Aufgabe	Lösung	Erläuterung
Kommutativgesetz	Summanden darfst du vertauschen. Faktoren darfst du vertauschen.	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	Bei einer Summe und bei einem Produkt darfst du dir den Rechenweg aussuchen.	$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Auflösen von Klammern	Steht ein Plus vor der Klammer, darfst du die Klammer weglassen. Steht ein Minus vor der Klammer, kannst du die Klammer weglassen, wenn du gleichzeitig die Rechenzeichen in der Klammer umkehrst.	$a + (b + c) = a + b + c$ $a + (b - c) = a + b - c$ $a - (b + c) = a - b - c$ $a - (b - c) = a - b + c$
Multiplikation von Potenzen	Potenzen mit gleicher Basis kannst du multiplizieren, indem du die Exponenten addierst.	$2^5 \cdot 2^3 = 2^8$; $x \cdot x^4 = x^5$ $(a + b)^2 \cdot (a + b)^3 = (a + b)^5$
Ordnen von Produkten	Ein Produkt kannst du ordnen, indem du: – die Zahlen nach vorne schreibst und berechnest; – gleiche Variablen nebeneinander stellst; – Potenzen mit gleicher Basis multiplizierst; – die Variablen alphabetisch ordnest.	$3yx \cdot 4xzy = 12x^2y^2z$ $y^3 \cdot x^2 \cdot xy^4 = x^3y^7$ $4abc^2 \cdot 3a^2b \cdot 5ac^3 = 60\, a^4b^2c^5$
Addition von Gliedern	Gleichartige Glieder kannst du addieren, indem du die Koeffizienten addierst. Gleichartige Glieder kannst du subtrahieren, indem du die Koeffizienten subtrahierst.	$3x + 1{,}5x = 4{,}5x$ $18ab - 12ab = 6ab$ $13xy^2 - 4xy^2 + 3xy^2 = 12xy^2$
Vereinfachen von Termen	Terme kannst du vereinfachen, indem du zuerst die Produkte ordnest und dann gleichartige Glieder addierst oder subtrahierst.	$x \cdot 4y - x \cdot 3x + yx + 6x^2 = 3x^2 + 5xy$ $3yxy + 2x^2y - 4xy^2 = 2x^2y - xy^2$
Ausmultiplizieren	Eine Summe kannst du mit einem Term multiplizieren, indem du jeden Summanden mit dem Term multiplizierst und die Produkte dann addierst.	$4a\,(x + y) = 4ax + 4ay$ $4a^2b\,(x + y) = 4a^2bx + 4a^2by$
Ausklammern Faktorisieren	Aus einer Summe kannst du gemeinsame Faktoren ausklammern. Aus der Summe wird dabei ein Produkt. Die Summe wird faktorisiert.	$3x + 12y = 3\,(x + 4y)$ $4a + 3ab = a\,(4 + 3b)$ $9a^3b + 6ab^2 = 3ab\,(3a^2 + 2b)$
Multiplikation von Summen	Eine Summe kannst du mit einer Summe multiplizieren, indem du jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multiplizierst und die Produkte dann addierst.	$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$ $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$ $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$
Binomische Formeln	Das Quadrat einer Summe kannst du nach der nebenstehenden Regel berechnen. Das Quadrat einer Differenz kannst du nach der nebenstehenden Regel berechnen. Die Differenz von Quadraten kannst du nach der nebenstehenden Regel berechnen.	Erste binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Zweite binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ Dritte binomische Formel: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

1. Gleichartige Glieder

1.1. Je zwei der drei Glieder sind gleichartig. Bestimme sie.

Aufgabe

a) $3x$; $3y$; $4x$
b) $3m$; $-0{,}5m$; $-0{,}5$
c) $4x^2$; $4y^2$; $-y^2$
d) $2xy$; $3xz$; xz
e) $2a^2b$; $3ab^2$; $-a^2b$

Lösung

a) $3x$; $4x$
b) $3m$; $-0{,}5m$
c) $4y^2$; $-y^2$
d) $3xz$; xz
e) $2a^2b$; $-a^2b$

Erläuterung

Zahlen und Produkte aus Zahlen und Variablen heißen „Glieder" .

Die Zahlenfaktoren von Gliedern heißen „Koeffizienten" .

Glieder heißen „gleichartig" , wenn sie sich nur durch ihre Koeffizienten unterscheiden.

1.2. Gleichartige Glieder zusammenfassen

Aufgabe

a) $3x + 7x$
b) $9y - 16y$
c) $3xy - 4xy - 5xy$
d) $12x^2y + 7x^2y - 13x^2y$

Lösung

a) $3x + 7x = (3 + 7)\,x = 10x$
b) $9y - 16y = (9 - 16)\,y = -7y$
c) $3xy - 4xy - 5xy$
$= (3 - 4 - 5)\,xy = -6xy$
d) $12x^2y + 7x^2y - 13x^2y$
$= (12 + 7 - 13)\,x^2y = 6x^2y$

Erläuterung

Gleichartige Glieder kannst du addieren, indem du ihre Koeffizienten addierst.

Gleichartige Glieder kannst du subtrahieren, indem du ihre Koeffizienten subtrahierst.

