Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

Quadratische Funktion

Funktionen wie $f(x) = x^2$ oder $f(x) = 0,5x^2 + 2x – 2,5$ haben die Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Eine Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $a \neq 0$ heißt „quadratische Funktion".

Scheitelpunktform
Allgemeine Form

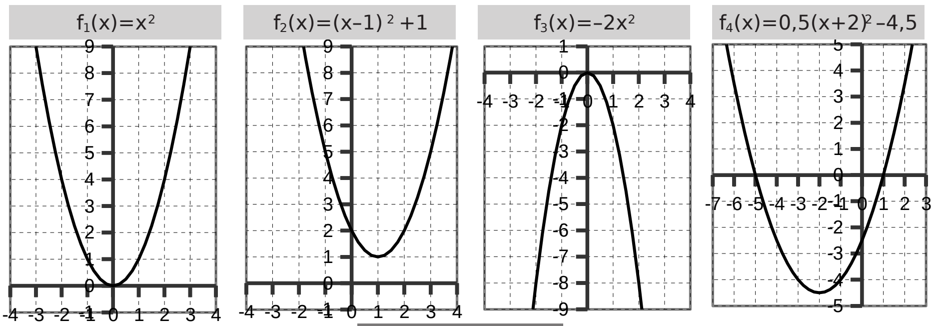
Als Definitionsmenge wählt man meistens R die Menge der reellen Zahlen. Jeder Term $ax^2 + bx + c$ lässt sich auf die Form $a(x – d)^2 + e$ bringen. Dabei ist $d= -\frac{b}{2a}$ und $e = c - \frac{b^2}{4a}$

Die Form $f(x) = a(x–d)^2 + e$ heißt „Scheitelpunktform", die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt „allgemeine Form" der quadratischen Funktion f.

Beispiel: Die Scheitelpunktform für $f(x) = 0,5x^2 + 2x – 2,5$ lautet $f(x) = 0,5(x + 2)^2 – 4,5$

Parabel

Den Graphen einer quadratischen Funktion nennt man „Parabel".



Die Parabel einer Funktion f mit $f(x) = a(x - d)^2 + e$ hat folgende Eigenschaften:

Scheitelpunkt/Scheitel
kleinster Wert
Tiefpunkt
größter Wert
Hochpunkt

❶ Sie besitzt einen tiefsten oder höchsten Punkt, den **„Scheitelpunkt"** oder **„Scheitel"**. Seine Koordinaten lassen sich aus der Scheitelpunktform direkt ablesen: S(d|e).
Für **a > 0** ist der Scheitel **Tiefpunkt** und die Parabel nach **oben geöffnet**. Der y-Wert des Tiefpunkts ist der kleinste Wert der Funktion.
Für **a < 0** ist der Scheitel **Hochpunkt** und die Parabel nach **unten geöffnet**. Der y-Wert des Hochpunkts ist der größte Wert der Funktion.

Symmetrieachse

❷ Sie ist **symmetrisch** zu der Parallelen zur y-Achse, die durch den Scheitel geht. Die Symmetrieachse teilt die Parabel in zwei Äste. Der eine Ast ist monoton steigend, der andere monoton fallend.

Nullstellen

❸ Sie besitzt keine, einen oder zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Die x-Werte dieser Schnittpunkte heißen **„Nullstellen"**. Für eine Nullstelle x0 der Funktion f gilt: f(x0) = 0.

Normalparabel

Bei der Funktion $f_2(x) = (x – 1)^2 + 1$ bzw. $f_2(x) = x^2 – 2x + 2$ gilt für den Vorfaktor: a = 1

Normalform

Die Parabel zu $f(x) = x^2$ heißt „Normalparabel". Alle Parabeln zu $f(x) = (x – d)^2 + e$ sind verschobene Normalparabeln. Die Darstellung ihrer Funktionsterme in der Form $f(x) = x^2 + px + q$ heißt „Normalform".

Die Parabel einer Funktion f mit $f(x) = (x – d)^2 + e$ hat folgende Eigenschaften:

Verschiebung

❶ Sie hat die gleiche Form wie die Normalparabel.
❷ Sie geht aus der Normalparabel hervor durch Verschieben um |d| Einheiten in Richtung x-Achse und um |e| Einheiten in Richtung y-Achse, und zwar:

d > 0: Verschiebung nach rechts;	d < 0: Verschiebung nach links;
e > 0: Verschiebung nach oben;	e < 0: Verschiebung nach unten.

Streckung/Stauchung
Spiegelung

Bei der Funktion $f_4(x) = 0,5(x+2)^2 – 4,5$ bzw. $f_4(x) = – 0,5x^2 + 2x – 2,5$ gilt für den Vorfaktor $a \neq 1$

Parabeln zu $f(x) = a(x – d)^2 + e$ und $|a| \neq 1$ sind gegenüber der Normalparabel gestreckt oder gestaucht, und zwar: a > 1: gestreckt; 0 < a < 1: gestaucht.
Parabeln mit a < 0 ergeben sich aus der mit |a| durch Spiegeln an der Parallelen zur x-Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft.

Beispiele:

Funktion	Graph	Scheitel	Nullstellen
$f_1(x) = x^2$	Normalparabel	S(0|0); Tiefpunkt	$x_0= 0$
$f_2(x) = (x –1)^2 + 1$	verschobene Normalparabel	S(1|1); Tiefpunkt	keine
$f_3(x) = –2x^2$	gestreckt und gespiegelt gegenüber der Normalparabel	S(0|0); Hochpunkt	$x_0= 0$
$f_4(x) = 0,5(x + 2)^2 – 4,5$	gestaucht und verschoben gegenüber der Normalparabel	S(–2 | –4,5); Tiefpunkt	$x_0= 1$ und $x_0= –5$

