Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Umkehrfunktionen

Zu jeder Funktion gibt es eine passende **Umkehrzuordnung**, die die jeweilige Zuordnung rückgängig macht.

f: x |–> 2x + 1 $\qquad$ f^{-1}: x |–> 0,5 x – 0,5

Den Graphen einer Umkehrzuordnung erhält man, indem man den Graphen der ursprünglichen Funktion an den Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten y = x spiegelt.

Nicht jede Umkehrzuordnung ist eine **Umkehrfunktion**.

Die Potenzfunktion x|–> x^n $\mathbb{D}=\mathbb{R}$ und geradem Exponenten n ordnet a und -a die gleiche Zahl a^n zu. Die Umkehrzuordnung ordnet also der Zahl an die beiden Zahlen a und -a zu. Die Umkehrzuordnung ist damit keine Funktion ! (Bei einer Funktion darf einem Ausgangswert nur ein eindeutiger Zielwert zugeordnet werden. Es können aber mehrere Ausgangswerte den gleichen Zielwert haben. Dehalb ist x^n für gerade n auch eine Funktion, da sie für a und -a nur einen eindeutigen Wert zuordnet, auch, wenn der Zielwert bei beiden gleich ist.)

Eine Funktion ist nur dann umkehrbar, wenn sie streng monoton wachsend oder fallend ist. (das ist genau dann der Fall, wenn jedem Element aus ⏱ ein anderes Element aus ✍ zugeordnet wird!)

Eine Funktion x|–> x^n $\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$ und x|–> x^{-n} $\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$ ist umkehrbar, die Umkehrfunktion lautet $\quad$ x|–> $x^{1/n}$ $\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$ bzw x|–> $x^{-1/n}$ $\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$

Musterbeispiele

Den Ausdruck einer Umkehrfunktion kann man rechnerische ermitteln:

Beispiel 1:

1 Funktionsvorschrift aufschreiben: $\quad$ x|–> 3 x + 7
2 Funktionsgleichung aufschreiben $\quad$ y = 3 x + 7
3 Nach x auflösen

y = 3 x + 7 $\quad$ | -7 (Umkehroperation zu +)
y – 7 = 3 x $\quad$ | : 3 (Umkehroperation zu *)
⅓ y – 7/3 = x

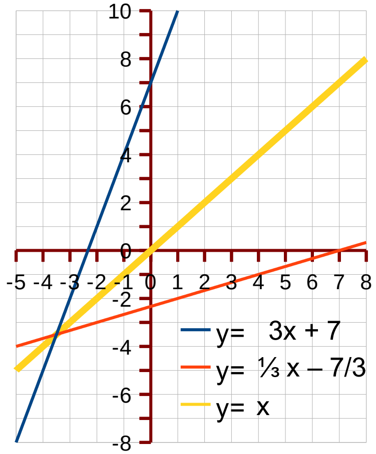
4 x und y vertauschen $\quad$ ⅓ x – 7/3 = y
5 Funktionsvorschrift aufschreiben $\quad$ x|–> ⅓ x – 7/3

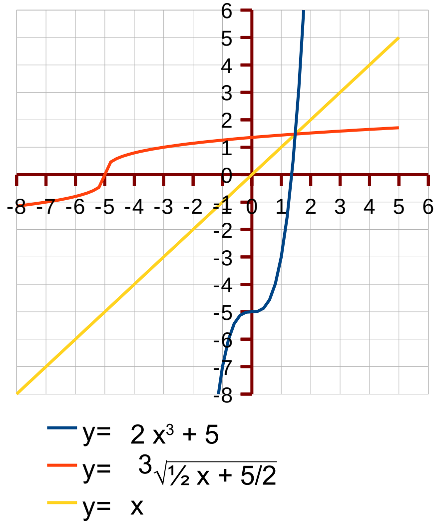
Beispiel 2:

1 Funktionsvorschrift aufschreiben: $\quad$ x|–> 2 x^3 – 5
2 Funktionsgleichung aufschreiben $\quad$ y = 2 x^3 – 5
3 Nach x auflösen

y = 2 x^3 – 5 $\quad$ | +5 (Umkehroperation zu –)
y + 5 = 2 x^3 $\quad$ | : 2 (Umkehroperation zu *)
½ y + 5/2 = x^3 $\quad$ | $\sqrt[3]{\ }$ (Umkehrfunktion zu x^3)
$\sqrt[3]{½ y + 5/2}$ = x

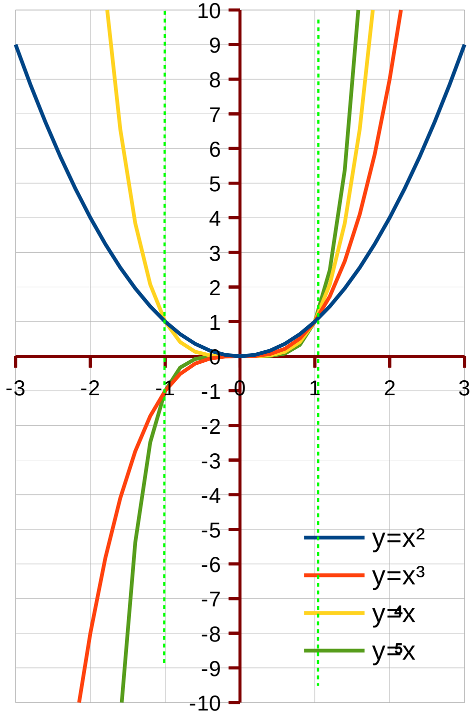
4 x und y vertauschen $\quad$ $\sqrt[3]{½ x + 5/2}$ = y
eiben $\quad$ x|–> $\sqrt[3]{½ x + 5/2}$

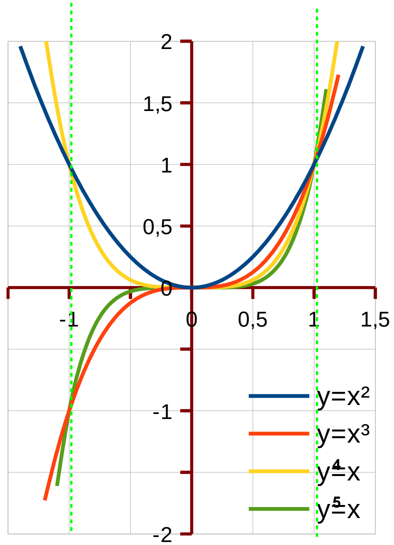




Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Funktionen	**Potenzfunktionen mit positivem Exponenten**	