2. Terme vereinfachen

2.1. Fasse zusammen.

Aufgabe

a) $3x - 4 + 8x - 7$
b) $19 - 5y + 7 + 3y$

Lösung

a) $3x - 4 + 8x - 7$
$= 3x + 8x - 4 - 7$
$= 11x - 11$
b) $19 - 5y + 7 + 3y$
$= -5y + 3y + 19 + 7$
$= -2y + 26$

2.2. Fasse zusammen.

Aufgabe

a) $x + y - 2x + 8$
b) $3x - 4y - 7 - x + 3y + 2$
c) $-14b + 9 - 2a + 3b + 6a$
d) $17 - 5m + 9n - 3m - m$

Lösung

a) $x + y - 2x + 8$
$= x - 2x + y + 8$
$= -x + y + 8$
b) $3x - 4y - 7 - x + 3y + 2$
$= 3x - x - 4y + 3y - 7 + 2$
$= 2x - y - 5$
c) $-14b + 9 - 2a + 3b + 6a$
$= -2a + 6a - 14b + 3b + 9$
$= 4a - 11b + 9$
d) $17 - 5m + 9n - 3m - m$
$= -5m - 3m - m + 9n + 17$
$= -9m + 9n + 17$

2.3. Fasse zusammen.

Aufgabe

a) $3x^2 - 5x + 7 - x^2$
b) $y - y^2 + 3 + 2y^2 - y$
c) $5a^2 - 3a^3 - a^2 + 2a - a^3$
d) $x^2 + y^2 + xy - 2x^2 - 3y^2$

Lösung

a) $3x^2 - 5x + 7 - x^2$
$= 3x^2 - x^2 - 5x + 7$
$= 2x^2 - 5x + 7$
b) $y - y^2 + 3 + 2y^2 - y$
$= -y^2 + 2y^2 + y - y + 3$
$= y^2 + 3$
c) $5a^2 - 3a^3 - a^2 + 2a - a^3$
$= -3a^3 - a^3 + 5a^2 - a^2 + 2a$
$= -4a^3 + 4a^2 + 2a$
d) $x^2 + y^2 + xy - 2x^2 - 3y^2$
$= x^2 - 2x^2 + xy + y^2 - 3y^2$
$= -x^2 + xy - 2y^2$

Erläuterung

Enthält ein Term mehrere Summanden, dann kannst du ihn übersichtlich schreiben, wenn du so vorgehst:

1. Vertausche die Summanden so, dass gleichartige Glieder nebeneinander stehen.

   Achte dabei auf die Vorzeichen und die Rechenzeichen.
2. Addiere oder subtrahiere die gleichartigen Glieder nach den Regeln von Aufgabe 2.
3. Ordne die Summanden nach der alphabetischen Reihenfolge ihrer Variablen.
4. Schreibe die Zahlen ohne Variablen zuletzt.
5. Treten Potenzen auf, dann wird nach der Größe des Exponenten geordnet.

Mit etwas Übung kannst du auch die gleichartigen Glieder im Kopf zusammenfassen und nur das Ergebnis hinschreiben.

Vereinfachst du einen Term nach den Regeln 1 bis 5, dann hast du diesen Term in einen gleichwertigen Term umgeformt.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

3. Klammern auflösen

3.1. Löse die Klammern auf.

a) $3x + (4y - 7)$	a) $3x + (4y - 7) = 3x + 4y - 7$	Steht vor einer eingeklammerten Summe das Plus- oder das Minuszeichen und sollst du die Klammern auflösen, dann merke dir: 1. Steht ein Plus vor der Klammer, darfst du sie weglassen. 2. Steht ein Minus vor der Klammer, kannst du die Klammer weglassen, wenn du gleichzeitig die Rechenzeichen in der Klammer umkehrst.
b) $-4y + (-3 + 3x)$	b) $-4y + (-3 + 3x) = -4y - 3 + 3x$	
c) $z^2 - (5z - 3)$	c) $z^2 - (5z - 3) = z^2 - 5z + 3$	
d) $4xy + (3x + y)$	d) $4xy + (3x + y) = 4xy + 3x + y$	
e) $-x - (-z - y)$	e) $-x - (-z - y) = -x + z + y$	
f) $3z - (4 + 3x)$	f) $3z - (4 + 3x) = 3z - 4 - 3x$	

3.2. Klammern auflösen und vereinfachen

a) $3x - (4y + x)$	a) $3x - (4y + x) = 3x - 4y - x$ $= 3x - x - 4y = 2x - 4y$	Steht vor einer eingeklammerten Summe das Plus- oder das Minuszeichen und sollst du den Term vereinfachen, dann gehe so vor: 1. Löse zuerst die Klammern nach den Regeln von Aufgabe 6 auf. 2. Vereinfache dann den Term nach den Regeln der Aufgaben 3, 4 und 5.
b) $-y + (8 - y)$	b) $-y + (8 - y) = -y + 8 - y$ $= -y - y + 8 = -2y + 8$	
c) $-4z^2 + (z + z^2)$	c) $-4z^2 + (z + z^2) = -4z^2 + z + z^2$ $= -4z^2 + z^2 + z = -3z^2 + z$	
d) $xy - (-xy + x)$	d) $xy - (-xy + x) = xy + xy - x$ $= 2xy - x$	
e) $a^2b - (ab^2 - a^2b)$	e) $a^2b - (ab^2 - a^2b)$ $= a^2b - ab^2 + a^2b$ $= a^2b + a^2b - ab^2 = 2a^2b - ab^2$	Vereinfachst du einen Term nach den Regeln 1 und 2, dann hast du diesen Term in einen gleichwertigen Term umgeformt.

