrechnung selbst durch.

Linksseitige Quantile

P	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,00		-3,0902	-2,8782	-2,7478	-2,6521	-2,5758	-2,5121	-2,4573	-2,4089	-2,3656
0,01	-2,3263	-2,2904	-2,2571	-2,2262	-2,1973	-2,1701	-2,1444	-2,1201	-2,0969	-2,0749
0,02	-2,0537	-2,0335	-2,0141	-1,9954	-1,9774	-1,9600	-1,9431	-1,9268	-1,9110	-1,8957
0,03	-1,8808	-1,8663	-1,8522	-1,8384	-1,8250	-1,8119	-1,7991	-1,7866	-1,7744	-1,7624
0,04	-1,7507	-1,7392	-1,7279	-1,7169	-1,7060	-1,6954	-1,6849	-1,6747	-1,6646	-1,6546
0,05	-1,6449	-1,6352	-1,6258	-1,6164	-1,6072	-1,5982	-1,5893	-1,5805	-1,5718	-1,5632
0,06	-1,5548	-1,5464	-1,5382	-1,5301	-1,5220	-1,5141	-1,5063	-1,4985	-1,4909	-1,4833
0,07	-1,4758	-1,4684	-1,4611	-1,4538	-1,4466	-1,4395	-1,4325	-1,4255	-1,4187	-1,4118
0,08	-1,4051	-1,3984	-1,3917	-1,3852	-1,3787	-1,3722	-1,3658	-1,3595	-1,3532	-1,3469
0,09	-1,3408	-1,3346	-1,3285	-1,3225	-1,3165	-1,3106	-1,3047	-1,2988	-1,2930	-1,2873
0,10	-1,2816	-1,2759	-1,2702	-1,2646	-1,2591	-1,2536	-1,2481	-1,2426	-1,2372	-1,2319
0,11	-1,2265	-1,2212	-1,2160	-1,2107	-1,2055	-1,2004	-1,1952	-1,1901	-1,1850	-1,1800
0,12	-1,1750	-1,1700	-1,1650	-1,1601	-1,1552	-1,1503	-1,1455	-1,1407	-1,1359	-1,1311
0,13	-1,1264	-1,1217	-1,1170	-1,1123	-1,1077	-1,1031	-1,0985	-1,0939	-1,0893	-1,0848
0,14	-1,0803	-1,0758	-1,0714	-1,0669	-1,0625	-1,0581	-1,0537	-1,0494	-1,0450	-1,0407
0,15	-1,0364	-1,0322	-1,0279	-1,0237	-1,0194	-1,0152	-1,0110	-1,0069	-1,0027	-0,9986
0,16	-0,9945	-0,9904	-0,9863	-0,9822	-0,9782	-0,9741	-0,9701	-0,9661	-0,9621	-0,9581
0,17	-0,9542	-0,9502	-0,9463	-0,9424	-0,9385	-0,9346	-0,9307	-0,9269	-0,9230	-0,9192
0,18	-0,9154	-0,9116	-0,9078	-0,9040	-0,9002	-0,8965	-0,8927	-0,8890	-0,8853	-0,8816
0,19	-0,8779	-0,8742	-0,8705	-0,8669	-0,8633	-0,8596	-0,8560	-0,8524	-0,8488	-0,8452
0,20	-0,8416	-0,8381	-0,8345	-0,8310	-0,8274	-0,8239	-0,8204	-0,8169	-0,8134	-0,8099
0,21	-0,8064	-0,8030	-0,7995	-0,7961	-0,7926	-0,7892	-0,7858	-0,7824	-0,7790	-0,7756
0,22	-0,7722	-0,7688	-0,7655	-0,7621	-0,7588	-0,7554	-0,7521	-0,7488	-0,7454	-0,7421
0,23	-0,7388	-0,7356	-0,7323	-0,7290	-0,7257	-0,7225	-0,7192	-0,7160	-0,7128	-0,7095