$y = x^n$	n geradzahlig	n ungeradzahlig
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 0$	$x = 0$
Extrema	$x = 0$	
Wendepunkte		$x = 0$
Gemeinsame Punkte	(-1,1); (0,0); (1,1)	(-1,-1); (0,0); (1,1)
Monotonie	$-\infty < x \leq 0$ monoton fallend $0 \leq x < +\infty$ monoton wachsend	$-\infty < x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \leq x \leq 0$ und $0 \leq x \leq 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \leq -1$ und $1 \leq x < +\infty$	

Potenzen mit gleicher Basis und unterschiedlichen Exponenten:

1. Potenzgesetz $a^m * a^n = a^{n+m}$

2. Potenzgesetz $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ für $n > m$

Erweiterung des Potenzbegriffes: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

3. Potenzgesetz $(a^m)^n = a^{n*m}$

Potenzen mit unterschiedlichen Basen und gleichen Exponenten:

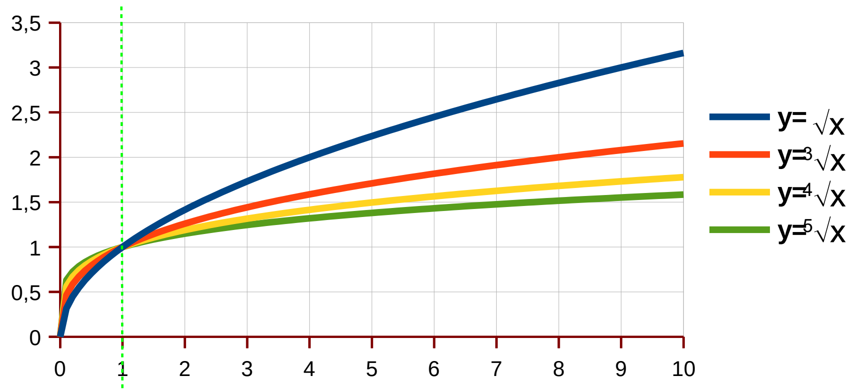
4. Potenzgesetz $a^n * b^n = (a*b)^n$

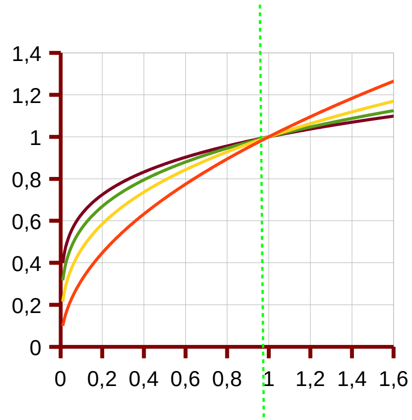
5. Potenzgesetz $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

© Dipl.-Math.
Armin Richter

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Funktionen	**Wurzelfunktionen (Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen)**	





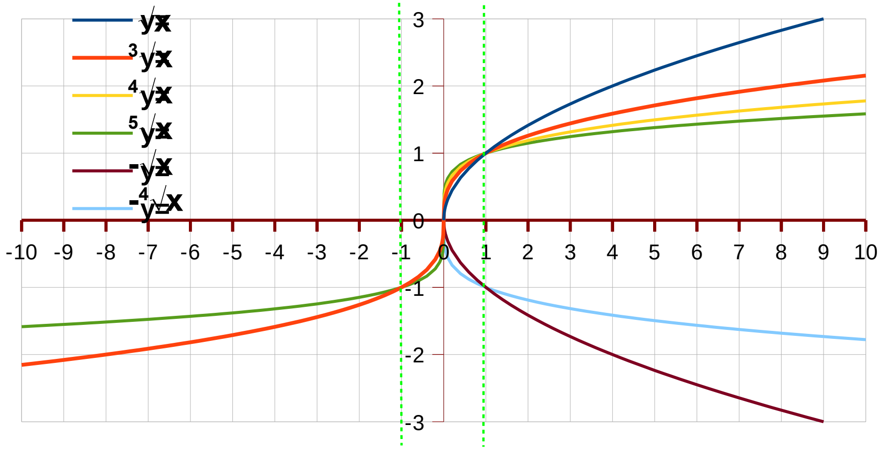
$y = \sqrt[n]{x}$	**n ganzzahlig**
Definitionsbereich	$0 \le x < +\infty$
Wertebereich	$0 \le y < +\infty$
Nullstelle	$x = 0$
Extrema	
Wendepunkte	
Gemeinsame Punkte	(0,0); (1,1)
Monotonie	$0 \le x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $0 \le x \le 1$ zu den Intervallen und $1 \le x < +\infty$

		Zugehöriges Potenzgesetz
1. Wurzelgesetz	$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)$	$(a^{1/n})^m = (a)^{m * 1/n}$
2. Wurzelgesetz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n*m]{a} = a^{1/m*n}$	$(a^{1/n})^{1/m} = (a)^{1/m * 1/n} = a^{1/m*n}$
3. Wurzelgesetz	$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$	$a^{1/n} * b^{1/n} = (a * b)^{1/n}$
4. Wurzelgesetz	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$a^{1/n} / b^{1/n} = (a / b)^{1/n}$

Spezialfall: $\frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$ Potenzgesetz $b^{-1/n} = (b^{-1})^{1/n}$

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Funktionen	**Funktionszweige der Wurzelfunktionen**	