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

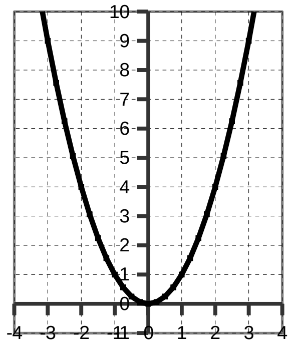
1. Kurvenbilder von Parabeln

1.1. Die Normalparabel $y = x^2$

Scheitel: $S(0|0)$

Schnittpunkt y-Achse : $y = 0$
Schnittpunkt x-Achse : $x = 0$

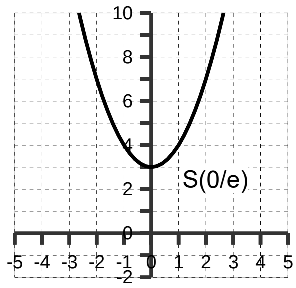
- Nach oben offene Kurve
- Scheitelpunkt im Koordinatenursprung
- Achsenschnittpunkte im Koordinatenursprung



1.2. Verschobene Normalparabel in y – Richtung $y = x^2 + e$

- Nach oben offene Kurve
- Scheitelpunkt $S(0|e)$
- Schnittpunkt y – Achse $y = e$
- Schnittpunkt x – Achse $x = \pm\sqrt{-e}$ nur für $e < 0$

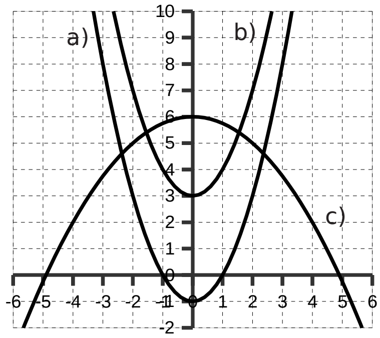
Eine nach oben geöffnete Parabel, deren y – Koordinate des Scheitels oberhalb der x – Achse liegt kann keinen Schnittpunkt mit der x – Achse besitzen.



a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = -0{,}25x^2 + 6$



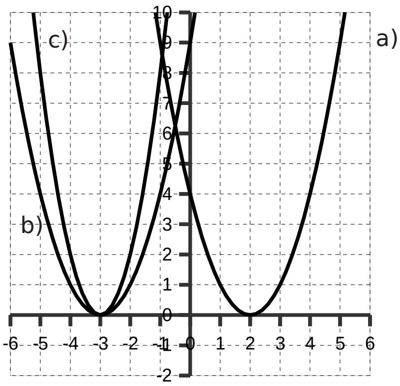
1.3. Verschobene Normalparabel in x – Richtung $y = (x - d)^2$

- Nach oben offene Kurve
- Scheitelpunkt $S(d|0)$
- Schnittpunkt y – Achse $y = d^2$
- Schnittpunkt x – Achse $x = d$

Im Unterschied zur Verschiebung in y-Richtung ist der Wert für d positiv, wenn vor dem d ein Minuszeichen steht.

Vorzeichen ändern !

a) $f(x) = (x - 2)^2$ b) $f(x) = (x + 3)^2$ c) $f(x) = 2(x + 3)^2$



1.4. Verschobene Normalparabel in x – und y – Richtung $y = (x - d)^2 + e$

- Nach oben offene Kurve
- Scheitelpunkt $S(d|e)$
- Schnittpunkt y – Achse $y = d^2 + e$
- Schnittpunkt x – Achse $x = d \pm \sqrt{-e}$ nur für $e < 0$

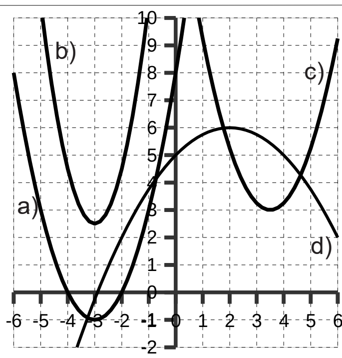
Für die Verschiebung in x – Richtung ist das umgekehrte Vorzeichen von d zu nehmen, bei e ist das gleiche Vorzeichen zu benutzen.

a) $f(x) = (x + 3)^2 - 1$

b) $f(x) = 2(x + 3)^2 + 2{,}5$

c) $f(x) = (x - 3{,}5)^2 + 3$

d) $f(x) = -0{,}25(x - 2)^2 + 6$



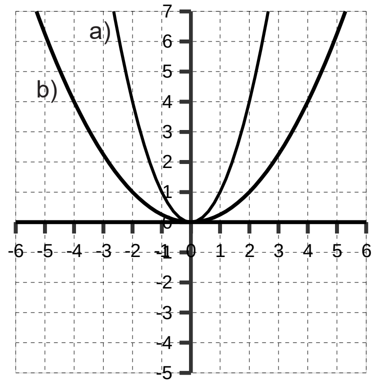
Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

1.5. Eine gestreckte / gestauchte Normalparabel $y = a\,x^2$

- Nach oben offene Kurve
- Scheitelpunkt im Koordinatenursprung
- Achsenschnittpunkte im Koordinatenursprung
- $a > 1$: ist die Parabel schmaler/ gestreckter als eine Normalparabel
- $0 < a < 1$: ist die Parabel breiter/ gestauchter als eine Normalparabel

Der Koeffizient a hat keinen Einfluss auf den Scheitelpunkt. Alle Scheitel liegen, wie bei einer Normalparabel, im Koordinatenursprung.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = 0.25x^2$

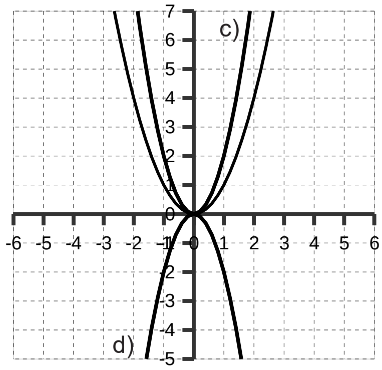


1.6. Eine nach unten geöffnete Parabel $y = a\,x^2$

- Nach unten offene Kurve, wenn der Wert von a negativ ist
- Scheitelpunkt im Koordinatenursprung
- Achsenschnittpunkte im Koordinatenursprung
- $|a| > 1$: ist die Parabel schmaler/ gestreckter als eine Normalparabel
- $0 < |a| < 1$: ist die Parabel breiter/ gestauchter als eine Normalparabel

Alle Verschiebungen bezüglich des Scheitels aus den ersten Abschnitten können auch auch nach unten geöffnete Parabeln angewandt werden.
An den Formeln ändert sich nichts, es kommt lediglich ein negativer Faktor a vor die Klammer $(x – d)^2$ oder vor den Ausdruck x^2 .

c) $f(x) = \quad 2x^2$
d) $f(x) = -\,2x^2$



1.7. Parabel verschieben, stauchen oder strecken

Stauche die Normalparabel mit dem Faktor 0,5 und spiegele sie an der x-Achse. Verschiebe sie anschließend um 3 Einheiten nach links und um 2 Einheiten nach oben. Gib nach jedem Schritt die Funktionsgleichung an.