3.3. Vereinfache den Term.

a) $19 - (4z + 3) + (5 - 3z)$	a) $19 - (4z + 3) + (5 - 3z)$ $= 19 - 4z - 3 + 5 - 3z$ $= -4z - 3z + 19 - 3 + 5$ $= -7z + 21$	
b) $9x + (3y + 3x) - (18 - 4y)$	b) $9x + (3y + 3x) - (18 - 4y)$ $= 9x + 3y + 3x - 18 + 4y$ $= 9x + 3x + 3y + 4y - 18$ $= 12x + 7y - 18$	
c) $-5x^2 - (x - x^2) + (8x^2 + 5x)$	c) $-5x^2 - (x - x^2) + (8x^2 + 5x)$ $= -5x^2 - x + x^2 + 8x^2 + 5x$ $= -5x^2 + x^2 + 8x^2 - x + 5x$ $= 4x^2 + 4x$	
d) $4ab - (17a - 13b)$	d) $4ab - (17a - 13b) - (14b + ab)$ $= 4ab - 17a + 13b - 14b - ab$ $= 4ab - ab - 17a + 13b - 14b$ $= 3ab - 17a - b$	

4. Potenzen

4.1. Schreibe als Potenz

a) $3^4 \cdot 3^2$	a) $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 36$	<u>Potenzen multiplizieren</u> Sollst du Potenzen multiplizieren, die die gleiche Basis haben, dann gehe so vor: Potenziere die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten.
b) $x^2 \cdot x^3$	b) $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$	
c) $(-y)^2 \cdot (-y)^5$	c) $(-y)^2 \cdot (-y)^5 = (-y)^{2+5} = (-y)^7$	<u>Merke:</u> Potenzen mit gleicher Basis kannst du multiplizieren, indem du die Exponenten addierst.
d) $(6 + x)^3 \cdot (6 + x)^4$	d) $(6 + x)^3 \cdot (6 + x)^4 = (6 + x)^{3+4}$ $= (6 + x)^7$	
e) $(3 - z) \cdot (3 - z)^5 \cdot (3 - z)^2$	e) $(3 - z) \cdot (3 - z)^5 \cdot (3 - z)^2$ $= (3 - z)^{1+5+2} = (3 - z)^8$	

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

4.2. Produkte ordnen und zusammenfassen

Aufgabe	Lösung
a) $-6y \cdot 3$	a) $-6y \cdot 3 = -6 \cdot 3 \cdot y = -18y$
b) $4z \cdot (-0{,}3)$	b) $4z \cdot (-0{,}3) = 4 \cdot (-0{,}3) \cdot z$ $= -1{,}2z$
c) $3y \cdot 4x$	c) $3y \cdot 4x = 3 \cdot 4 \cdot y \cdot x = 12xy$
d) $-7z \cdot 3y \cdot 2x$	d) $-7z \cdot 3y \cdot 2x = -7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot z \cdot y \cdot x$ $= -42\,xyz$
e) $2x \cdot x \cdot 3x \cdot x$	e) $2x \cdot x \cdot 3x \cdot x = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 6x^4$
f) $-3b \cdot 0{,}3a \cdot 4b \cdot (-0{,}5a)$	f) $-3b \cdot 0{,}3a \cdot 4b \cdot (-0{,}5a)$ $= -3 \cdot 0{,}3 \cdot 4 \cdot (-0{,}5) \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a$ $= 1{,}8 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = 1{,}8a^2b^2$

Sollst du ein Produkt ordnen, dessen Faktoren Variablen und Zahlen sind, dann gehe so vor:

1. Schreibe alle Zahlen nach vorne und multipliziere sie.
2. Enthält das Produkt keine Potenzen (wie in Aufgabe 10), dann schreibe gleiche Variablen nebeneinander.
   Enthält das Produkt Potenzen (wie in Aufgabe 11), dann schreibe die Potenzen mit gleicher Basis nebeneinander. Ordne dabei nach der alphabetischen Reihenfolge der Variablen.
3. Multipliziere die Potenzen mit gleicher Basis nach der Regel von Aufgabe 9.

Merke:

* Zahlen nach vorne bringen
* gleiche Variablen nebeneinander stellen
* Variablen alphabetisch ordnen
* gleiche Variablen als Potenzen schreiben

4.3. Potenzen ordnen und zusammenfassen

Aufgabe	Lösung
a) $3x^2 \cdot 2x^6 \cdot (-0{,}3)$	a) $3x^2 \cdot 2x^6 \cdot (-0{,}3)$ $= 3 \cdot 2 \cdot (-0{,}3) \cdot x^2 \cdot x^6 = -1{,}8\,x^8$
b) $y^3 \cdot (-y^3) \cdot \frac{1}{2} y^3 \cdot (-4)$	b) $y^3 \cdot (-y^3) \cdot \frac{1}{2} y^3 \cdot (-4)$ $= -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot y^3 \cdot y^3 \cdot y^3 = 2y^9$
c) $2c^2 \cdot (-4a^2) \cdot (-c^3) \cdot a$	c) $2c^2 \cdot (-4a^2) \cdot (-c^3) \cdot a$ $= 2 \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot c^3 \cdot a$ $= 8 \cdot a^2 \cdot a \cdot c^2 \cdot c^3 = 8a^3c^5$
d) $3y^2 \cdot 5yx \cdot x^3 \cdot 6$	d) $3y^2 \cdot 5yx \cdot x^3 \cdot 6$ $= 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot y^2 \cdot y \cdot x \cdot x^2$ $= 90 \cdot x \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot y = 90x^4y^3$
e) $0{,}4x^2y \cdot 5xy^2 \cdot (-3x^2y^2)$	e) $0{,}4x^2y \cdot 5xy^2 \cdot (-3x^2y^2)$ $= 0{,}4 \cdot 5 \cdot (-3) \cdot x^2 \cdot y \cdot x \cdot y^2 \cdot x^2 \cdot y^2$ $= -6 \cdot x^2 \cdot x \cdot x^2 \cdot y \cdot y^2 \cdot y^2 = -6x^5y^5$
f) $4ab^2c \cdot 3a^3bc^2 \cdot bc$	f) $4ab^2c \cdot 3a^3bc^2 \cdot bc$ $= 4 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 \cdot c \cdot a^3 \cdot b \cdot c^2 \cdot b \cdot c$ $= 12 \cdot a \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c^2 \cdot c$ $= 12a^4b^4c^4$