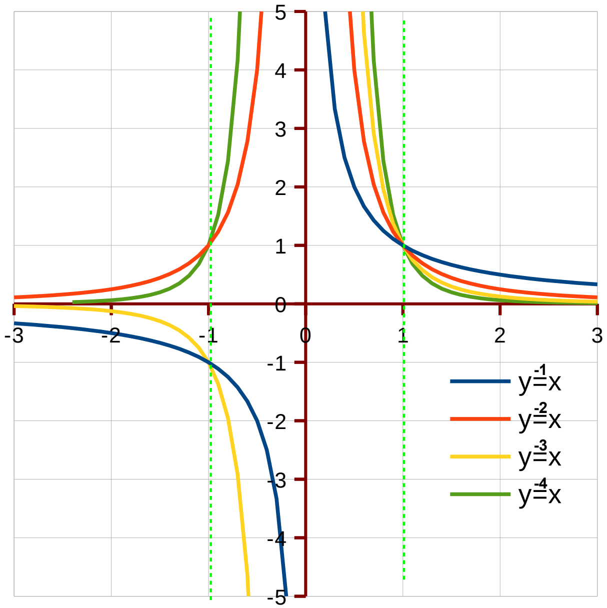


$y = \sqrt[n]{x}$	n geradzahlig	n ungeradzahlig
Definitionsbereich	$0 \leq x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 \leq y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$ $-\infty < y \leq 0$
Nullstelle	$x = 0$	$x = 0$
Extrema		
Wendepunkte		$x = 0$
GemeinsamePunkte	(0,0); (1,1) (0,0); (1,-1)	(-1,-1); (0,0); (1,1)
Monotonie	$-\infty < x \leq 0$ monoton fallend $0 \leq x < +\infty$ monoton wachsend	$-\infty < x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zwei Kurvenbögen	

zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \leq x \leq 0$ und $0 \leq x \leq 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \leq -1$ und $1 \leq x < +\infty$

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Funktionen	**Potenzfunktionen mit negativem Exponenten**	



$y = x^{-n}$	**n geradzahlig**	**n ungeradzahlig**
Definitionsbereich	$-\infty < x < 0$ $0 < x < +\infty$	$-\infty < x < 0$ $0 < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$-\infty < y < 0$ $0 < y < +\infty$
Gemeinsame Punkte	(-1,1); (1,1)	(-1,-1); (1,1)
Monotonie	$-\infty < x < 0$ monoton wachsend $0 < x < +\infty$ monoton fallend	$-\infty < x < 0$ monoton fallend $0 < x < +\infty$ monoton fallend
Polstellen	$x = 0$	$x = 0$
Asymptoten	x-Achse für $x \to -\infty$ x-Achse für $x \to +\infty$	x-Achse für $x \to -\infty$ x-Achse für $x \to +\infty$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \le x \le 0$ und $0 \le x \le 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \le -1$ und $1 \le x < +\infty$	

Treff Lernen
Christina Strauch

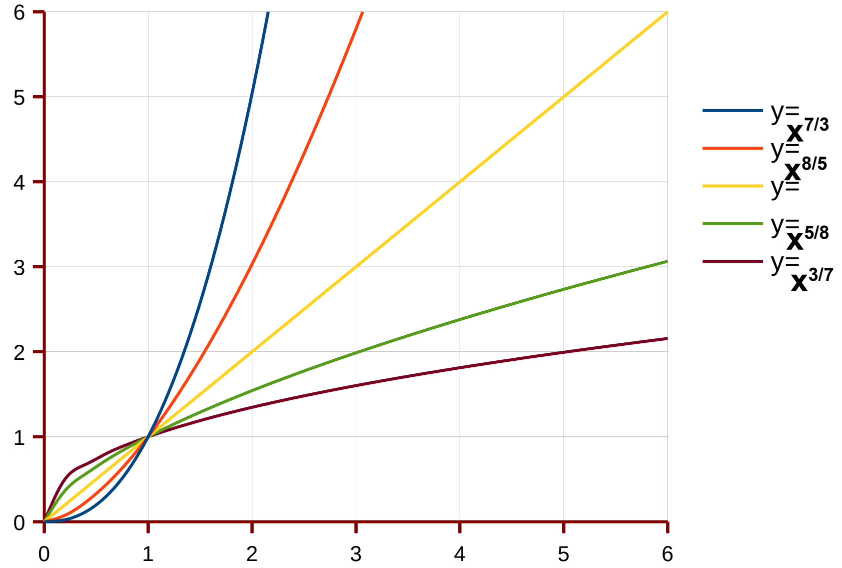
Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**

Funktionen

Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

Da Potenz- und Wurzelfunktionen Umkehrfunktionen sind, gibt es interessante Beziehungen bei Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten, da rationale Exponenten Potenz- und Wurzelfunktion einschließen.

$y = x^{n/m}$ und $y = x^{m/n}$ sind Umkehrfunktionen

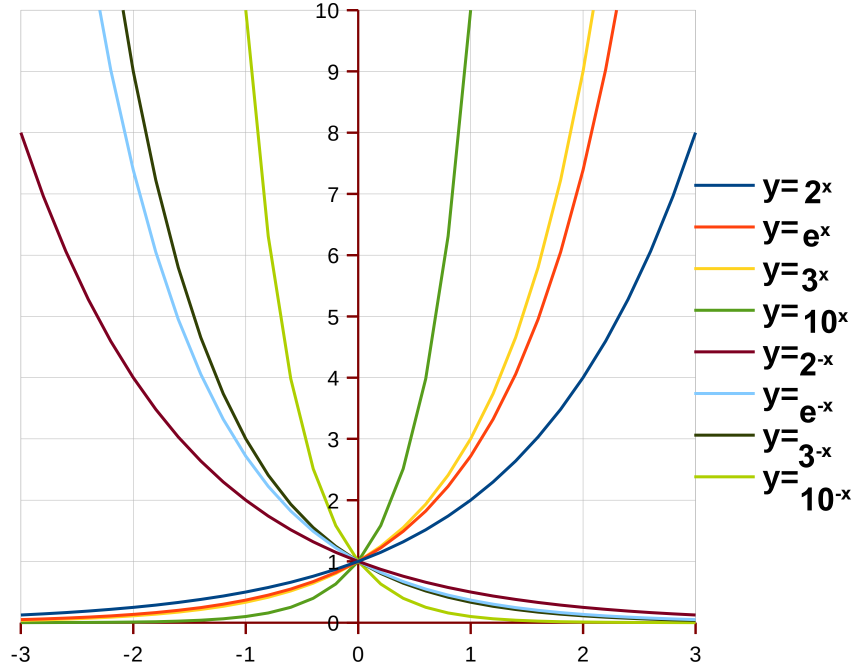


Der jeweils höhere Wert im Bruch des Exponenten bestimmt das Aussehen der Kurve. Ist der Zähler des Bruches größer als der Nenner, verhält sich die Kurve wie eine Potenzfunktion. Ist der Zähler kleiner als der Nenner, verhält sich die Kurve wie eine Wurzelfunktion.
Die Kurven spiegeln sich an der Geraden y=x.