Sollst du Parabeln verschieben, spiegeln,strecken oder stauchen und die Funktionsgleichungen der Bildparabeln er mitteln, dann merke dir:

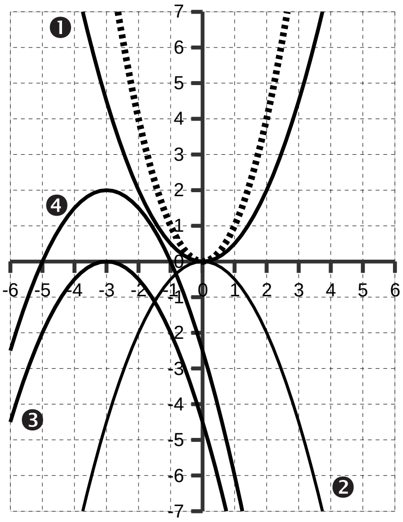
❶ Strecken/Stauchen mit a>0:
Die Normalparabel geht über in die Parabel zu $f(x) = ax^2$.
Die Normalparabel wird
gestaucht: für $a < 1$;
gestreckt: für $a > 1$

❷ Spiegeln an der x-Achse:
Die Parabel zu $f(x) = ax^2$ geht über in die Parabel zu $f(x) = –ax^2$.

❸ Nach links/rechts verschieben:
Die Parabel zu $f(x) = ax^2$ geht über in die Parabel zu $f(x) =$
$a(x + d)^2$ | $a(x – d)^2$
falls um d Einheiten nach
links | rechts
verschoben wird.

❹ Nach oben/unten verschieben:
Die Parabel zu $f(x) = a(x – d)^2$ geht über in die Parabel zu $f(x) =$
$a(x – d)^2 + e$ | $a(x – d)^2 – e$
falls um e Einheiten nach
oben | unten
verschoben wird.

❶ $f_1(x) = 0{,}5x^2$
❷ $f_2(x) = -0{,}5x^2$
❸ $f_3(x) = -0{,}5(x + 3)^2$
❹ $f_4(x) = -0{,}5(x + 3)^2 + 2$



Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

2. Funktionsgleichungen

2.1. Die Polynomform oder Normalform $y = ax^2 + bx + c$

a – Öffnung der Parabel

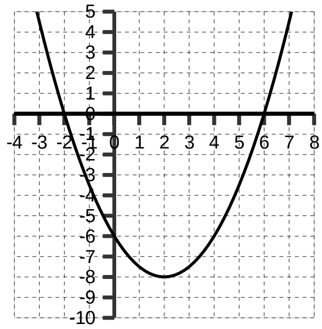
b – Mass für die Verschiebung des Scheitels in x-Richtung, nicht die Scheitelkoordinate;

c – Schnittpunkt mit der y – Achse

Während die Werte für a und c sich direkt im Kurvenbild niederschlagen, gilt das für den Wert b nicht.
Beim Auftreten des Faktors b kann man nur sagen, dass der Scheitel in x-Richtung verschoben ist:

- **positive b** bewirken eine Verschiebung in **negative x – Richtung**
- **negative b** bewirken eine Verschiebung in **positive x – Richtung**.

$y = \frac{1}{2} x^2 - 2x - 6$
$a = \frac{1}{2}$: Öffnung nach oben, Parabel breiter als Normalparabel
$b < 0$: Verschiebung des Scheitels in positive x – Richtung
$c = -6$: (0|-6) Schnittpunkt mit der y-Achse



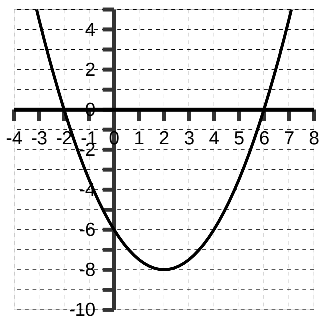
2.2. Die Scheitelform $y = a(x - d)^2 + e$

a : Öffnung der Parabel
d : x – Koordinate des Scheitels, **mit umgekehrtem Vorzeichen**
e : y – Koordinate des Scheitels

Der Wert von d ist die x Koordinate des Scheitels. Das Minuszeichen gehört zur Formel und nicht zur Koordinate d

- **$(x - d)^2$** bewirkt eine Verschiebung in positive x – Richtung, die x-Koordinate des Scheitels ist +d.
- **$(x + d)^2$** bewirkt eine Verschiebung in negative x – Richtung, die Koordinaten des Scheitels ist –d.

$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 8$
Scheitel: S(2 | –8)



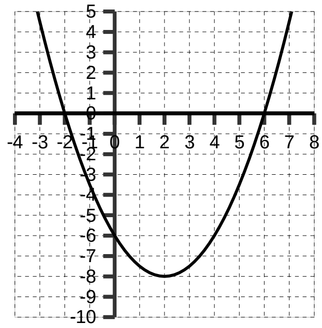
2.3. Die Nullstellenform $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

a : Öffnung der Parabel
x_1 : Nullstelle 1
x_2 : Nullstelle 2

Hat eine Parabel keine Nullstellen (s. Abschnitt Nullstellen), kann man auch keine Nullstellenform aufschreiben.
Der Öffnungsfaktor a ist wieder unabhängig von der Nullstellenform und bleibt als gesonderter Faktor stehen.