0,24	-0,7063	-0,7031	-0,6999	-0,6967	-0,6935	-0,6903	-0,6871	-0,6840	-0,6808	-0,6776
0,25	-0,6745	-0,6713	-0,6682	-0,6651	-0,6620	-0,6588	-0,6557	-0,6526	-0,6495	-0,6464
0,26	-0,6433	-0,6403	-0,6372	-0,6341	-0,6311	-0,6280	-0,6250	-0,6219	-0,6189	-0,6158
0,27	-0,6128	-0,6098	-0,6068	-0,6038	-0,6008	-0,5978	-0,5948	-0,5918	-0,5888	-0,5858
0,28	-0,5828	-0,5799	-0,5769	-0,5740	-0,5710	-0,5681	-0,5651	-0,5622	-0,5592	-0,5563
0,29	-0,5534	-0,5505	-0,5476	-0,5446	-0,5417	-0,5388	-0,5359	-0,5330	-0,5302	-0,5273
0,30	-0,5244	-0,5215	-0,5187	-0,5158	-0,5129	-0,5101	-0,5072	-0,5044	-0,5015	-0,4987
0,31	-0,4959	-0,4930	-0,4902	-0,4874	-0,4845	-0,4817	-0,4789	-0,4761	-0,4733	-0,4705
0,32	-0,4677	-0,4649	-0,4621	-0,4593	-0,4565	-0,4538	-0,4510	-0,4482	-0,4454	-0,4427
0,33	-0,4399	-0,4372	-0,4344	-0,4316	-0,4289	-0,4261	-0,4234	-0,4207	-0,4179	-0,4152
0,34	-0,4125	-0,4097	-0,4070	-0,4043	-0,4016	-0,3989	-0,3961	-0,3934	-0,3907	-0,3880
0,35	-0,3853	-0,3826	-0,3799	-0,3772	-0,3745	-0,3719	-0,3692	-0,3665	-0,3638	-0,3611
0,36	-0,3585	-0,3558	-0,3531	-0,3505	-0,3478	-0,3451	-0,3425	-0,3398	-0,3372	-0,3345
0,37	-0,3319	-0,3292	-0,3266	-0,3239	-0,3213	-0,3186	-0,3160	-0,3134	-0,3107	-0,3081
0,38	-0,3055	-0,3029	-0,3002	-0,2976	-0,2950	-0,2924	-0,2898	-0,2871	-0,2845	-0,2819
0,39	-0,2793	-0,2767	-0,2741	-0,2715	-0,2689	-0,2663	-0,2637	-0,2611	-0,2585	-0,2559
0,40	-0,2533	-0,2508	-0,2482	-0,2456	-0,2430	-0,2404	-0,2378	-0,2353	-0,2327	-0,2301
0,41	-0,2275	-0,2250	-0,2224	-0,2198	-0,2173	-0,2147	-0,2121	-0,2096	-0,2070	-0,2045
0,42	-0,2019	-0,1993	-0,1968	-0,1942	-0,1917	-0,1891	-0,1866	-0,1840	-0,1815	-0,1789
0,43	-0,1764	-0,1738	-0,1713	-0,1687	-0,1662	-0,1637	-0,1611	-0,1586	-0,1560	-0,1535
0,44	-0,1510	-0,1484	-0,1459	-0,1434	-0,1408	-0,1383	-0,1358	-0,1332	-0,1307	-0,1282
0,45	-0,1257	-0,1231	-0,1206	-0,1181	-0,1156	-0,1130	-0,1105	-0,1080	-0,1055	-0,1030
0,46	-0,1004	-0,0979	-0,0954	-0,0929	-0,0904	-0,0878	-0,0853	-0,0828	-0,0803	-0,0778
0,47	-0,0753	-0,0728	-0,0702	-0,0677	-0,0652	-0,0627	-0,0602	-0,0577	-0,0552	-0,0527
0,48	-0,0502	-0,0476	-0,0451	-0,0426	-0,0401	-0,0376	-0,0351	-0,0326	-0,0301	-0,0276
0,49	-0,0251	-0,0226	-0,0201	-0,0175	-0,0150	-0,0125	-0,0100	-0,0075	-0,0050	-0,0025