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Funktionen		

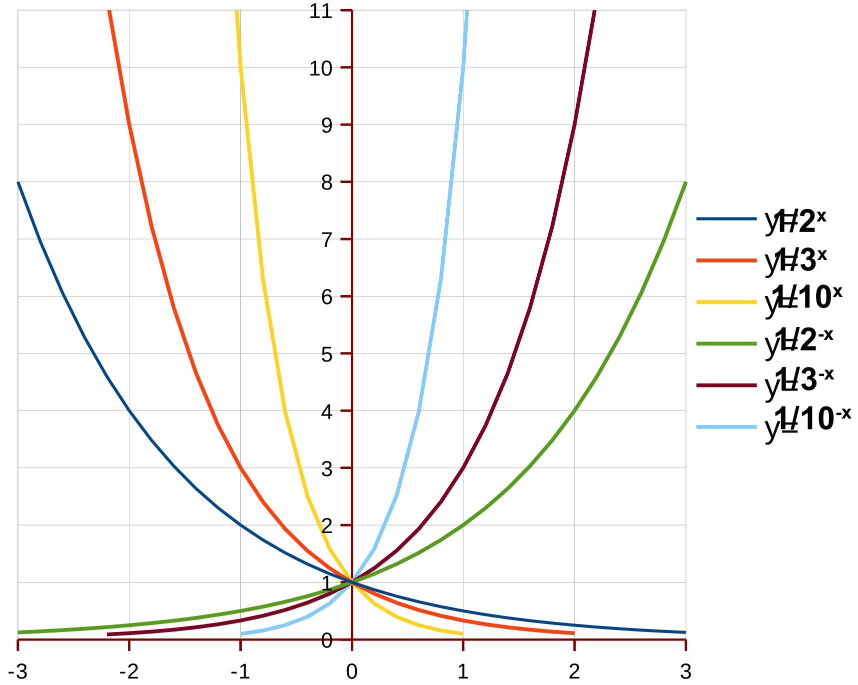
Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen $y = a^x$ $a > 1$



	$y = a^x$ $a > 1$	$y = a^{-x}$
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$0 < y < +\infty$
Nullstelle		
Extrema		
Wendepunkte		
Gemeinsame Punkte	(0,1)	(0,1)
Monotonie	$0 \leq x < +\infty$ monoton wachsend	$0 \leq x < +\infty$ monoton fallend
Asymptote	x-Achse für $x \rightarrow -\infty$	x-Achse für $x \rightarrow +\infty$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-\infty < x \leq 0$ zu den Intervallen und $0 \leq x < +\infty$	

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Funktionen	**Exponentialfunktionen $y= a^x$ $0 < a < 1$**	



	$y = a^x$	$0< a < 1$	$y = a^{-x}$
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$		$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$		$0 < y < +\infty$
Nullstelle			
Extrema			
Wendepunkte			
Gemeinsame Punkte	(0,1)		(0,1)
Monotonie	$0 \leq x < +\infty$ monoton fallend		$0 \leq x < +\infty$ monoton wachsend
Asymptote	x-Achse für $x \rightarrow -\infty$		x-Achse für $x \rightarrow +\infty$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-\infty < x \leq 0$ zu den Intervallen und $0 \leq x < +\infty$. Das Kurvenbild der Funktion $y = 1/n^x$ ist das Spiegelbild der Funktion $y = n^x$ an der y-Achse gespiegelt		

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

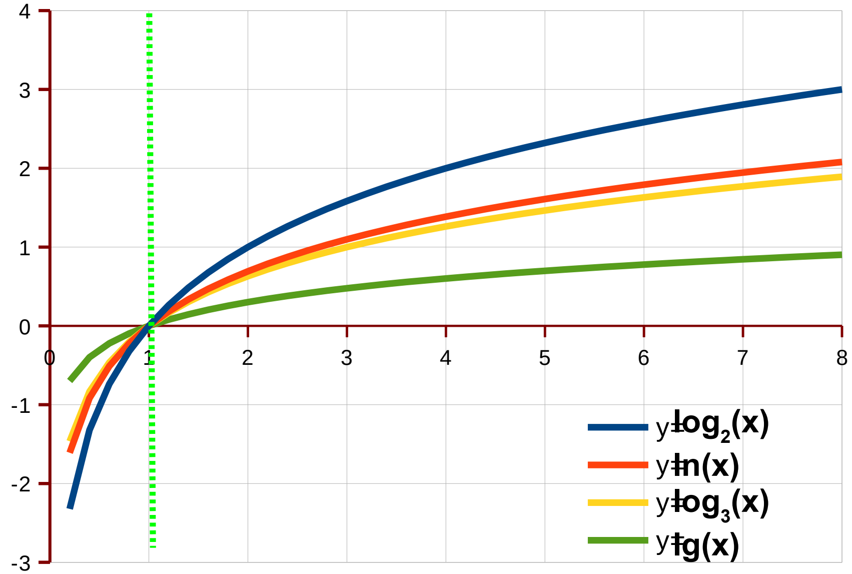
Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Logarithmusfunktionen (Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen)

Logarithmusfunktionen $y = \log_a(x)$ $a > 1$



$y = {}_a\log x$	$a > 1$
Definitionsbereich	$0 \leq x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 1$
Extrema	
Wendepunkte	
Gemeinsame Punkte	(1,0)
Monotonie	$0 < x < +\infty$ monoton wachsend
Asymptote	y-Achse für $x \to +0$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-\infty < x \leq 1$ zu den Intervallen und $1 \leq x < +\infty$

Es existieren nur Logarithmengesetze zur gleichen Basis:

1. Logarithmengesetz ${}_a\log (b * c) = {}_a\log b + {}_a\log c$

Parallele zum Potenzgesetz $a^{n+m} = a^n * a^m$

2. Logarithmengesetz ${}_a\log (b / c) = {}_a\log b - {}_a\log c$

Parallele zum Potenzgesetz $a^{n-m} = a^n / a^m$

3. Logarithmengesetz ${}_a\log b^m = m * {}_a\log b$

Parallele zum Potenzgesetz $(a^n)^m = a^{n*m}$

4. Logarithmengesetz ${}_a\log \sqrt[n]{b^m} = m/n * {}_a\log b$

Parallele zum gleichen Potenzgesetz für rationale Exponenten

Spezialfälle: ${}_a\log (1 / b) = - {}_a\log b$ ${}_a\log (a^x) = x$

${}_a\log (a) = 1$

${}_a\log (1) = 0$ $a^{{}_a\log (b)} = b$

${}_a\log (0)$ ist undefiniert. $\lim_{x \to +0} {}_a\log (x) = -\infty$

Kettenregel

Logarithmen lassen sich von einer Basis auf eine andere Basis umrechnen: $\boxed{{}_a\log b = {}_a\log c * {}_c\log b}$

Logarithmen werden auf eine neue Basis umgerechnet, indem der Logarithmus des Numerus zur neuen Basis durch den Logarithmus der alten Basis zur neuen Basis dividiert wird: $\boxed{{}_c\log b = \frac{{}_a\log b}{{}_a\log c}}$

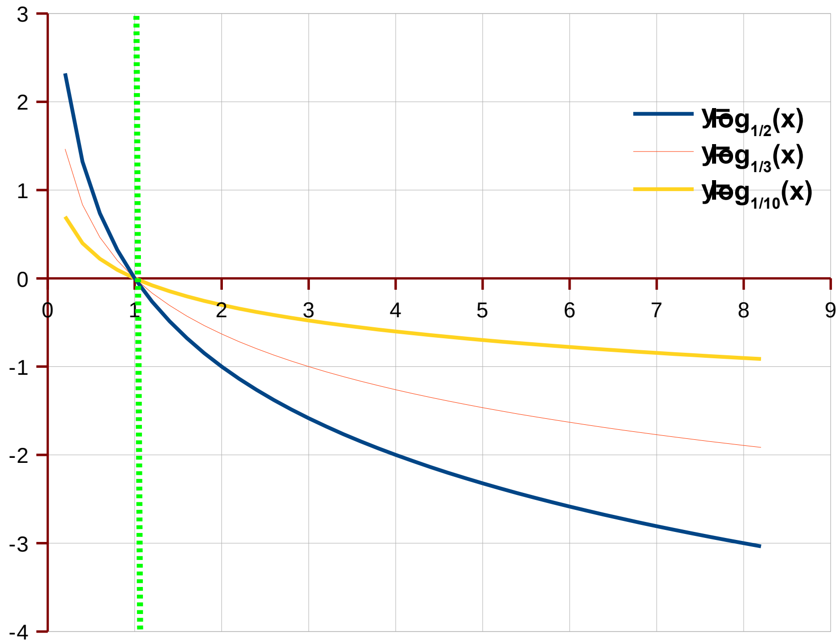
Umrechnung natürlicher Logarithmus in dekadischen Logarithmus: $\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10} = \frac{\ln b}{2{,}3025851.}$

Umrechnung dekadischer Logarithmus in natürlichen Logarithmus: $\ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{\lg b}{0{,}4342944}$

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**

Funktionen

Logarithmusfunktionen $y = \log_a(x)$ $0 < a < 1$



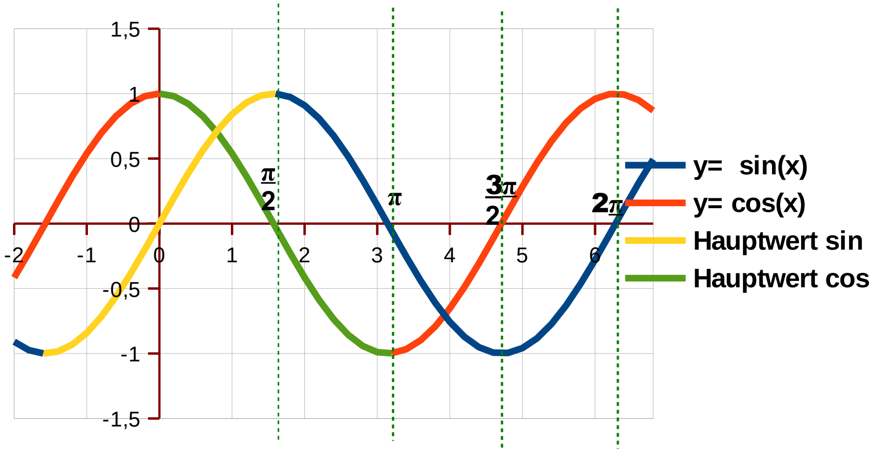
$y = {}_a\log x$	$0 < a < 1$
Definitionsbereich	$0 \leq x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 1$
Extrema	
Wendepunkte	
Gemeinsame Punkte	(1,0)
Monotonie	$0 < x < +\infty$ monoton fallend
Asymptote	y-Achse für $x \to +0$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-\infty < x \leq 1$ zu den Intervallen und $1 \leq x < +\infty$

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Trigonometrische Funktionen

Sinus und Cosinus Funktion



	y = sin(x)	y = cos(x)
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-1 \le y \le 1$	$-1 \le y \le 1$
Nullstelle	$x = k\cdot\pi$	$x = \pi/2 + k\cdot\pi$
Extrema	$x = \pi/2 + 2k\cdot\pi$ Maximum $x = 3\pi/2 + 2k\cdot\pi$ Minimum	$x = 2k\cdot\pi$ Maximum $x = \pi + 2k\cdot\pi$ Minimum
Wendepunkte	$x = \pi/4 + k\cdot\pi$	$x = \pi/4 + k\cdot\pi$
Periode	2π	2π
GemeinsamePunkte	$(\pi/4 + k\cdot\pi, ½\sqrt{2})$	
Monotonie	$-\pi/2+2k\cdot\pi \le x \le \pi/2+2k\cdot\pi$ monoton wachsend $\pi/2+2k\cdot\pi \le x \le 3\pi/2+2k\cdot\pi$ monoton fallend	$\pi + 2k\cdot\pi \le x \le 2\pi + 2k\cdot\pi$ monoton wachsend 2k*π ≤ x ≤ ð +2k*π monoton fallend
Besonderheiten		