$y = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 6)$

Nullstelle 1 : – 2
Nullstelle 2 : + 6



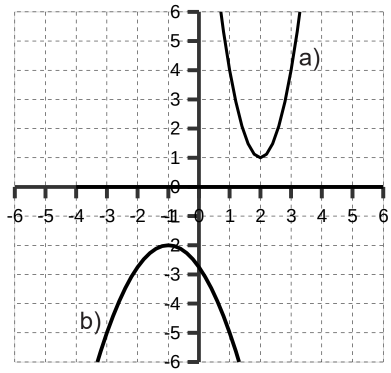
2.4. Parabelgleichung ermitteln

Wie heißt die Gleichung der Parabel ?
Wenn du den Graphen kennst und die Parabelgleichung ermitteln sollst, gehe so vor:

1. Lies den Scheitel S(d|e) ab.
2. Wähle einen geeigneten Punkt $P(x_1|y_1)$ der Parabel.
   Setze d, e, x_1 und y_1 ein in die Gleichung $y = a(x - d)^2 + e$.
   Löse nach a auf.
3. Setze a, d und e in die Gleichung $f(x) = a(x - d)^2 + e$ ein. Du erhältst die Scheitelpunktform der quadratischen Funktion.

a) Scheitel: S(2|1)
$f(x) = a(x - 2)^2 + 1$
Parabelpunkt: P(1|4)
$4 = a(1 - 2)^2 + 1$
$3 = a$
$f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$

b) Scheitel: S(–1|–2)
$f(x) = a(x + 1)^2 - 2$
Parabelpunkt: P(1|–5)
$-5 = a(1 + 1)^2 - 2$
$-\frac{3}{4} = a$
$f(x) = -\frac{3}{4}(x + 1)^2 - 2$



Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

3. Umrechnung der Formen

3.1. Die Polynomform in Scheitelform $y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; y = a\,(x - d)^2 + e$

$y = ax^2 + bx + c$		$y = \frac{1}{2} x^2 - 2x - 6$
$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$	Aus den ersten beiden Ausdrücken a ausklammern.	$y = \frac{1}{2}\,(x^2 - 4x) \quad - 6$
$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{(2a)^2}\right) + c - \frac{b^2}{(2a)^2}$	suche zu den ersten beiden Summanden eine Ergänzung, so dass sich ein vollständiges Quadrat ergibt. Der addierte Wert ist wieder zu subtrahieren.	$y = \frac{1}{2}\,(x^2 - 4x + 4) - 6 - 2$
$y = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{(2a)^2}$	fasse nach Binomischer Formel zusammen	$y = \frac{1}{2}\,(x - 2)^2 - 8$
$x_s = -\frac{b}{a}$	x – Koordinate des Scheitels mit umgekehrtem Vorzeichen wie in der Klammer	$x_s = +2$
$y_s = c - \frac{b^2}{(2a)^2}$	y – Koordinate des Scheitels ist der Wert außerhalb der Klammer, ohne Vorzeichenwechsel	$y_s = -8$

3.2. Die Polynomform in Nullstellenform $y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

$y = ax^2 + bx + c$		$y = \frac{1}{2} x^2 - 2x - 6$
$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		$x_{1/2} = \frac{2}{1} \pm \frac{\sqrt{2^2 - 4\,\frac{1}{2}\,(-6)}}{1}$
		$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 + 12}$
$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		$x_1 = 2 + \sqrt{16} = 6$
$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		$x_2 = 2 - \sqrt{16} = -2$
$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$		$y = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 6)$

3.3. Scheitelform in Nullstellenform $y = a\,(x - d)^2 + e \;\rightarrow\; y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

$y = a(x - d)^2 + e$		$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 8$
$0 = a(x - d)^2 + e$	y = 0 liefert die x Werte der Nullstellen	$0 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 8$
$a(x - d)^2 = -e$		$\frac{1}{2}(x - 2)^2 = 8$
$(x - d)^2 = -\frac{e}{a}$	Quadratischen Ausdruck auf eine Seite der Gleichung	$(x - 2)^2 = 16$
$x - d = \pm\sqrt{-\frac{e}{a}}$	Auf beiden Seiten Wurzel ziehen, auf der rechten Seite ± als Vorzeichen setzen.	$x - 2 = \pm 4$
$x_1 = d + \sqrt{-\frac{e}{a}}$	d auf die rechte Seite bringen, x eliminieren	$x_1 = 2 + 4 = 6$
$x_2 = d - \sqrt{-\frac{e}{a}}$	Der Ausdruck unter der Wurzel muss positiv sein. Das kann nur eintreten, wenn die y-Koordinate des Scheitels positiv (e > 0) und die Parabel nach unten geöffnet (a < 0), oder e < 0 und a > 0	$x_2 = 2 - 4 = -2$
$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$		$y = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 6)$

Eigenschaften	**Erläuterung**	**Beispiel**

3.4. Die Scheitelform in Polynomform $y = a\,(x - d)^2 + e \;\rightarrow\; y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x - d)^2 + e$		$y = \frac{1}{2}\,(x^2 - 2)^2 - 8$
$y = a(x^2 - 2dx + d^2) + e$	Ausmultiplizieren	$y = \frac{1}{2}\,(x^2 - 4x + 4) - 8$
$y = ax^2 - 2adx \;+\; ad^2 + e$	Ausmultiplizieren	$y = \frac{1}{2}\,x^2 - 2x - 6$
$b = -2ad$ $c = ad^2 + e$	Zusammenfassen	$b = -2\,\frac{1}{2}\,2 = -2$ $c = \frac{1}{2}\,2^2 - 8 = -6$

3.5. Die Nullstellenform in Polynomform $y = a(x - x_1)(x - x_2) \;\rightarrow\; y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$		$y = \frac{1}{2}\,(x + 2)(x - 6)$
$y = a\,(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2)$	Ausmultiplizieren	$y = \frac{1}{2}\,(x^2 - 4x - 12)$
$y = a\,x^2 - a(x_1 + x_2)\,x + a\,x_1x_2$	Ausmultiplizieren	$y = \frac{1}{2}\,x^2 - 2x - 6$
$b = -a(x_1 + x_2)$		$b = -\frac{1}{2}\,(6 - 2) = -2$
$c = a\,x_1x_2$		$c = \frac{1}{2}\,6\,(-2) = -6$