Beispiel:
Gesucht ist der Bereich, bei dem die summierte Wahrscheinlichkeit 15 % beträgt.

Der c – Wert für 15% liegt bei 0,150 und beträgt – 1,0364

Damit endet der Bereich bei μ – 1,0364 σ unabhängig von den tatsächlichen Werten von μ und σ.

Rechtsseitige Quantile

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,50	0,0000	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0201	0,0226
0,51	0,0251	0,0276	0,0301	0,0326	0,0351	0,0376	0,0401	0,0426	0,0451	0,0476
0,52	0,0502	0,0527	0,0552	0,0577	0,0602	0,0627	0,0652	0,0677	0,0702	0,0728
0,53	0,0753	0,0778	0,0803	0,0828	0,0853	0,0878	0,0904	0,0929	0,0954	0,0979
0,54	0,1004	0,1030	0,1055	0,1080	0,1105	0,1130	0,1156	0,1181	0,1206	0,1231
0,55	0,1257	0,1282	0,1307	0,1332	0,1358	0,1383	0,1408	0,1434	0,1459	0,1484
0,56	0,1510	0,1535	0,1560	0,1586	0,1611	0,1637	0,1662	0,1687	0,1713	0,1738
0,57	0,1764	0,1789	0,1815	0,1840	0,1866	0,1891	0,1917	0,1942	0,1968	0,1993
0,58	0,2019	0,2045	0,2070	0,2096	0,2121	0,2147	0,2173	0,2198	0,2224	0,2250
0,59	0,2275	0,2301	0,2327	0,2353	0,2378	0,2404	0,2430	0,2456	0,2482	0,2508
0,60	0,2533	0,2559	0,2585	0,2611	0,2637	0,2663	0,2689	0,2715	0,2741	0,2767
0,61	0,2793	0,2819	0,2845	0,2871	0,2898	0,2924	0,2950	0,2976	0,3002	0,3029
0,62	0,3055	0,3081	0,3107	0,3134	0,3160	0,3186	0,3213	0,3239	0,3266	0,3292
0,63	0,3319	0,3345	0,3372	0,3398	0,3425	0,3451	0,3478	0,3505	0,3531	0,3558
0,64	0,3585	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3745	0,3772	0,3799	0,3826
0,65	0,3853	0,3880	0,3907	0,3934	0,3961	0,3989	0,4016	0,4043	0,4070	0,4097
0,66	0,4125	0,4152	0,4179	0,4207	0,4234	0,4261	0,4289	0,4316	0,4344	0,4372
0,67	0,4399	0,4427	0,4454	0,4482	0,4510	0,4538	0,4565	0,4593	0,4621	0,4649
0,68	0,4677	0,4705	0,4733	0,4761	0,4789	0,4817	0,4845	0,4874	0,4902	0,4930
0,69	0,4959	0,4987	0,5015	0,5044	0,5072	0,5101	0,5129	0,5158	0,5187	0,5215
0,70	0,5244	0,5273	0,5302	0,5330	0,5359	0,5388	0,5417	0,5446	0,5476	0,5505
0,71	0,5534	0,5563	0,5592	0,5622	0,5651	0,5681	0,5710	0,5740	0,5769	0,5799
0,72	0,5828	0,5858	0,5888	0,5918	0,5948	0,5978	0,6008	0,6038	0,6068	0,6098
0,73	0,6128	0,6158	0,6189	0,6219	0,6250	0,6280	0,6311	0,6341	0,6372	0,6403
0,74	0,6433	0,6464	0,6495	0,6526	0,6557	0,6588	0,6620	0,6651	0,6682	0,6713
0,75	0,6745	0,6776	0,6808	0,6840	0,6871	0,6903	0,6935	0,6967	0,6999	0,7031
0,76	0,7063	0,7095	0,7128	0,7160	0,7192	0,7225	0,7257	0,7290	0,7323	0,7356
0,77	0,7388	0,7421	0,7454	0,7488	0,7521	0,7554	0,7588	0,7621	0,7655	0,7688
0,78	0,7722	0,7756	0,7790	0,7824	0,7858	0,7892	0,7926	0,7961	0,7995	0,8030
0,79	0,8064	0,8099	0,8134	0,8169	0,8204	0,8239	0,8274	0,8310	0,8345	0,8381
0,80	0,8416	0,8452	0,8488	0,8524	0,8560	0,8596	0,8633	0,8669	0,8705	0,8742
0,81	0,8779	0,8816	0,8853	0,8890	0,8927	0,8965	0,9002	0,9040	0,9078	0,9116
0,82	0,9154	0,9192	0,9230	0,9269	0,9307	0,9346	0,9385	0,9424	0,9463	0,9502
0,83	0,9542	0,9581	0,9621	0,9661	0,9701	0,9741	0,9782	0,9822	0,9863	0,9904
0,84	0,9945	0,9986	1,0027	1,0069	1,0110	1,0152	1,0194	1,0237	1,0279	1,0322
0,85	1,0364	1,0407	1,0450	1,0494	1,0537	1,0581	1,0625	1,0669	1,0714	1,0758
0,86	1,0803	1,0848	1,0893	1,0939	1,0985	1,1031	1,1077	1,1123	1,1170	1,1217
0,87	1,1264	1,1311	1,1359	1,1407	1,1455	1,1503	1,1552	1,1601	1,1650	1,1700
0,88	1,1750	1,1800	1,1850	1,1901	1,1952	1,2004	1,2055	1,2107	1,2160	1,2212
0,89	1,2265	1,2319	1,2372	1,2426	1,2481	1,2536	1,2591	1,2646	1,2702	1,2759
0,90	1,2816	1,2873	1,2930	1,2988	1,3047	1,3106	1,3165	1,3225	1,3285	1,3346
0,91	1,3408	1,3469	1,3532	1,3595	1,3658	1,3722	1,3787	1,3852	1,3917	1,3984
0,92	1,4051	1,4118	1,4187	1,4255	1,4325	1,4395	1,4466	1,4538	1,4611	1,4684
0,93	1,4758	1,4833	1,4909	1,4985	1,5063	1,5141	1,5220	1,5301	1,5382	1,5464
0,94	1,5548	1,5632	1,5718	1,5805	1,5893	1,5982	1,6072	1,6164	1,6258	1,6352
0,95	1,6449	1,6546	1,6646	1,6747	1,6849	1,6954	1,7060	1,7169	1,7279	1,7392
0,96	1,7507	1,7624	1,7744	1,7866	1,7991	1,8119	1,8250	1,8384	1,8522	1,8663
0,97	1,8808	1,8957	1,9110	1,9268	1,9431	1,9600	1,9774	1,9954	2,0141	2,0335
0,98	2,0537	2,0749	2,0969	2,1201	2,1444	2,1701	2,1973	2,2262	2,2571	2,2904
0,99	2,3263	2,3656	2,4089	2,4573	2,5121	2,5758	2,6521	2,7478	2,8782	3,0902