Musterbeispiele

Additionstheoreme

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\cdot\sin(\alpha)\cos(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cdot\cos(\alpha)\cos(\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cdot\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\cdot\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \sqrt{2}\cdot\sin(45°+\alpha) = \sqrt{2}\cdot\cos(45°-\alpha)$

$\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \sqrt{2}\cdot\cos(45°+\alpha) = \sqrt{2}\cdot\sin(45°-\alpha)$

Produktformeln

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha) - \sin^2(\beta) = \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)$

$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\alpha)$

$\sin(\alpha)\sin(\beta) = ½\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos(\alpha)\cos(\beta) = ½\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$\sin(\alpha)\cos(\beta) = ½\,[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

Umrechung Vielfache eines Winkels in Ausgangswinkel

$\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\sin(3\alpha) = 3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot\sin^3(\alpha)$
$\sin(4\alpha) = 8\cdot\sin(\alpha)\cos^3(\alpha) - 4\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

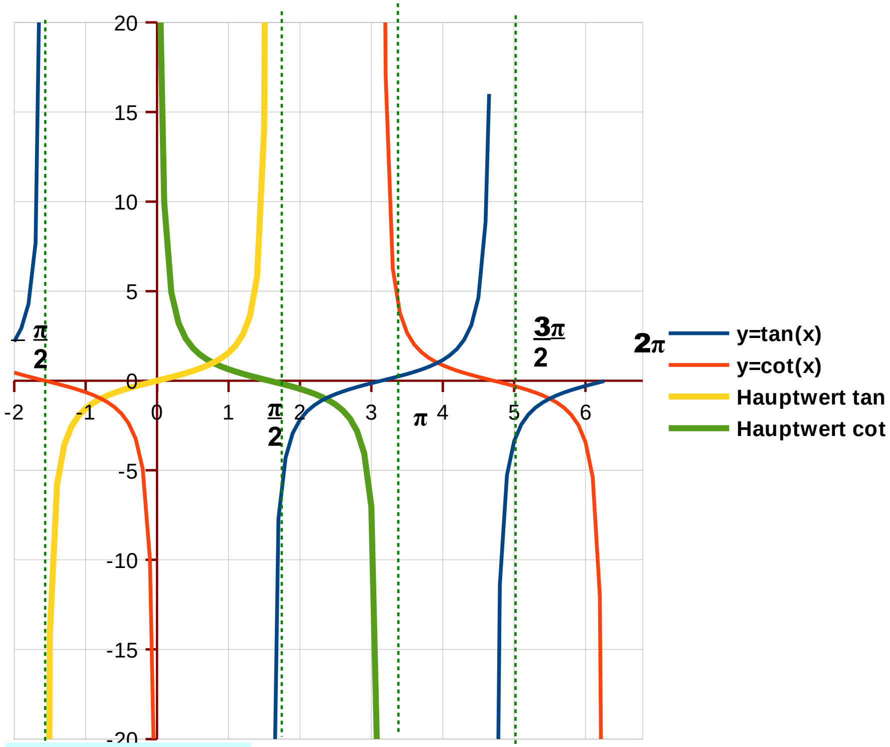
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1-2\cdot\sin^2(\alpha) = 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1$
$\cos(3\alpha) = 4\cdot\cos^3(\alpha) - 3\cdot\cos(\alpha)$
$\cos(4\alpha) = 8\cdot\cos^4(\alpha) - 8\cdot\cos^2(\alpha) + 1$

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Trigonometrische Funktionen

Tangens und Cotangens Funktion



	y = tan(x)	y = cot(x)
Definitionsbereich	$\pi/2+k\cdot\pi < x < \pi/2+k\cdot\pi$	$k\cdot\pi < x < \pi+k\cdot\pi$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = k\cdot\pi$	$x = \pi/2 + k\cdot\pi$
Extrema		
Wendepunkte	$x = k\cdot\pi$	$x = \pi/2 + k\cdot\pi$
Polstellen	$x = \pi/2 + k\cdot\pi$	$x = k\cdot\pi$
Periode	π	π
GemeinsamePunkte	$(\pi/4 + k\cdot\pi, 1)$	
Monotonie	$-\pi/2+k\cdot\pi < x < \pi/2+k\cdot\pi$ monoton wachsend	$k\cdot\pi < x < \pi + k\cdot\pi$ monoton fallend
Besonderheiten		

Additionstheoreme

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\hat{a}) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\acute{a})} \qquad \cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) + 1}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}$$

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \qquad \tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$

$$\cot(\alpha) + \cot(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \qquad \cot(\alpha) - \cot(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\frac{1+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)} = \tan(45°+\alpha) \qquad \frac{1+\cot(\alpha)}{1-\cot(\alpha)} = \cot(45°+\alpha)$$

Produktformeln

$$\tan(\alpha)\tan(\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)} = -\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}$$

$$\cot(\alpha)\cot(\beta) = \frac{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}{\tan(\alpha)+\cot(\beta)} = -\frac{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}{\tan(\alpha)-\cot(\beta)}$$

$$\tan(\alpha)\cot(\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\cot(\beta)}{\cot(\alpha)+\tan(\beta)} = -\frac{\tan(\alpha)-\cot(\beta)}{\cot(\alpha)-\tan(\beta)}$$

$$\cot(\alpha)\tan(\beta) = \frac{\cot(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\cot(\beta)} = -\frac{\cot(\alpha)-\tan(\beta)}{\tan(\alpha)-\cot(\beta)}$$

Umrechung Vielfache eines Winkels in Ausgangswinkel

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \qquad \cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cdot\cot(\alpha)}$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\cdot\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\cdot\tan^2(\alpha)} \qquad \cot(3\alpha) = \frac{\cot^3(\alpha) - 3\cdot\cot(\alpha)}{3\cdot\tan^2(\alpha) - 1}$$