3.6. Die Nullstellenform in Scheitelform $y = a(x - x_1)(x - x_2) \;\rightarrow\; y = a\,(x - d)^2 + e$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$		$y = \frac{1}{2}\,(x + 2)(x - 6)$
$y = a\,(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2)$	Klammer ausmultiplizieren	$y = \frac{1}{2}\,(x^2 - 4x - 12)$
$y = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2^2}\right) + a\,x_1x_2 - \frac{a(x_1 + x_2)^2}{2^2}$	Ergänzung zur binomischen Formel	$y = \frac{1}{2}\,(x^2 - 4x + \overset{\frac{(6-2)^2}{2^2}}{\overset{\shortparallel}{4}}) - \frac{1}{2}\,12 - \frac{1}{2}\frac{(6 - 2)^2}{2^2}$
$y = a\left(x - \frac{(x_1 + x_2)}{2}\right)^2 - \frac{a}{4}\,(x_1 - x_2)^2$	Nach binomischer Formel zusammenfassen	$y = \frac{1}{2}\,(x^2 - 2)^2 \;\; - 6 \;\; - 2$
$x_s = \frac{(x_1 + x_2)}{2}$	x-Koordinate des Scheitel: Liegt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen	$x_s = 2 = \frac{(6 - 2)}{2}$
$y_s = -\frac{a}{4}\,(x_1 - x_2)^2$	y-Koordinate des Scheitels	$y_s = -8 = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,(6 + 2)^2$

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

4. Nullstellen einer Parabel

4.1. Die Normalparabel $y = x^2 + px + q$

$y = x^2 + px + q$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Lese die Werte für p und q aus der Normalform $x^2 + px + q = 0$ ab und setze sie in die p-q-Formel ein.

4.2. Die allgemeine Parabel $y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx + c$

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lese die Werte für a, b und c aus der Polynomform $ax^2 + bx + c = 0$ ab und setze sie in die a-b-c-Formel ein.

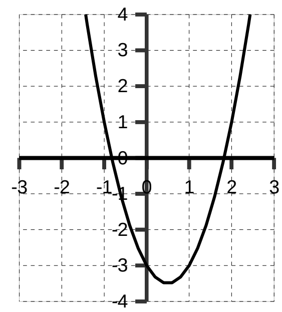
4.3. Anzahl der Nullstellen

Über die Anzahl der Nullstellen entscheidet der Wert, der unter der Wurzel steht.

Die Parabel besitzt zwei Nullstellen

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$$

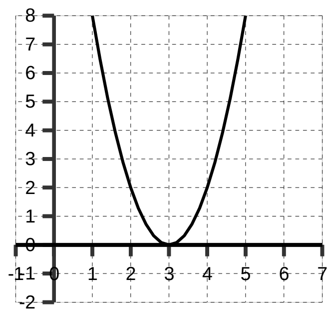
$$b^2 - 4ac > 0$$



Die Parabel besitzt eine doppelte Nullstelle.
Die beiden Werte der Nullstellen sind gleich.
Die Nullstelle ist gleichzeitig Scheitelpunkt.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$$

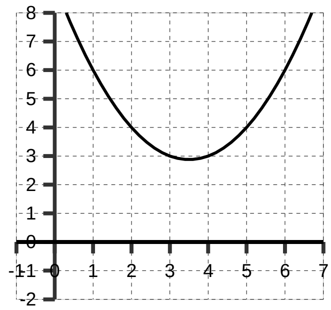
$$b^2 - 4ac = 0$$



Die Werte unter der Wurzel sind negativ.
Deshalb lassen sich keine wurzeln berechnen.
Die Parabel besitzt keine Nullstellen.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$



Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

5. Nullstellen bestimmen

5.1. Nullstellen aus dem Kurvenbild ablesen

Dem Graphen einer quadratischen Funktion kannst du entnehmen, ob sie Nullstellen hat oder nicht.

Besitzt sie Nullstellen, so kannst du Näherungswerte dafür ablesen.

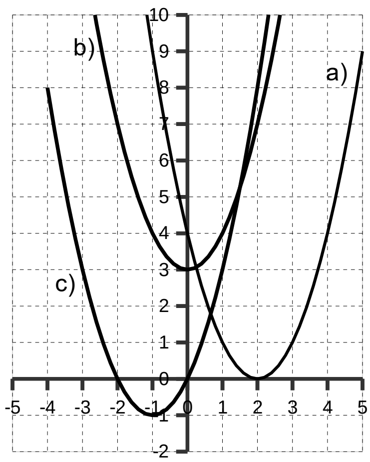
Merke:

❶ Schneidet eine Parabel die x-Achse, so hat die zugehörige Funktion Nullstellen.

❷ Die Nullstellen einer quadratischen Funktion sind die x-Werte der Schnittpunkte ihrer Parabel mit der x-Achse.

❸ Für eine Nullstelle x_0 der Funktion f gilt: $f(x_0) = 0$.

Wie heißen die Nullstellen der Funktionen?



a) $x_0 \approx 2$

b) keine Nullstellen

c) $x_0 \approx -2$ und $x_0 \approx 0$

5.2. Anzahl der Nullstellen bestimmen

<u>Anzahl von Nullstellen feststellen</u>

Einer in Scheitelpunktform gegebenen quadratischen Funktion f mit $f(x) = a(x-d)^2 + e$ kannst du direkt entnehmen, ob sie Nullstellen hat und wenn ja, wie viele.

Merke:

❶ Eine quadratische Funktion f hat keine, eine oder zwei Nullstellen

❷ f hat keine Nullstelle, falls:
$a > 0$ und $e > 0$
oder $a < 0$ und $e < 0$.

❸ f hat zwei Nullstellen, falls:
$a > 0$ und $e < 0$
oder $a < 0$ und $e > 0$.