Beispiel:
Gesucht ist der Bereich, bei dem die summierte Wahrscheinlichkeit 72 % beträgt.
Der c – Wert für 72% liegt bei 0,720 und beträgt 0,5828.
Damit endet der Bereich bei $\mu + 0{,}5828\ \sigma$ unabhängig von den tatsächlichen Werten von μ und σ.

ABER : Dort beginnt auch der Bereich, bei dem die obere Wahrscheinlichkeit weniger als 18 % beträgt

Obere Randwahrscheinlichkeiten

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414
0,10	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,20	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
0,30	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
0,40	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
0,50	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
0,60	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
0,70	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
0,80	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
0,90	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
1,00	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
1,10	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
1,20	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
1,30	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08691	0,08534	0,08379	0,08226
1,40	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
1,50	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
1,60	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
1,70	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
1,80	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
1,90	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
2,00	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
2,10	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
2,20	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
2,30	0,01072	0,01044	0,01017	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,40	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,50	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,60	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,70	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,80	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,90	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139
3,00	0,00135	0,00131	0,00126	0,00122	0,00118	0,00114	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100
3,10	0,00097	0,00094	0,00090	0,00087	0,00084	0,00082	0,00079	0,00076	0,00074	0,00071
3,20	0,00069	0,00066	0,00064	0,00062	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050
3,30	0,00048	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00038	0,00036	0,00035
3,40	0,00034	0,00032	0,00031	0,00030	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024
3,50	0,00023	0,00022	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00019	0,00018	0,00017	0,00017
3,60	0,00016	0,00015	0,00015	0,00014	0,00014	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011
3,70	0,00011	0,00010	0,00010	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00008
3,80	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005
3,90	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003
4,00	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002

Unter Benutzung des Beispiels der vorhergehenden Seite ist mit der Tabelle folgendermaßen umzugehen:

> Gesucht sind alle die Ereignisse, deren summierte Wahrscheinlichkeit mit 10% am rechten Rand der Funktion liegen. Ereignisse rechts vom Erwartungswert, deren Gesamtwahrscheinlichkeit bis zu + ∞ 10% nicht übersteigt.