Umrechnung des halben Winkels in Ausgangswinkel

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$$

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)} = \frac{1+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

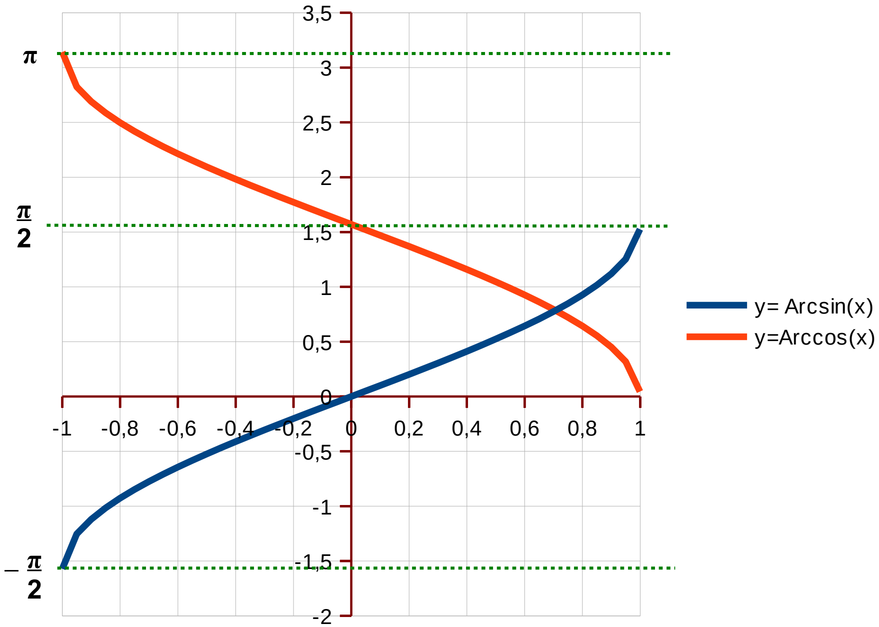
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Trigonometrische Funktionen

Gesetze und Regeln

Arcusfunktionen (Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)

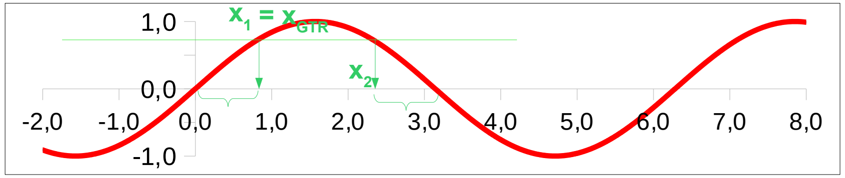
arcsin und arccos Funktion



	y = arcsin x	y = arccos x
Definitionsbereich	$-1 \le x \le +1$	$-1 \le x \le +1$
Wertebereich	$-\pi/2 \le y \le +\pi/2$	$0 \le y \le \pi$
Nullstelle	x = 0	
Extrema		
Wendepunkte	x = 0	x = 0
Gemeinsame Punkte		
Monotonie	monoton wachsend	monoton fallend
Besonderheiten		

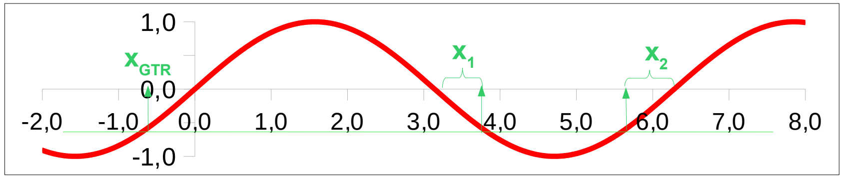
Musterbeispiele

$\sin(\alpha) = 0{,}8 \quad \alpha \in [0;2\pi]$



$x_{GTR} = 0{,}927 \qquad x_1 = 0{,}927 \qquad x_2 = 3{,}14 - 0{,}927 = 2{,}214$

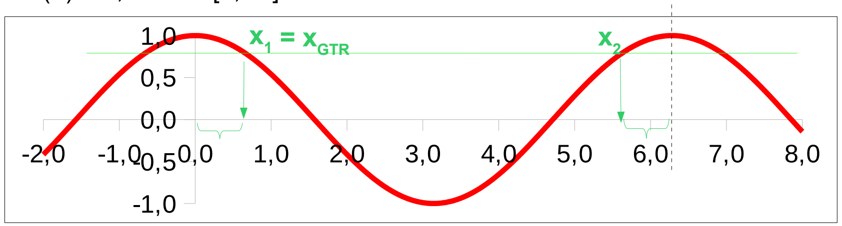
$\sin(\alpha) = -0{,}6 \quad \alpha \in [0;2\pi]$



$x_{GTR} = -0{,}643$ (Winkel im IV. Quadranten)

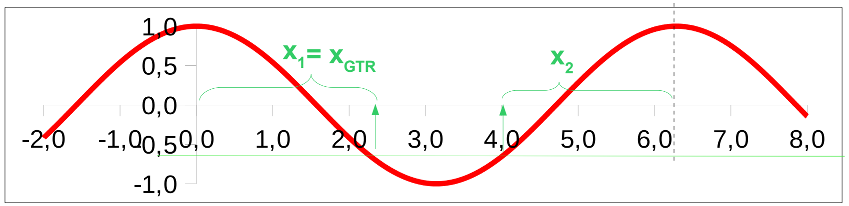
$x_1 = 3{,}14 + 0{,}643 = 3{,}785 \qquad x_2 = 6{,}28 - 0{,}643 = 5{,}639$