❹ f hat genau eine Nullstelle, falls: $e = 0$.

Wie viele Nullstellen hat die Funktion?

a) $f(x) = (x + 1)^2 - 1$

b) $f(x) = (x - 2)^2$

c) $f(x) = -(x - 3)^2 - 2$

d) $f(x) = -2(x + 5)^2$

e) $f(x) = 3(x - 10)^2 + 0{,}1$

f) $f(x) = -(x - 3)^2 + 2$

a) $a = 1$ und $e = -1$
f hat zwei Nullstellen.

b) $e = 0$
f hat genau eine Nullstelle.

c) $a = -1$ und $e = -2$
f hat keine Nullstelle.

d) $e = 0$
f hat genau eine Nullstelle.

e) $a = 3$ und $e = 0{,}1$
f hat keine Nullstelle.

f) $a = -1$ und $e = 2$
f hat zwei Nullstellen.

5.3. Lage des Scheitels bestimmen

<u>Lage des Scheitels bestimmen</u>

Ist f eine quadratische Funktion und kennst du zwei x-Werte mit gleichem Funktionswert, dann kannst du den x-Wert des Scheitels berechnen:

➡ Ist $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$, dann gilt für den x-Wert d des Scheitels:
$d = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

Merke:

Der Scheitel liegt auf der Symmetrieachse der Parabel, also in der Mitte zweier Stellen mit gleichem Funktionswert.

Die quadratische Funktion f mit $f(x) = a(x-d)^2 + e$ hat

a) die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$;

b) an den Stellen $x_1 = -12$ und $x_2 = 7$ den Funktionswert 3.

Wo liegt der Scheitel?

a) $d = \frac{1}{2}(0 + 4) = 2$
Der Scheitel liegt bei x = 2.

b) $d = \frac{1}{2}(-12 + 7) = -2{,}5$
Der Scheitel liegt bei x = –2,5.

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

6. Funktionsgleichung aufstellen

6.1. Aus dem Scheitel und dem Streckfaktor der Parabel

Kennst du den Scheitel S(d|e) einer Parabel und den Vorfaktor a, dann kannst du die Funktionsgleichung direkt angeben:

- Setze a, d und e ein in die Gleichung $y = a(x-d)^2 + e$.

Du erhältst die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform.

a) der verschobenen Normalparabel mit dem Scheitel S(2|–1);

b) der Parabel mit dem Scheitel S(1|1) und dem Stauchungsfaktor $a = -\frac{1}{90}$.

a) $a = 1$; $d = 2$; $e = -1$

$y = (x-2)\ 2 - 1$

b) $a = -\frac{1}{90}$; $d = 1$; $e = 1$

$y = -\frac{1}{90}(x-1)^2 + 1$

6.2. Aus dem Scheitel und einem Punkt auf der Parabel

Kennst du den Scheitel S(d|e) und einen zweiten Parabelpunkt $P(x_1|y_1)$ kannst du die Gleichung so ermitteln:

1. Setze d und e in die Gleichung $y = a(x-d)^2 + e$ ein.
2. Setze x_1 und y_1 in die Gleichung von 1. ein und löse nach a auf.
3. Setze a,d und e in die Gleichung $y = a(x-d)^2 + e$ ein.

Du erhältst die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform.

a) mit dem Scheitel S(1|3) und dem Punkt P(2|2).

b) mit dem Scheitel S(–5|1) und dem Punkt P(1|10).

a) $y = a(x-1)^2 + 3$

Einsetzen: $x_1 = 2$; $y_1 = 2$

$2 = a(2-1)^2 + 3 \Leftrightarrow a = -1$

$y = -(x-1)^2 + 3$

b) $y = a(x+5)^2 + 1$

Einsetzen: $x_1 = 1$; $y_1 = 10$

$10 = a(1+5)^2 + 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$;

$y = \frac{1}{4}(x+5)^2 + 1$

6.3. Aus einem Punkt auf der Parabel

Kennst du einen Punkt $P(x_1|y_1)$ einer Parabel mit $f(x)=ax^2$, dann kannst du die Funktionsgleichung so ermitteln:

1. Setze x_1 und y_1 in die Glei–chung: $y = ax^2$.
2. Löse die Gleichung nach a auf.

Auf der Parabel zu $f(x) = ax^2$ liegt der Punkt P. Bestimme die Funktionsgleichung.

a) P(3|–9)

b) P(4|1)

a) $x_1 = 3$; $y_1 = -9$

$-9 = a \cdot 3^2 \Leftrightarrow a = -1$;

$y = -x^2$

b) $x_1 = 4$; $y_1 = 1$

$1 = a \cdot 4^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}$;

$y = \frac{1}{16}x^2$

6.4. Normalparabel aus zwei Punkten; allgemeine Parabel aus drei Punkten

Kennst du drei Punkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$ und $P_3(x_3|y_3)$ einer Parabel dann kannst du die Funktionsgleichung so ermitteln:

1. Setze die Koordinaten von P_1 P_2 und P_3 ein in die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$.
   Du erhältst drei Gleichungen mit den Variablen a, b und c.
2. Löse das Gleichungssystem nach a, b und c auf.
3. Setze a, b und c ein in die Gleichung: $y = ax^2 + bx + c$.

Du erhältst die Funktionsgleichung in allgemeiner Form.