Dazu sucht man in der Tabelle den Wert 10% = 0,1 . Man findet den Wert in der Zeile von 1,20 und in der Spalte von 0,08. Damit liegt der gesuchte Wert bei 1,28.

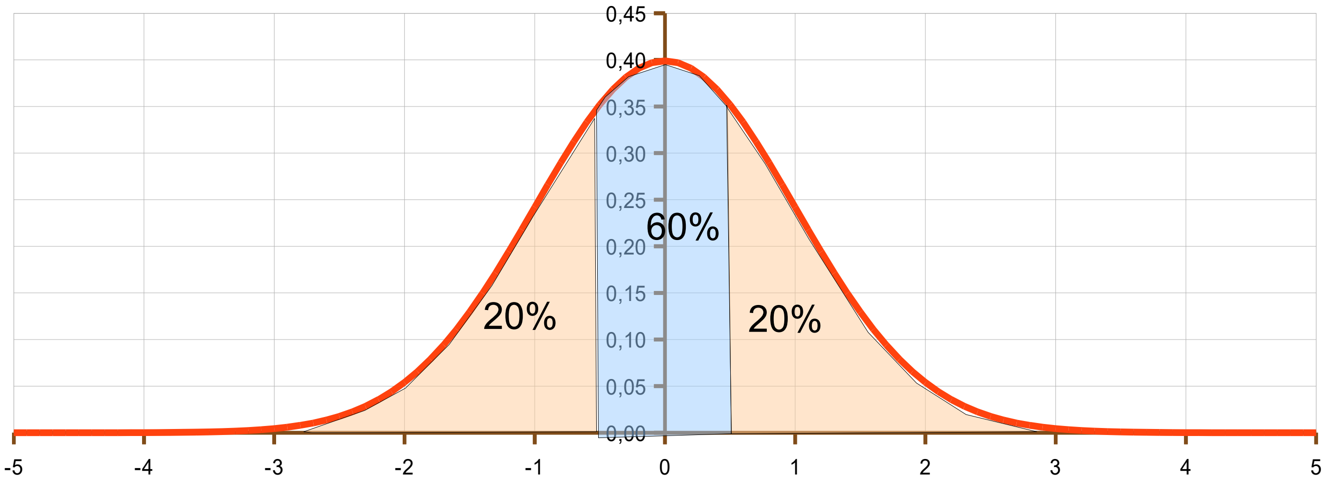
> Alle Ereignisse von $\mu + 1{,}28\ \sigma$ liegen oberhalb einer Grenze deren summierte Wahrscheinlichkeit bis + ∞ kleiner als 10% sind. Dazu müssen zwangsläufig die Einzelwahrscheinlichkeit auch unter 10% liegen, es sagt aber nichts über die Größe der Einzelwahrscheinlichkeiten aus.

Die unteren Randwahrscheinlichkeiten sind identisch mit der Verteilungsfunktion $\Phi(x)$.

Konfidenzintervalle zum Mittelwert

Mit den gleichen Mitteln sind die Konfidenzintervalle oder Vertrauensintervalle zu bestimmen. Dabei geht es um die Frage: In welchem Bereich liegen die Messwerte, wenn sie mit 60% iger Sicherheit (Wahrscheinlichkeit) in der Umgebung des Mittelwertes liegen sollen. Das bedeutet 30% vom Mittelwert nach oben und 30% vom Mittelwert nach unten. Da der Mittelwert bei einer Wahrscheinlichkeit von 50 % liegt, heißt das, die Werte müssen in einem Bereich von 20% bis 80% liegen, oder im Bereich von 0,2 bis 0,8

Damit ist die mathematische Fragestellung: Gesucht sind die x -Grenzen der Fläche um den Mittelwert, so dass der Flächeninhalt unter der Kurve 0,6 beträgt.
Dazu muss wieder die Dichtefunktion und der Mittelwert betrachtet werden.