4.4. Potenzen potenzieren

Aufgabe	Lösung
a) $(x^3)^4$	a) $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$
b) $((2y)^2)^3$	b) $((2y)^2)^3 = (2y)^{2 \cdot 3} = (2y)^6$
c) $[(3a+b)^5]^2$	c) $[(3a+b)^5]^2 = (3a+b)^{5 \cdot 2}$ $= (3a+b)^{10}$

Sollst du eine Potenz potenzieren, dann gehe so vor:

Potenziere die Basis mit dem Produkt der beiden Exponenten.

Merke:

Eine Potenz kannst du potenzieren, indem du die beiden Exponenten multiplizierst.

4.5. Produkte potenzieren

Aufgabe	Lösung
a) $(2x^2)$	a) $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4\,x^2$
b) $(\frac{2}{3}\,abc)^4$	b) $(\frac{2}{3}\,abc)^4 = (\frac{2}{3})^4 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^4$ $= \frac{16}{81}\,a^4b^4c^4$
c) $(3x^2y)^3$	c) $(3x^2y)^3 = 3^3\,(x^2)^3\,y^3$ $= 27\,x^{2 \cdot 3}\,y^3 = 27\,x^6y^3$
d) $(-0{,}7a^3x^4)^2$	d) $(-0{,}7a^3x^4)^2$ $= (-0{,}7)^2\,(a^3)^2\,(x^4)^2$ $= 0{,}49\,a^{3 \cdot 2}\,x^{4 \cdot 2} = 0{,}49\,a^6\,x^8$

Sollst du eine Potenz, deren Basis ein Produkt ist, als Produkt schreiben, dann gehe so vor:

1. Potenziere jeden Faktor mit dem Exponenten.
2. Multipliziere die Potenzen.

Merke:

Ein Produkt kannst du potenzieren, indem du jeden Faktor mit dem Exponenten potenzierst.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

5. Terme vereinfachen

5.1. Vereinfache folgende Terme

a) $-9a^2a^3 + 10a^4a$

b) $4x^5x^3 + (7x^8 - 3x^4x^4)$

c) $y \cdot 6 - (3 - y + 2x)$

d) $19 + (2x \cdot 3x - 7) - 4x^2$

e) $x \cdot x^3 + x\ 4x - 2x^2\ 5x^2$

f) $6a \cdot 3a^2\ \tfrac{1}{2}\ a^3 - (5a^2\ a^4 + 3)$

Lösung:

a) $-9a^2a^3 + 10a^4a$

$= -9a^5 + 10a^5 = (-9 + 10)a^5$

$= a^5$

b) $4x^5x^3 + (7x^8 - 3x^4x^4)$

$= 4x^5x^3 + 7x^8 - 3x^4x^4$

$= 4x^8 + 7x^8 - 3x^8 \quad = 8x^8$

c) $y \cdot 6 - (3 - y + 2x)$

$= y \cdot 6 - 3 + y - 2x$

$= 6y - 3 + y - 2x$

$= -2x + 6y + y - 3$

$= -2x + 7y - 3$

d) $19 + (2x \cdot 3x - 7) - 4x^2$

$= 19 + 2x \cdot 3x - 7 - 4x^2$

$= 19 + 6x^2 - 7 - 4x^2$

$= 6x^2 - 4x^2 + 19 - 7$

$= 2x^2 + 12$

e) $x \cdot x^3 + x\ 4x - 2x^2\ 5x^2$

$= x^4 + 4x^2 - 10x^4$

$= x^4 - 10x^4 + 4x^2$

$= -9x^4 + 4x^2$

f) $6a \cdot 3a^2\ \tfrac{1}{2}\ a^3 - (5a^2\ a^4 + 3)$

$= 6a \cdot 3a^2\ \tfrac{1}{2}\ a^3 - 5a^2\ a^4 - 3$

$= 9a^6 - 5a^6 - 3$

$= 4a^6 - 3$

Erläuterung:

Sollst du einen Term vereinfachen, dann gehe so vor:

1. Prüfe, ob eingeklammerte Summen oder Differenzen auftreten, vor denen das Plus- oder das Minuszeichen steht.
   Falls ja: Löse die Klammern auf nach den Regeln von Aufgabe 6.
2. Ordne alle Produkte nach den Regeln der Aufgaben 10 und 11.
3. Treten Potenzen auf, deren Basen wiederum Potenzen sind, dann schreibe mit nur einem Exponenten nach der Regel von Aufgabe 12.
4. Treten Potenzen auf, deren Basen Produkte sind, dann potenziere die Produkte nach der Regel von Aufgabe 13.
5. Fasse alle gleichartigen Glieder nach den Regeln der Aufgaben 2, 3, 4 und 5 zusammen.

Vereinfachst du einen Term nach den Regeln 1 bis 5, dann hast du diesen Term in einen gleichwertigen umgeformt.

5.2. Vereinfache folgende Terme

a) $(2x)^2 + (2x^2)^2 - 2x^2$

b) $3x + y \cdot x^2y - 4x - (5xy)^2$

c) $b \cdot (2a)^2 - 3(ab)^2$
$\quad - a\ 3ab + (3ab)^2$

d) $(x^2yz)^2 - [xy + (yz)^2\ x^4]$

Lösung:

a) $(2x)^2 + (2x^2)^2 - 2x^2$

$= 2^2x^2 + 2^2(x^2)^2 - 2x^2$

$= 4x^2 + 4x^4 - 2x^2$

$= 4x^4 + 4x^2 - 2x^2$

$= 4x^4 + 2x^2$

b) $3x + y \cdot x^2y - 4x - (5xy)^2$

$= 3x + x^2y^2 - 4x - 5^2x^2y^2$

$= 3x + x^2y^2 - 4x - 25x^2y^2$

$= x^2y^2 - 25x^2y^2 + 3x - 4x$

$= -24x^2y^2 - x$

c) $b \cdot (2a)^2 - 3(ab)^2 - a\ 3ab + (3ab)^2$

$= b \cdot 2^2 \cdot a^2 - 3a^2\ b^2 - 3a^2 \cdot b + 3^2a^2b^2$

$= 4a^2b - 3\ a^2b^2 - 3a^2b + 9\ a^2b^2$

$= -3a^2b^2 + 9a^2b^2 + 4a^2b - 3a^2b$

$= 6a^2b^2 + a^2b$

d) $(x^2yz)^2 - [xy + (yz)^2 \cdot x^4]$

$= (x^2yz)^2 - xy - (yz)^2 \cdot x^4$

$= (x^2)^2 \cdot y^2 \cdot z^2 - xy - y^2 \cdot z^2 \cdot x^4$

$= x^4 \cdot y^2 \cdot z^2 - xy - x^4 \cdot y^2 \cdot z^2$

$= x^4 \cdot y^2 \cdot z^2 - x^4 \cdot y^2 \cdot z^2 - xy$

$= -xy$

Hintergründe:

Das Vertauschen von Summanden einer Summe und von Faktoren eines Produkts ist erlaubt aufgrund der Gültigkeit des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes für die Addition und die Multiplikation.

Kommutativgesetz

$a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz

$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Die Potenzregeln (Aufgaben 12 und 13) folgen ebenfalls aus der Gültigkeit der beiden Gesetze.

Die Regeln für die Addition und Subtraktion gleichartiger Glieder (Aufgabe 2) ergeben sich aus der Gültigkeit des Distributivgesetzes.

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

5.3. Multipliziere aus und fasse zusammen

Aufgabe

a) $5x(3y - 7)$

b) $3a^2 b(a + 4b - 2)$

c) $xy(3x + 2) - x(4y - xy)$

d) $(xy + 3y)(4 - x)$

e) $(2a^2 - b)(4a^2 - 3a + b)$

Lösung

a) $5x(3y - 7)$
$= 5x \cdot 3y - 5x \cdot 7$
$= 15xy - 35x$

b) $3a^2b(a + 4b - 2)$
$= 3a^2b \cdot a + 3a^2 b \cdot 4b - 3a^2b \cdot 2$
$= 3a^3b + 12a^2 b^2 - 6a^2b$

c) $xy(3x + 2) - x(4y - xy)$
$= xy \cdot 3x + xy \cdot 2 - x \cdot 4y + x \cdot xy$
$= 3x^2y + 2xy - 4xy + x^2y$
$= 4x^2y - 2xy$

d) $(xy + 3y)(4 - x)$
$= xy \cdot 4 - xy \cdot x + 3y \cdot 4 - 3y \cdot x$
$= 4xy - x^2y + 12y - 3xy$
$= - x^2y + xy + 12y$

e) $(2a^2 - b)(4a^2 - 3a + b)$
$= 2a^2 \cdot 4a^2 - 2a^2 \cdot 3a + 2a^2 \cdot b$
$- b \cdot 4a^2 + b \cdot 3a - b \cdot b$
$= 8a^4 - 6a^3 + 2a^2b - 4a^2b + 3ab - b^2$
$= 8a^4 - 6a^3 - 2a^2b + 3ab - b^2$

Erläuterung

Ausmultiplizieren

Ist der Term das Produkt aus einem anderen Term und einer Summe, dann kannst du „ausmultiplizieren". Gehe dabei so vor:

1. Multipliziere jeden Summanden mit dem Term.
2. Ordne die erhaltenen Produkte und addiere sie.

Sind beide Faktoren Summen, dann gehe so vor:

1. Multipliziere jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe.
2. Ordne die erhaltenen Produkte und addiere sie.

5.4. Schreibe den Term als Produkt, so dass der erste Faktor die Zahl M ist

Aufgabe

a) $16x$; $M = 8$

b) $39ab^2$; $M = 13$

c) $2x^3y^2$; $M = 4$

d) $-15z^2$; $M = 5$

Lösung

a) $M = 8$; $N = 16$; $\frac{N}{M} = 2$
$16x = 8 \cdot 2x$

b) $M = 13$; $N = 39$; $\frac{N}{M} = 3$
$39ab^2 = 13 \cdot 3ab^2$

c) $M = 4$; $N = 2$; $\frac{N}{M} = \frac{1}{2}$
$2x^3y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} x^3y^2$

d) $M = 5$; $N = -15$; $\frac{N}{M} = -3$
$-15z^2 = 5 \cdot (-3)z^2$

Erläuterung

Glieder nach Zahlen zerlegen

Ist M eine von 0 verschiedene Zahl und N der Koeffizient des Terms NT, dann sind die beiden Terme NT und $M \cdot \frac{N}{M} T$ gleichwertig, denn es gilt: $N = M \cdot \frac{N}{M}$.

Ist also N der Koeffizient und T der nur aus Variablen bestehende Teil des Gliedes, dann gehe so vor:

1. Dividiere N durch M.
2. Schreibe den Term in der Form: $M \cdot \frac{N}{M} T$.

5.5. Schreibe den Term als Produkt, so dass der Term T_1 vorn steht

Aufgabe

a) $T = 6xy$; $T_1 = 2x$

b) $T = 8x^3$; $T_1 = 4x^2$

c) $T = -35ab^2$; $T_1 = 7ab$

d) $T = 12xy$; $T_1 = 36y$

e) $T = 5a^2b^3c$; $T_1 = \frac{1}{3} abc$

Lösung

a) $T = 6xy$; $T_1 = 2x$
$6xy = 2 \cdot 3xy = 2x \cdot 3y$

b) $T = 8x^3$; $T_1 = 4x^2$
$8x^3 = 4 \cdot 2x^3 = 4x^2 \cdot 2x$

c) $T = -35ab^2$; $T_1 = 7ab$
$-35ab^2 = 7 \cdot (-5)ab^2$
$= 7ab \cdot (-5)b$

d) $T = 12xy$; $T_1 = 36y$
$12xy = 36 \cdot \frac{1}{3} xy = 36y \cdot \frac{1}{3} x$

e) $T = 5a^2b^3c$; $T_1 = \frac{1}{3} abc$
$5a^2b^3c = \frac{1}{3} 15a^2b^3c$
$= \frac{1}{3} abc \cdot 15ab^2$

Erläuterung

Glieder nach Termen zerlegen

Sind T und T_1 Glieder (Produktterme) und sind alle Variablen von T_1 auch Variablen von T, dann kannst du T so schreiben, dass vorne der Term T_1 steht. Gehe dabei so vor:

1. Schreibe T als Produkt, dessen erster Faktor der Koeffizient von T_1 ist.
   Wie das geht, erfährst du in Aufgabe 18.
2. Ordne so, dass vorne die Variablen von T_1 stehen. Berücksichtige dabei, wie oft eine Variable in T und T_1 vorkommt.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

6. Terme ausklammern

6.1. Klammere den Term T aus

Aufgabe	Lösung
a) $4x + 8y$; $T = 4$	a) $4x + 8y$ $= 4 \cdot x + 4 \cdot 2y$ $= 4(x + 2y)$
b) $6xy - 4x^2$; $T = 2x$	b) $6xy - 4x^2$ $= 2x \cdot 3y - 2x \cdot 2x$ $= 2x(3y - 2x)$
c) $15a^3b^2 - 18a^2$; $T = 3a^2$	c) $15a^3b^2 - 18a^2$ $= 3a^2 \cdot 5ab^2 - 3a^2 \cdot 6$ $= 3a^2(5ab^2 - 6)$
d) $10x^2y^3 - 6x^2y^2 + 4xy^3$ $T = 2xy^2$	d) $10x^2y^3 - 6x^2y^2 + 4xy^3$ $= 2xy^2 \cdot 5xy - 2xy^2 \cdot 3x + 2xy^2 \cdot 2y$ $= 2xy^2(5xy - 3x + 2y)$

Sollst du aus einer Summe oder Differenz einen Term T ausklammern, dann gehe so vor:

1. Schreibealle Summanden und Minuenden so, dass vorne der Term T steht. Wie das geht, erfährst du in Aufgabe 19.
2. Multipliziere T mit der Summe der übrig bleibenden Teilprodukte. Wende also das Distributivgesetz an.

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

6.2. Klammere den Term T aus, der möglich ist

Aufgabe	Lösung
a) $5y - 3xy$	a) ggT: 1 ; gem. Variab.: y auszuklammern: y $5y - 3xy$ $= y \cdot 5 - y \cdot 3x$ $= y(5 - 3x)$
b) $4x^2 + 2x$	b) ggT: 2 ; gem. Variab.: x auszuklammern: 2x $4x^2 + 2x$ $= 2x \cdot 2x + 2x \cdot 1$ $= 2x(2x + 1)$
c) $2a^2b - 3ab^2$	c) ggT: 1 ; gem. Variab.: a; b auszuklammern: ab $2a^2b - 3ab^2$ $= ab \cdot 2a - ab \cdot 3b$ $= ab(2a - 3b)$
d) $12x^2y + 18x^2y^2$	d) ggT: 6 ; gem. Variab.: x^2;y auszuklammern: $6x^2y$ $12x^2y + 18x^2y^2$ $= 6x^2y\ 2x + 6x^2y\ 3y$ $= 6x^2y(2x + 3y)$
e) $3ax^2y + 6a^3x^3z - 9a^2x^2y^2$	e) ggT: 3 ; gem. Variab.: a; x^2 auszuklammern: $3ax^2$ $3ax^2y + 6a^3x^3z - 9a^2x^2y^2$ $= 3ax^2\ y + 3ax^2\ 2a^2xz - 3ax^2\ 3ay^2$ $= 3ax^2(y + 2a^2xz - 3ay^2)$
f) $40xy + 30xz - 50x$	f) ggT: 10 ; gem. Variab.: x auszuklammern: 10x $40xy + 30xz - 50x$ $= 10x \cdot 4y + 10x \cdot 3z - 10x \cdot 5$ $= 10x(4y + 3z - 5)$
g) $18a^3b^2 - 27a^2b^3 + 45ab^4$	g) ggT: 9 ; gem. Variab.: a; b^2 auszuklammern: $9ab^2$ $18a^3b^2 - 27a^2b^3 + 45ab^4$ $= 9ab^2\ 2a^2 - 9ab^2\ 3ab + 9ab^2\ 5b^2$ $= 9ab^2(2a^2 - 3ab + 5b^2)$

Ausklammern

Sollst du bei einer Summe oder Differenz ausklammern und sind alle Koeffizienten natürliche Zahlen, dann gehe so vor:

1. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler (ggT) der Koeffizienten aller Summanden und Minuenden.
2. Bestimme alle Variablen, die in jedem Summanden und Minuenden enthalten sind.
3. Multipliziere den ggT mit dem Produkt der gemeinsamen Variablen. Du erhältst einen Produktterm T.
4. Klammere T aus. Wie das geht, erfährst du in Aufgabe 20.

Beim Ausklammern hast du eine Summe in ein Produkt verwandelt. Du hast die Summe „faktorisiert". Die Anweisungen „Klammere aus" und „Faktorisiere“ bedeuten also dasselbe.

Hintergründe:

Das „Ausklammern“ macht das „Ausmultiplizieren“ rückgängig und umgekehrt. Beide Umformungen sind erlaubt wegen der Gültigkeit des

Distributivgesetzes:

$a(b + c) = ab + ac$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

7. Binomische Formeln

7.1. Löse die Klammern mit Hilfe der Binomischen Formeln auf

a) $(3x - 7)^2$

a) $a = 3x$; $b = 7$

$(3x - 7)^2$
$= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 7 + 7^2$
$= 9x^2 - 42x + 49$

b) $(2y + 1)(2y - 1)$

b) $a = 2y$; $b = 1$

$(2y + 1)(2y - 1) = (2y)^2 - 1^2$
$= 4y^2 - 1$

c) $(5x^2 + 4x)^2$

c) $a = 5x^2$; $b = 4x$

$(5x^2 + 4x)^2$
$= (5x^2)^2 + 2 \cdot 5x^2 \cdot 4x + (4x)^2$
$= 25x^4 + 40x^3 + 16x^2$

d) $(0{,}5y + z)(\frac{1}{2}y - z)$

d) $a = 0{,}5y = \frac{1}{2}y$; $b = z$

$(0{,}5y + z)(0{,}5y - z)$
$= (0{,}5y)^2 - z^2$
$= 0{,}25y^2 - z^2$

e) $(\frac{1}{3}x^2 - 2x^3)^2$

e) $a = \frac{1}{3}x^2$; $b = 2x^3$

$(\frac{1}{3}x^2 - 2x^3)^2$
$= (\frac{1}{3}x^2)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}x^2 \cdot 2x^3 + (2x^3)^2$
$= \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + 4x^6$

f) $(3x^2y + xy^2)^2$

f) $a = 3x^2y$; $b = xy^2$

$(3x^2y + xy^2)^2$
$= (3x^2y)^2 + 2 \cdot 3x^2y \cdot xy^2 + (xy^2)^2$
$= 9x^4y^2 + 6x^3y^3 + x^2y^4$

Klammern auflösen mit Hilfe der binomischen Formeln

Sollst du mit Hilfe der binomischen Formeln Klammern auflösen, dann gehe so vor:

1. Stelle fest, ob der Term in der Form $(a + b)^2$ oder $(a - b)^2$ oder $(a + b)(a - b)$ geschrieben ist. Notiere dann, welche Terme du für a und b einsetzen musst.
2. Forme den Term um mit Hilfe der zugehörigen binomischen Formel:

   1. binomische Formel:

   $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   2. binomische Formel:

   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

   3. binomische Formel:

   $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
3. Ordne die Produkte.

7.2. Schreibe den Term unter Verwendung der 3. Binomischen Formel als Produkt

a) $4x^2 - 81$

a) $4x^2 = 2^2 x^2 = (2x)^2$

$81 = 9^2$

$4x^2 - 1$

$= (2x)^2 - 9^2$

$= (2x - 9)(2x + 9)$

b) $16x^2 - 9y^2$

b) $16x^2 = 42\ x^2 = (4x)^2$

$9y^2 = 32\ y^2 = (3y)^2$

$16x^2 - 9y^2$

$= (4x)^2 - (3y)^2$

$= (4x - 3y)(4x + 3y)$

c) $\frac{4}{9}x^2y^2 - \frac{1}{4}z^2$

c) $\frac{4}{9}x^2y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x^2 y^2 = \left(\frac{2}{3}xy\right)^2$

$\frac{1}{4}z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^2 = \left(\frac{1}{2}z\right)^2$

$\frac{4}{9}x^2y^2 - \frac{1}{4}z^2$

$= \left(\frac{2}{3}xy\right)^2 - \left(\frac{1}{2}z\right)^2$

$= \left(\frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}z\right)\left(\frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}z\right)$

d) $0{,}25\ a^4b^6 - 0{,}49\ c^8$

d) $0{,}25a^4b^6 = 0{,}5^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (b^3)^2$

$= (0{,}5a^2b^3)^2$

$0{,}49c^8 = 0{,}7^2 \cdot (c^4)^2 = (0{,}7c^4)^2$

$0{,}25a^4b^6 - 0{,}49c^8$

$= (0{,}5a^2b^3)^2 - (0{,}7c^4)^2$

$= (0{,}5a^2b^3 + 0{,}7c^4) \cdot (0{,}5a^2b^3 - 0{,}7c^4)$

Faktorisieren mit Hilfe der dritten binomischen Formel

Ist der Koeffizient eines Gliedes eine Quadratzahl und sind alle auftretenden Exponenten gerade Zahlen, dann kannst du das Glied in ein gleichwertiges Quadrat umformen.
Lassen sich Minuend und Subtrahend in gleichwertige Quadrate umformen, dann kannst du die Differenz als Produkt schreiben.
Gehe so vor:

1. Forme Minuend und Subtrahend in Quadrate um:
   - Schreibe die Koeffizienten als Quadrate.
   - Dividiere die Exponenten durch 2 und quadriere die Potenz.
     Jeder Faktor ist jetzt als Quadrat geschrieben.
   - Multipliziere alle Basen und quadriere das Produkt.
2. Wende auf die Differenz der beiden Quadrate die dritte binomische Formel an:

   $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

7.2. Schreibe als Quadrat mit Hilfe der ersten oder zweiten Binomischen Formel

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $y^2 - 6y + 1$

c) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{8}{3}a + 4$

d) $x^8 + 14\,x^4 + 49$

e) $25x^4 - 30x^2y + 9y^2$

f) $9z^2 + 49 - 42z$

g) $4x^4z^4 - 12x^2y^2z^2 + 9y^4$

a) $x^2 + 2x + 1$
$= x^2 + 2x + 1^2$
$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2$
$= (x + 1)^2$

b) $9y^2 - 6y + 1$
$= (3y)^2 - 6y + 1^2$
$= (3y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 1 + 1^2$
$= (3y - 1)^2$

c) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{8}{3}a + 4$
$= (\frac{2}{3}a)^2 - \frac{8}{3}a + 2^2$
$= (\frac{2}{3}a)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a \cdot 2 + 2^2$
$= (\frac{2}{3}a - 2)^2$

d) $x^8 + 14\,x^4 + 49$
$= (x^4)^2 + 14x^4 + 7^2$
$= (x^4)^2 + 2 \cdot x^4 \cdot 7 + 7^2$
$= (x^4 + 7)^2$

e) $25x^4 - 30x^2y + 9y^2$
$= (5x^2)^2 - 30x^2y + (3y)^2$
$= (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 3y + (3y)^2$
$= (5x^2 - 3y)^2$

f) $9z^2 + 49 - 42z$
$= (3z)^2 + 7^2 - 42z$
$= (3z)^2 - 2 \cdot 3z \cdot 7 + 7^2$
$= (3z - 7)^2$

g) $4x^4z^4 - 12x^2y^2z^2 + 9y^4$
$= (2x^2z^2)^2 - 12x^2y^2z^2 + (3y^2)^2$
$= (2x^2z^2)^2 - 2 \cdot 2x^2z^2 \cdot 3y^2 + (3y^2)^2$
$= (2x^2z^2 - 3y^2)^2$

Faktorisieren mit der ersten und zweiten binomischen Formel

Sollst du eine Summe aus drei Summanden mit Hilfe der binomischen Formeln in ein Quadrat umformen, dann gehe so vor:

1. Prüfe, welche beiden der drei Summanden sich in Quadrate umformen lassen. Schreibe sie als Quadrate. Wie das geht, erfährst du in Aufgabe 25.
2. Sind a^2 und b^2 die beiden als Quadrate geschriebenen Summanden, dann schreibe den dritten Summanden in der Form: $2ab$.
   Ist dieser Summand positiv, dann ist die Summe gleichwertig zum Term: $a^2 + 2ab + b^2$
   Ist der Summand negativ, dann ist die Summe gleichwertig zum Term: $a^2 - 2ab + b^2$
3. Wende die erste oder zweite binomische Formel an:
   $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
   $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Achtung: Die erste oder zweite binomische Formel kannst du nur dann anwenden, wenn:
– zwei Summanden sich in Quadrate (a^2 ; b^2) umformen lassen;
– der dritte Summand gleichwertig ist zu $2ab$ bzw. $-2ab$.

7.3. Klammere aus und faktorisiere dann mit Hilfe der binomischen Formeln

a) $52x^2 + 156xy + 117y^2$

b) $12xy^2 - 75xz^4$

c) $14xy - 7x^2 - 7y^2$

d) $5x^3y - 45xy^3$

a) $52x^2 + 156xy + 117y^2$
$= 13(4x^2 + 12xy + 9y^2)$
$= 13[(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2]$
$= 13(2x + 3y)^2$

b) $12xy^2 - 75xz^4$
$= 3x(4y^2 - 25z^4)$
$= 3x[(2y)^2 - (5z^2)^2]$
$= 3x(2y + 5z^2)(2y - 5z^2)$

c) $14xy - 7x^2 - 7y^2$
$= -7x^2 + 14xy - 7y^2$
$= -7(x^2 - 2xy + y^2)$
$= -7(x - y)^2$

d) $5x^3y - 45xy^3$
$= 5xy(x^2 - 9y^2)$
$= 5xy(x^2 - (3y)^2)$
$= 5xy(x + 3y)(x - 3y)$

Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Sollst du eine Summe oder Differenz mit Hilfe der binomischen Formeln faktorisieren, dann gehe so vor:

1. Prüfe, ob der Term in der Form wie in Aufgabe 25 oder 26 gegeben ist. Wende dann die entsprechende binomische Formel an. Ist das nicht der Fall, dann:
2. Prüfe, ob die Summanden gemeinsame Faktoren besitzen. Klammere diese aus und überlege, ob das übrig bleibende Teilprodukt mit Hilfe einer binomischen Formel faktorisiert werden kann.