Zu Aufgabe a):
Hier ist der Streckfaktor bereits bekannt (a = 1). Um b und c zu ermitteln, werden die Koordinaten von P_1 und P_2 in die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ eingesetzt

a) einer verschobenen Normalparabel mit den Punkten $P_1(3|1)$ und $P_2(4|-2)$.

b) einer Parabel mit den Punkten $P_1(-2|5)$, $P_2(-1|4)$ und $P_3(1|8)$.

a) $x_1 = 3$; $y_1 = 1$; $x_2 = 4$; $y_2 = -2$

Einsetzen in $y = x^2 + bx + c$:

$1 = 3^2 + b \cdot 3 + c$

$-2 = 4^2 + b \cdot 4 + c$; also:

$3b + c = -8$

$4b + c = -18$

$b = -10$; $c = 22$; also:

$y = x^2 - 10x + 22$

b) $x_1 = -2$; $y_1 = 5$; $x_2 = -1$; $y_2 = 4$; $x_3 = 1$; $y_3 = 8$

Einsetzen in $y = ax^2 + bx + c$:

$5 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$

$4 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$

$8 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$; also:

$5 = 4a - 2b + c$

$4 = a - b + c$

$8 = a + b + c$

$a = 1$; $b = 2$; $c = 5$; also:

$y = x^2 + 2x + 5$

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

7. Parabeln und Geraden

Schnittpunkte zwischen zwei Funktionen berechnet man durch Gleichsetzen der Funktionen. Beim Gleichsetzen von Parabel mit Geraden und anschließendem Zusammenfassen der einzelnen Glieder entsteht immer eine quadratische Gleichung, die =0 zu setzen ist. Damit entstehen alle Möglichkeiten, die auch beim Lösen einer quadratischen Gleichung entstehen. Es kann zwei Schnittpunkte, einen Schnittpunkt oder keinen Schnittpunkt geben.

Normalparabel

$x^2 + px + q = mx + b$
$x^2 + (p-m)x + q - b = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{(p-m)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(p-m)}{2}\right)^2 - q + b}$$

Allgemeine Parabel

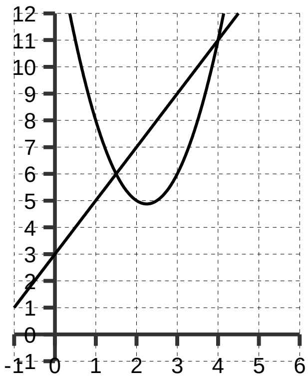
$ax^2 + bx + c = mx + n$
$ax^2 + (b-m)x + c - n = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-(b-m) \pm \sqrt{(b-m)^2 - 4a(c-n)}}{2a}$$

7.1. Parabel und Gerade besitzen zwei Schnittpunkte

Der Ausdruck unter der Wurzel ist positiv.

Parabel: y = 2 x2 – 9x + 15
Gerade: y = 2x + 3



Gleichsetzen:
$2x^2 - 9x + 15 = 2x + 3$
Zusammenfassen:
$2x^2 - 11x + 12 = 0$
a-b-c-Formel als Lösungsformel

$$x_{1/2} = \frac{11}{4} \pm \frac{\sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{11}{4} \pm \frac{\sqrt{121 - 96}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{11}{4} \pm \frac{\sqrt{25}}{4}$$

D > 0 ; zwei Schnittpunkte

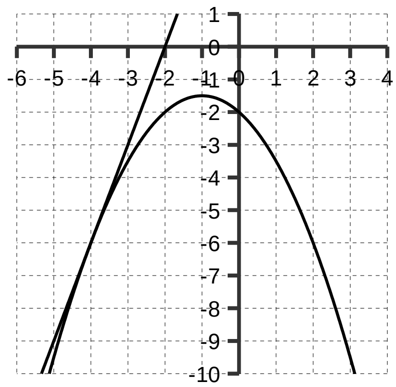
$x_1 = 4$; $y_1 = 11$
$x_2 = 1{,}5$; $y_2 = 6$

7.2. Parabel und Gerade besitzen einen Schnittpunkt

Der Ausdruck unter der Wurzel ist gleich Null.

Die Gerade berührt die Parabel nur und ist deshalb Tangente an die Parabel.

Parabel: $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2$
Gerade: v = 3x + 6



Gleichsetzen:
$-\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = 3x + 6$
Zusammenfassen
$-\frac{1}{2}x^2 - 4x - 8 = 0$
a-b-c-Formel als Lösungsformel

$$x_{1/2} = \frac{4}{-1} \pm \frac{\sqrt{4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-8)}}{-1}$$

$$x_{1/2} = \frac{4}{-1} \pm \frac{\sqrt{4^2 - 16}}{-1}$$

$$x_{1/2} = \frac{4}{-1} \pm \frac{\sqrt{0}}{-1}$$

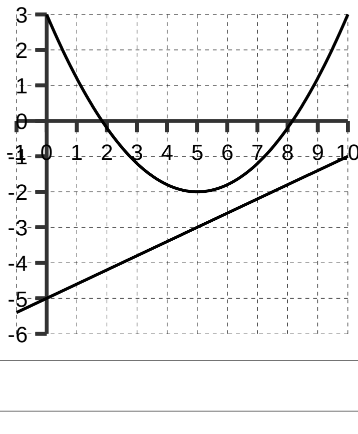
D = 0 ; ein Schnittpunkt

$x_{1/2} = -4$; $y_1 = -6$

7.3. Parabel und Gerade besitzen keinen Schnittpunkt

Der Ausdruck unter der Wurzel ist negativ.

Parabel: $y = 0{,}2x^2 - 2x + 3$
Gerade: $y = 0{,}4x - 5$



Gleichsetzen
$0{,}2x^2 - 2x + 3 = 0{,}4x - 5$
Zusammenfassen
$0{,}2x^2 - 2{,}4x + 8 = 0$
a-b-c-Formel als Lösungsformel

$$x_{1/2} = \frac{2{,}4}{0{,}4} \pm \frac{\sqrt{2{,}4^2 - 4 \cdot 0{,}2 \cdot 8}}{-0{,}4}$$

$$x_{1/2} = \frac{2{,}4}{0{,}4} \pm \frac{\sqrt{5{,}76 - 6{,}4}}{-0{,}4}$$

$$x_{1/2} = \frac{2{,}4}{0{,}4} \pm \frac{\sqrt{-0{,}64}}{-0{,}4}$$

D < 0 ; kein Schnittpunkt

Eigenschaften	**Erläuterung**	**Beispiel**

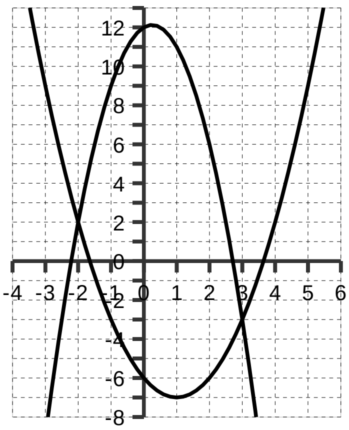
8. Parabeln und Parabeln

Schnittpunkte zwischen zwei Funktionen berechnet man durch Gleichsetzen der Funktionen. Beim Gleichsetzen von zwei Parabel und anschließendem Zusammenfassen der einzelnen Glieder kann sowohl eine quadratische Gleichung als auch eine lineare Gleichung (ohne ein Glied x^2) entstehen. Falls nur ein lineares Glied entsteht, gibt es immer eine Lösung, wenn auch ein quadratisches Glied entsteht, sind wieder alle drei Möglichkeiten vorhanden.

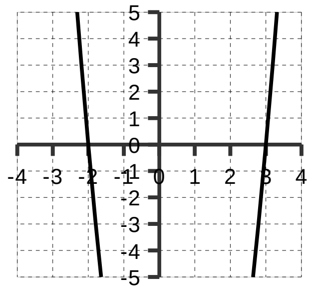
8.1. Die beiden Parabeln besitzen zwei Schnittpunkte

Der Ausdruck unter der Wurzel ist positiv.

Parabel1 : $y = x^2 - 2x - 6$
Parabel 2: $y = -2x^2 + x + 12$



Gleichsetzen
$x^2 - 2x - 6 = -2x^2 + x + 12$
Zusammenfassen
$3x^2 - 3x - 18 = 0$
Funktionsbild der Differenzparabel



Die x – Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Parabeln sind die Nullstellen der Parabel, die durch Subtraktion der Parabeln entsteht

$$x_{1/2} = \frac{3}{6} \pm \frac{\sqrt{3^2 - 4\cdot 3\cdot(-18)}}{6}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{6} \pm \frac{\sqrt{9+216}}{6}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{6} \pm \frac{\sqrt{225}}{6}$$

D > 0 ; Zwei Schnittpunkte

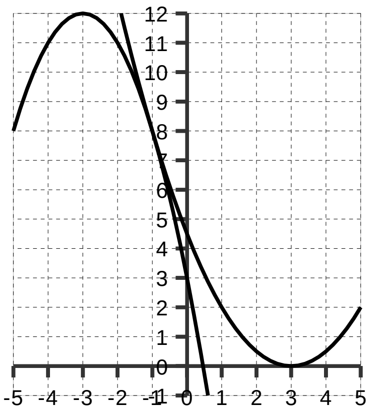
$x_1 = 3$; $y_1 = -12$
$x_2 = -2$; $y_2 = 2$

Die y – Werte entstehen durch Einsetzen der x – Werte in die Ausgangsgleichungen.

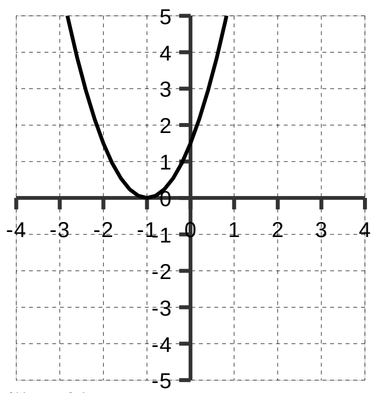
8.2. Die beiden Parabeln besitzen einen Schnittpunkt

Der Ausdruck unter Wurzel ist gleich Null.

Parabel 1: $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4{,}5$
Parabel 2: $y = -x^2 - 6x + 3$



Gleichsetzen
$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4{,}5 = -x^2 - 6x + 3$
Zusammenfassen
$1{,}5x^2 + 3x + 1{,}5 = 0$
Funktionsbild der Differenzparabel



$$x_{1/2} = \frac{-3}{2\cdot 1{,}5} \pm \frac{\sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1{,}5\cdot 1{,}5}}{2\cdot 1{,}5}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3}{3} \pm \frac{\sqrt{9 - 4\cdot 1{,}5\cdot 1{,}5}}{3}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3}{3} \pm \frac{\sqrt{9-9}}{3}$$

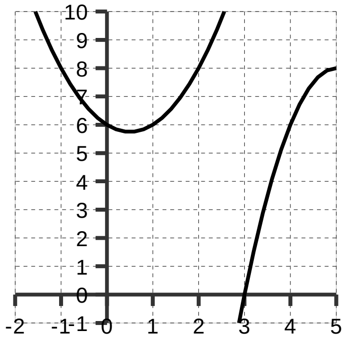
$x_{1/2} = -1$ $y_{1/2} = 8$

Die beiden Parabeln berühren sich im Punkt (–1 | 8)

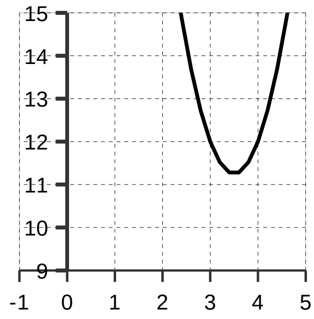
8.3. Die beiden Parabeln besitzen keine Schnittpunkte

Der Ausdruck unter Wurzel ist negativ

Parabel 1: $y = -2x^2 + 20x - 42$
Parabel 2: $y = x^2 - x + 6$



Gleichsetzen
$-2x^2 + 20x - 42 = x^2 - x + 6$
Zusammenfassung
$3x^2 - 21x + 48 = 0$
Funktionsbild der Differenzparabel



$$x_{1/2} = \frac{21}{6} \pm \frac{\sqrt{21^2 - 4\cdot 3\cdot 48}}{6}$$

$$x_{1/2} = \frac{21}{6} \pm \frac{\sqrt{441 - 576}}{6}$$

$$x_{1/2} = -\frac{21}{6} \pm \frac{\sqrt{-135}}{6}$$

Der Wurzelausdruck ist negativ, die Differenzparabel hat keine Nullstellen, die ursprünglichen Parabeln haben keinen Schnittpunkt.