Wenn man dazu die Verteilungsfunktion Φ(x) betrachtet lässt sich die Frage lösen, indem man den x-Wert für Φ(x) = 0,8 berechnet und den x – Wert für Φ(x) = 0,2 subtrahiert, in diesem Fall addiert, da der Wert im negativen Bereich liegt. Aus der obigen Quantiltabelle
0,8416 – (–0,8416) = 1,6832.
Der Bereich, in dem die Messwerte um den Mittelwert liegen beträgt 1,68, wobei 0,84 in positive und negative Richtung zu rechnen sind. Die Ursache dafür liegt in der Symmetrie der Funktion zum Mittelwert.

Die rechte Begrenzung der Fläche liegt also bei einem Wert Φ(x) = 0,8 für den der zugehörige x Wert zu bestimmen ist. Auf der linken Seite ist genau die Fläche zu subtrahieren, die auf der rechten Seite noch übrig bleibt. Da die Gesamtgröße der Fläche unter der Kurve gleich 1 ist, ist also Φ(x) – (1 – Φ(x)) zu berechnen.
Damit ergibt sich für die Berechnung der x- Wertes für ein Konfidenzintervall:

$$\mathbf{P = 2\,\Phi(x) - 1}$$

Für den oben angegebenen Wert von P = 0,6 ist die Formel umzustellen nach Φ(x);

$$\Phi(x) = (1 + p) / 2 = 1{,}6 / 2 = 0{,}8$$

Gesucht ist die Position von x, so dass die Verteilungsfunktion Φ(x) = 0,8 ist. Wie bereits gezeigt, erhält man für x den Wert 0,8416, was für einen Mittelwert von 0 bedeutet:
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% liegen die Messwerte im Bereich von – 0,8416 bis + 0,8416.

Zweiseitige Quantile

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,10	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,20	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,30	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2961	0,3035
0,40	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,50	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,60	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,70	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,80	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,90	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6680	0,6729	0,6778
1,00	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,10	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,20	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7995	0,8029
1,30	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,40	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,50	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,60	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,70	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,80	0,9281	0,9297	0,9312	0,9328	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,90	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9534
2,00	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9615	0,9625	0,9634
2,10	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,20	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,30	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,40	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,50	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,60	0,9907	0,9909	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9929
2,70	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,80	0,9949	0,9950	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,90	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,00	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,10	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,20	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,30	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,40	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,50	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,60	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,70	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,80	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,90	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,00	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Diese Tabelle gibt die zweiseitigen Quantile um den Erwartungswert.

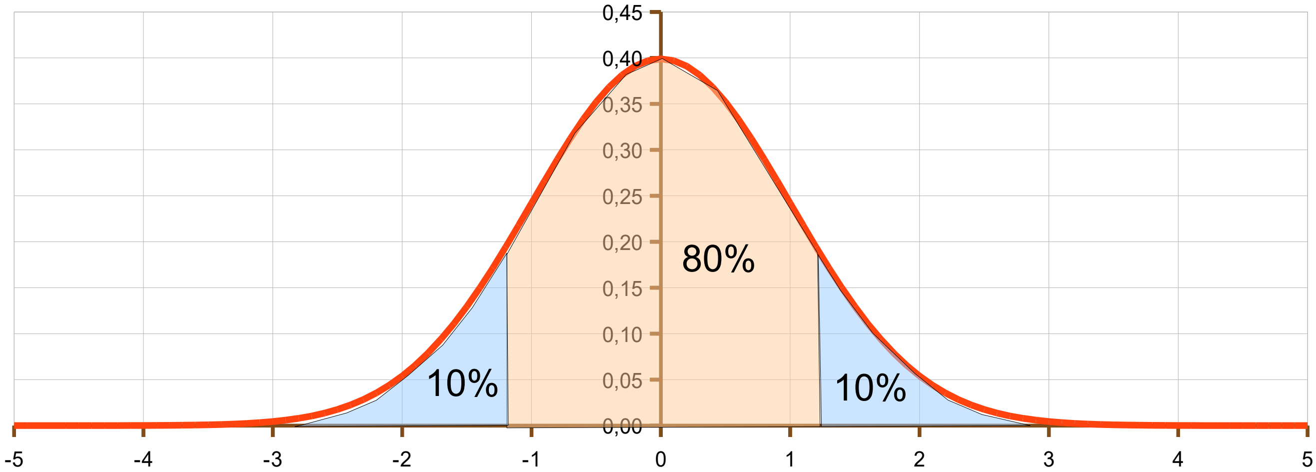
Wie groß muß das σ Intervall sein, damit die Werte in einer 75% igen Umgebung des Erwartungswertes liegen ?

Man sucht ***in*** der Tabelle den Wert 0,75. Dieser Wert liegt in der Zeile von 1,1 und in der Spalte von 0,05.

Mit 75% iger Sicherheit liegt die Zufallsvariable X im Bereich : $\mu - 1{,}15\,\sigma \le X \le \mu + 1{,}15\,\sigma$

Messwerte außerhalb des Konfidenzintervalls

Eine analoge Fragestellung ist, wo liegen die Grenzen des Bereiches, in dem die Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % außerhalb einer Umgebung des Mittelwertes liegen. Das bedeutet, dass die Werte jeweils bis zu 10% von der oberen und unteren Grenze entfernt liegen (blaue Flächen) und entspricht der gegenteiligen Fragestellung: Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen die Werte mit 80 % Wahrscheinlichkeit in der Umgebung des Mittelwertes (orange Fläche).



Da die Gesamtfläche gleich 1 ist, ist der Anteil, der außerhalb eines Bereichs um den Mittelwert liegt $1 - \Phi(x)$ im oberen Bereich und im unteren Bereich $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, da die Funktion achsensymmetrisch ist und die Flächen gleich sind. Also gilt in diesem Fall

$$\mathbf{P = 2 - 2\,\Phi(x)}$$

da die beiden Flächenteile addiert werden müssen oder umgestellt nach $\Phi(x)$: $\Phi(x) = (2 - p)/2$ (wegen der Division mit – 2 drehen sich die Vorzeichen um).
Messwerte, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% außerhalb eines Bereiches um den Mittelwert liegen beginnen ab $\Phi(x) = (2 - 0{,}2) / 2 = 0{,}9 \Rightarrow x = 1{,}286$

Für die Gegenrechnung: Alle Messwerte liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% in der Umgebung des Mittelwertes gilt: $\Phi(x) = (1 + p) / 2 = = (1 + 0{,}8) / 2 = 0{,}9$ was dann wieder zu den gleichen x-Werten führt.

$$\Phi(x) = 0{,}9$$
$$x = \Phi^{-1}(0{,}9) = 1{,}28155$$

Analog zu den Werten der Quantile kann man auch eine Tabelle der sogenannten Randwahrscheinlich-keiten erzeugen. Eine solche Tabelle ist auf der folgenden Seite dargestellt. Dabei wird nur der Bereich größer Null berücksichtigt, da für den Bereich kleiner Null die Werte nur in umgekehrter Reihenfolge gelesen werden müssen und die Werte kleiner Null mit den Funktionswerten von $\Phi(x)$ identisch sind.

Für die Berechnung der Randwahrscheinlichkeiten kann man die Tabelle der vorhergehenden Seite mit benutzen. Sucht man die Randwahrscheinlichkeit für 20%, ermittelt man in der Tabelle den Wert für die 80% ige Umgebung des Erwartungswertes.
Bei der zweiseitigen Randwahrscheinlichkeit ist zu berücksichtigen:
Bei einer 20% igen Randwahrscheinlichkeit sind für den unteren Bereich 10% und für den oberen Bereich 10% anzusetzen. Die vorgegebene Randwahrscheinlichkeit ist also zu halbieren, damit auf jeder Seite gleich viel entsteht. Diese Halbierung müßte man machen, wenn man getrennt nach der linken und rechten Randwahrscheinlichkeit sucht. Dann dürfte man nur die halbe Wahrscheinlichkeit zugrunde legen.
In der Tabelle auf der vorherigen Seite ist das bereits berücksichtigt. Sucht man die Randwahrscheinlichkeit von 20%, dann muß man die Zentrale Wahrscheinlichkeit von 80% benutzen.