$\cos(\alpha) = 0{,}8 \quad \alpha \in [0;2\pi]$



$x_{GTR} = 0{,}643 \qquad x_1 = 0{,}643 \qquad x_2 = 6{,}28 - 0{,}643 = 5{,}639$

$\cos(\alpha) = -0{,}6 \quad \alpha \in [0;2\pi]$

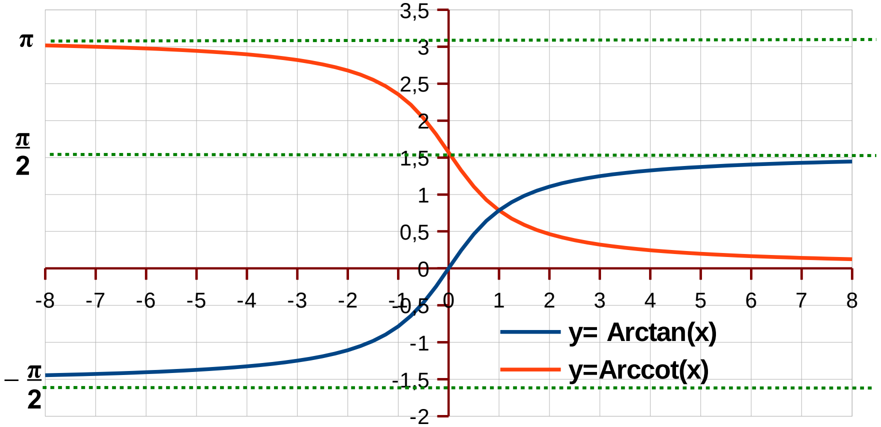


$x_{GTR} = 2{,}214$ (Winkel im II. Quadranten)

$x_1 = 2{,}214 \qquad x_2 = 6{,}28 - 2{,}214 = 4{,}068$

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Trigonometrische Funktionen	**arctan und arccot Funktion**	



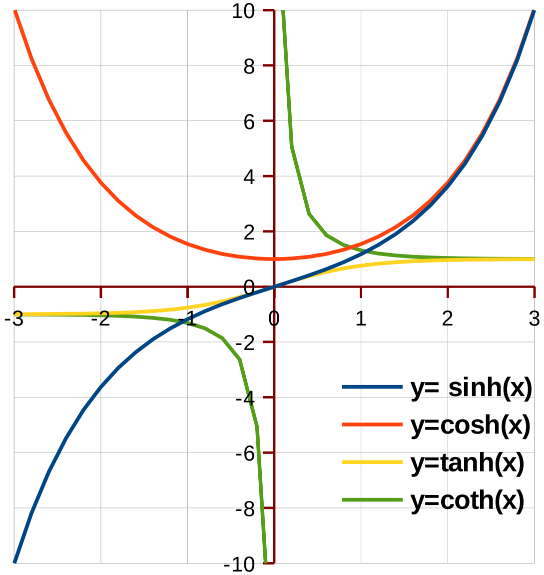
	y = arctan x	**y = arccot x**
Definitionsbereich	-∞ < x < +∞	-∞ < x < +∞
Wertebereich	- π/2 < y < + π/2	0 < y < π
Nullstelle	x = 0	
Extrema		
Wendepunkte	x = 0	x = 0
Asymptote	y= - π/2 x→ -∞ y = π/2 x→ +∞	y = 0 x→ +∞ y = π x→ -∞
Monotonie	monoton wachsend	monoton fallend
Besonderheiten		

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hyperbolische Funktionen

Hyperbolische Funktionen sinh, cosh, tanh, coth



	y = sinh x	y = cosh x	y = tanh x	y = coth x
Definition	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < 0$ $0 < x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$	$1 \leq y < +\infty$	$-1 < y < 1$	$-\infty < y < -1$ $1 < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 0$		$x = 0$	
Extrema		$x = 0$		
Wendepunkte	$x = 0$		$x = 0$	
Polstellen				$x = 0$
Asymptote			$y = -1\ x \to -\infty$ $y = -1\ x \to -\infty$	$y = 1\ x \to +\infty$ $y = 1\ x \to +\infty$
Monotonie	monoton wachsend	monoton fallend $-\infty < x < 0$ wachsend $0 < x < +\infty$	monoton wachsend	monoton fallend

Symmetrie

sinh(-x) = - sinh(x)

cosh(-x) = cosh(x)

tanh(-x) = - tanh(x)

coth(-x) = - coth(x)

Pythagoras der Hyperbolischen Funktionen

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

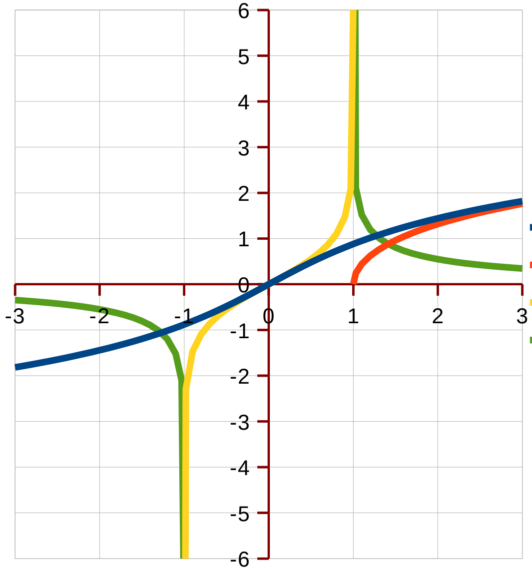
Additionstheoreme

sinh(x ± y) = sinh(x)*cosh(y) ± cosh(x)*sinh(y)

cosh(x ± y) = cosh(x)*cosh(y) ± sinh(x)*sinh(y)

Treff Lernen
Christina Strauch

Mathematik und ihre Anwendung: Jahrgangsstufe 11		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Hyperbolische Funktionen	**Area Funktionen arsinh, arcosh, artanh, arcoth (Umkehrfunktionen der Hyperbolischen Funktionen**	



	y = arsinh x	y = arcosh x	y = artanh x	y = arcoth x
Definition	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\ln(x \pm\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$1 \le x < +\infty$	$-1 < x < +1$	$-\infty < x < -1$ $1 < x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$	$0 \le y < +\infty$	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < 0$ $0 < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$	
Extrema				
Wendepunkte	$x = 0$		$x = 0$	
Polstellen			$x = -1$ $x = 1$	$x = -1$ $x = 1$
Asymptote				$y = 0 \quad x\to -\infty$ $y = 0 \quad x\to +\infty$
Monotonie	monoton wachsend	monoton wachsend	monoton wachsend	monoton fallend

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH