Aufgabe	**Lösung** / **Erläuterung**
Bruchgleichungen	Der Quotient von Termen wird meistens als Bruch geschrieben, z. B.: $(x - 1):(5 - 3x) = \frac{x - 1}{5 - 3x}$ **Als Brüche geschriebene Quotienten von Termen heißen „Bruchterme“.** Kommen Variablen im Nenner vor, so kann es bei bestimmten Einsetzungen passieren, dass der Nenner null wird. Da die Division durch null aber nicht definiert ist, muss dies unbedingt ausge–schlossen werden. Zum Beispiel darfst du in den Term ❶ nicht die 3 einsetzen, sonst aber alle rationalen Zahlen. $\frac{7}{3 - x}$ Term ❶ $\frac{14x}{6x - 2x^2}$ Term ❷ $\frac{6y}{x\,(y - 1)}$ Term ❸ $\frac{y - 1}{3x^2}$ Term ❹ Bei Bruchtermen mit einer Variablen(z.B. die Terme ❶ und ❷) bilden alle erlaubten Einsetzungen zusammen eine Teilmenge der Menge Q der rationalen Zahlen:
Definitionsmenge	**Die Definitionsmenge D eines Bruchterms ist die Menge aller Zahlen, für die der Nenner nicht null wird.** Für die Definitionsmenge D von Term ❶ gilt: D = Q \ {3}; gelesen „Q ohne 3“
Erweitern Kürzen	Multiplizierst du Zähler und Nenner von Term ❶ mit 2x, so erhältst du Term ❷. Du hast Term ❶ mit 2x **„erweitert“**. Dividierst du Zähler und Nenner von Term ❷ durch 2x, so erhältst du Term ❶. Du hast Term ❷ durch 2x **„gekürzt“**. **Einen Bruchterm kannst du erweitern, indem du Zähler und Nenner mit demselben Term multiplizierst. Einen Bruchterm kannst du kürzen, indem du Zähler und Nenner durch den selben Term dividierst.**
Gleichwertigkeit von Bruchtermen	Term ❶ ist durch Kürzen aus Term ❷ hervorgegangen. Umgekehrt ist Term ❷ durch Erweitern aus Term ❶ hervorgegangen. Term ❶ hat die Definitionsmenge D = Q \ {3}, Term ❷ hat die Definitionsmenge D = Q \{0;3}. Setzt du irgendeine von 0 und von 3 verschiedene Zahl in Term ❶ und in Term ❷ ein, so ergibt sich immer dieselbe Zahl. Auf ihrer gemeinsamen Definitionsmenge D = Q\ {0; 3} sind die beiden Terme **„gleichwertig“**. **Durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgegangene Bruchterme sind auf ihrer gemeinsamen Definitionsmenge gleichwertig.** Zwischen zwei gleichwertige Bruchterme kannst du das Gleichheitszeichen setzen, wenn du dabei die für die Einsetzung einschränkenden Bedingungen angibst, z. B. $\frac{7}{3 - x} = \frac{14x}{6x - 2x^2}$ (für $x \neq 0$; $x \neq 3$)
Gemeinsamer Nenner Hauptnenner	Term ❸ und Term ❹ kannst du nicht direkt addieren oder subtrahieren, da sie verschiedene Nenner haben. Erweiterst du aber Term ❸ mit „3x“ und Term ❹ mit „y — 1“, so haben die erweiterten Terme denselben Nenner, nämlich „3x2 (y — 1)“. Das ist der Hauptnenner von Term ❸ und Term ❹ . **Multiplizierst du alle Faktoren des einen Nenners mit allen Faktoren des anderen Nenners, so erhältst du einen „gemeinsamen Nenner“ der beiden Bruchterme. Sind dabei beide Nenner so weit wie möglich faktorisiert und berücksichtigst du die Faktoren, die in beiden Nennern vorkommen, nur einmal, so erhältst du den „Hauptnenner“. Bei Potenzen mit gleicher Basis ist dabei diejenige mit dem größten Exponenten zu berücksichtigen.** Sind die Terme ❸ und ❹ auf ihren Hauptnenner erweitert, so kannst du sie addieren: $\frac{6y}{x\,(y-1)} + \frac{y-1}{3x^2} = \frac{6y \cdot 3x}{x(y-1) \cdot 3x} + \frac{(y-1)\cdot(y-1)}{3x^2 \cdot (y-1)} = \frac{18xy}{3x^2(y-1)} + \frac{(y-1)^2}{3x^2\,(y-1)} = \frac{18xy+(y-1)^2}{3x^2(y-1)}$ (für $x \neq 0$; $y \neq 1$)
Addieren Subtrahieren	**Bruchterme mit gleichen Nennern kannst du addieren oder subtrahieren, indem du die Zähler addierst oder subtrahierst und den Nenner beibehältst. Bruchterme mit verschiedenen Nennern werden vorher auf ihren Hauptnenner erweitert.** Beim Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen kannst du genauso vorgehen wie bei Brüchen. Wichtig dabei ist, so früh wie möglich zu kürzen und zum Schluss alle für die Einsetzungen einschränkenden Bedingungen anzugeben. Für das Produkt von Term ❸ und ❹ gilt demnach: $\frac{6y}{x\,(y-1)} \cdot \frac{y-1}{3x^2} = \frac{6y \cdot (y-1)}{x(y-1) \cdot 3x^2} = \frac{6y}{x^3}$ (für $x \neq 0$; $y \neq 1$)
Multiplizieren Dividieren	**Bruchterme kannst du multiplizieren, indem du Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizierst. Durch einen Bruchterm kannst du dividieren,indem du mit seinem Kehrterm multiplizierst. Den Kehrterm erhältst du durch Vertauschen von Zähler und Nenner.**

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

1. Definitionsmenge bestimmen

1.1. Bestimme die x Werte, für die der Bruch undefiniert ist

Welche Zahlen darfst du nicht einsetzen. Bestimme die Definitionsmenge

a) $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-4}$

b) $\frac{4}{x(x-3)} - \frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{2}{x(x+1)}$

c) $\frac{1}{x(x-2)} + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{2}{x^2-4}$

a) links: $x \neq -3$; $D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$
rechts: $x \neq 4$; $D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$
alle= $x \neq -3; x \neq 4$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3;4\}$

b) links Term 1: $x \neq 0$; $x \neq 3$;
$D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$
links Term 2: $x \neq -1$; $x \neq 3$;
$D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 3\}$
rechts: $x \neq 0$; $x \neq -1$;
$D_3 = \mathbb{Q} \setminus \{-1;0\}$
alle: $x \neq -1$; $x \neq 0$; $x \neq 3$;
$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1;0;3\}$

c) links Term 1: $x \neq 0$; $x \neq 2$;
$D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{0; 2\}$
links Term 2: $x \neq -2$; $x \neq 0$;
$D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 0\}$
rechts: $x \neq -2$; $x \neq 2$;
$D_3 = \mathbb{Q} \setminus \{-2;2\}$
alle: $x \neq -2$; $x \neq 0$; $x \neq 2$;
$D = \mathbb{Q} \setminus \{-2;0;2\}$

Sollst du die Definitionsmenge einer Bruchgleichung bestimmen, dann gehe so vor:

1. Bestimme für jeden der auftretenden Bruchterme seine Definitionsmenge. Wie das geht erfährst du „Bruchterme" Abschnitt 2.
2. Bestimme die Zahlen, die in jeder Definitionsmenge von 1. vorkommen. Schließe alle die Zahlen aus, die in einer der Definitionsmengen vorkommen

2. Bruchgleichungen lösen

2.1. Bruchgleichungen, die nur einen Nenner besitzen

a) $\frac{14}{x} = 7$

b) $\frac{7}{2x} - 3 = \frac{1}{2x}$

c) $\frac{14}{x+5} = 2$

d) $\frac{4x-7}{x-3} = \frac{x+2}{x-3}$

a) $x \neq 0$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\frac{14}{x} = 7 \quad | \cdot x$
$14 = 7 \cdot x \quad | : 7$
$x = 2$; IL $= \{2\}$

b) $x \neq 0$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\frac{7}{2x} - 3 = \frac{1}{2x} \quad | \cdot 2x$
$7 - 3 \cdot 2x = 1 \quad | -7$
$-6x = -6 \quad | : -6$
$x = 1$
$x = 1$; IL $= \{1\}$

c) $x \neq -5$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-5\}$
$\frac{14}{x+5} = 2 \quad | \cdot (x+5)$
$14 = 2 \cdot (x+5)$
$14 = 2x + 10 \quad | -10$
$4 = 2x \quad | : 2$
$2 = x$
$x = 2$; IL $= \{2\}$

d) $x \neq 3$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$
$\frac{4x-7}{x-3} = \frac{x+2}{x-3} \quad | \cdot (x-3)$
$4x - 7 = x + 2$
$3x = 9$
$x = 3$
$x = 3$, aber $3 \notin D$; IL $= \{\ \}$

Kommt nur ein Nenner vor bzw. haben die auftretenden Bruchterme des selben Nenner, dann kannst du die Bruchgleichung so lösen:

1. Ermittle die Zahl, die du nicht einsetzen darfst und notiere die Definitionsmenge.
2. Multipliziere die Gleichung mit dem Nenner und kürze dann vollständig.
3. Löse die jetzt nennerfreie Gleichung nach der Variablen auf.
4. Prüfe,ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört. Nur wenn dies zutrifft, ist sie auch Lösung der Bruchgleichung.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

2.2. Bruchgleichungen mit nur zwei Brüchen

a) $\frac{224}{x} = \frac{288}{x+4}$

a) $x \neq 0;\ x \neq -4;\ D = \mathbb{Q} \setminus \{-4; 0\}$

$\frac{224}{x} = \frac{288}{x+4}$ über Kreuz multiplizieren

$224(x+4) = 288x$
$224x + 896 = 288x \quad | -224x$
$896 = 64x \quad | :64$
$14 = x$

x = 14 ; IL = { 14 }

b) $\frac{9}{x+2} = \frac{2}{x-5}$

b) $x \neq -2;\ x \neq 5;\ D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 5\}$

$\frac{9}{x+2} = \frac{2}{x-5}$ über Kreuz multiplizieren

$9 \cdot (x-5) = (x+2) \cdot 2$
$9x - 45 = 2x + 4 \quad | -2x; +45$
$7x = 49 \quad | :7$
$x = 7$

x = 7 ; IL = { 7 }

c) $\frac{6x+7}{4-3x} = \frac{2x+1}{4-x}$

c) $x \neq \frac{4}{3};\ x \neq 4;\ D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{4}{3}; 4\}$

$\frac{6x+7}{4-3x} = \frac{2x+1}{4-x}$ über Kreuz multiplizieren

$(6x+7) \cdot (4-x) = (4-3x) \cdot (2x+1)$
$24x + 28 - 6x^2 - 7x$
$= 8x + 4 - 6x^2 - 3x$

$17x + 28 = 5x + 4 \quad | -5x; -28$
$12x = -24 \quad | :12$
$x = -2$

x = –2 ; IL = { –2 }

Spezialfall: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Haben beide Seiten der Gleichung Bruchform $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$, dann kannst du sie durch „über Kreuz Multiplikation“ lösen. Gehe so vor:

1. Ermittle die Zahlen, die du nicht einsetzen darfst und notiere de Definitionsmenge
2. Multipliziere den linken Zähler mit dem rechten Nenner und den rechten Zähler mit dem linken Nenner und setze die beiden Produkte gleich. Du erhältst so eine nennerfreie Gleichung ad = bc
3. Verfahre weiter nach den Rechenvorschriften für einfache Gleichungen und löse die Gleichung nach x auf.

2.3. Allgemeine Bruchgleichungen lösen

a) $\frac{12}{x-1} + 3 = \frac{3x}{x+2}$

a) $x \neq 1;\ x \neq -2;\ D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 1\}$
HN : (x – 1)(x + 2)

$\frac{12}{x-1} + 3 = \frac{3x}{x+2} \quad | \cdot HN$

$\frac{12\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}} + 3(x-1)(x+2) =$

$\frac{3x(x-1)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} \quad |$ kürzen

$128(x+2) + 3(x-1) = 3x(x-1)$

x = –1 ; IL = { –1 }

b) $\frac{4}{x+7} + \frac{3}{x+5} = \frac{6}{(x+7)(x+5)}$

b) $x \neq -7;\ x \neq -5;\ D = \mathbb{Q} \setminus \{-7; -5\}$
HN : (x + 7)(x + 5)

$\frac{4}{x+7} + \frac{3}{x+5} = \frac{6}{(x+7)(x+5)} \quad | \cdot HN$

$\frac{4\cancel{(x+7)}(x+5)}{\cancel{(x+7)}} + \frac{3(x+7)\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x+5)}} =$

$\frac{6\cancel{(x+7)(x+5)}}{\cancel{(x+7)(x+5)}}$

$4(x+5) + 3(x+7) = 6$
$x = -5$

x = –5 , aber –5 ∉ D; IL = { }

Treten verschiedene Nenner auf, kannst du die Bruchgleichung so lösen:

1. Ermittle die Zahlen, die du nicht einsetzen darfst und notiere de Definitionsmenge. dazu kann es erforderlich sein, die auftretenden Nenner zu faktorisieren.
2. Bestimme den Hauptnenner HN der auftretenden Bruchterme. Wie das geht erfährst du in „Bruchterme“ Abschnitt 4.
3. Multipliziere die Bruchgleichung mit dem Hauptnenner und kürze dann vollständig.
4. Löse jetzt die nennerfreie Gleichung nach der Variablen auf.
5. Prüfe, ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört. Nur wenn das zutrifft, ist sie auch Lösung der Bruchgleichung.
6. mache zum Schluss zur Sicherheit noch die Probe: Setze die gefundene Lösung in die Bruchgleichung ein, rechne aus und prüfe, ob die beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen.

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

Die 6 Schritte zum Lösen von Bruchgleichungen

① Definitionsmenge bestimmen

② Hauptnenner bestimmen

③ Bruchgleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren und vollständig kürzen

④ Die jetzt nennerfreie Gleichung nach der variablen auflösen

⑤ Prüfen, ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört

⑥ Probe machen

c) $\frac{3(x+1)}{x(x-1)} - \frac{2}{x-1} = \frac{x+3}{x(x-1)}$

c) $x \neq 0$; $x \neq 1$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$

HN : $x(x-1)$

$$\frac{3(x+1)\cancel{x}\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cancel{(x-1)}} - \frac{2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = \frac{(x+3)\cancel{x}\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cancel{(x-1)}}$$

$3(x+1) - 2x = x + 3$

$3 = 3$

Diese Gleichung ist immer richtig

IL = D

d) $\frac{3}{4x^2 + 16x} + \frac{5}{4x^2 + 8x} = \frac{3}{(x+4)(x+2)}$

d) $N_1 = 4x^2 + 16 = 4x\,(x+4)$

$N_2 = 4x^2 + 8x = 4x\,(x+2)$

$N_3 = (4+x)(x+2)$

$x \neq 0$; $x \neq -4$; $x \neq -2$;

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-4; -2; 0\}$

HN : $4x(x+4)(x+2)$

$$\frac{3}{4x^2 + 16x} + \frac{5}{4x^2 + 8x} = \frac{3}{(x+4)(x+2)}$$

$$\frac{3\cdot\cancel{4x}\cancel{(x+4)}(x+2)}{\cancel{4x}\,\cancel{(x+4)}} + \frac{5\cdot\cancel{4x}(x+4)\cancel{(x+2)}}{\cancel{4x}\,\cancel{(x+2)}} = \frac{3\cdot 4x\cancel{(x+4)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x+2)}}$$

$3(x+2) - 5(x+4) = 12x$

$x = -1$; IL = { –1 }

e) $\frac{2}{x-3} + \frac{9}{x+3} = \frac{9}{x^2 - 9}$

e) $N_1 = x - 3$

$N_2 = x + 3$

$N_3 = (x+3)(x-3)$

$x \neq -3$; $x \neq 3$;

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$

HN : $(x+3)(x-3)$

$$\frac{2}{x-3} + \frac{9}{x+3} = \frac{9}{x^2 - 9}$$

$$\frac{2(x+3)(x-3)}{(x-3)} + \frac{9(x+3)(x-3)}{(x+3)} = \frac{9(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$2(x+3) - 5(x-3) = 9$

$x = 4$; IL = { 4 }

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

3. Bruchungleichungen

a) $7 > \frac{4-x}{x+2}$

a) N = x+2,

1.Fall: x+2 > 0; also **x > 2** (I)

$7 > \frac{4-x}{x+2}$ | • (x + 2)

7 (x + 2) > x - 4 I nach x auflösen

x > –3 (II)

Die Lösungsmenge sind diejenigen x, die beide Ungleichungen erfüllen:

x > –2 und x > – 3; also:

x > – 2 (I und II)

2.Fall: x+2 < 0; also x < –2 (III)

$7 > \frac{4-x}{x+2}$ | • (x + 2)

Wegen Multiplikation mit negativer Zahl dreht sich das Ungleichheits-zeichen

7 (x + 2) < x - 4 I nach x auflösen

x < –3 (IV)

Die Lösungsmenge sind diejenigen x, die beide Ungleichungen erfüllen:

x < –2 und x < –3; also:

x < – 3 (III und IV)

IL = { x | x < –1 oder x > – 2}

---

b) $\frac{3x-2}{x-1} < \frac{2x+1}{x-1}$

b) N = x – 1,

1.Fall: x – 1 > 0; also **x > 1** (I)

$\frac{3x-2}{x-1} < \frac{2x+1}{x-1}$ | • (x – 1)

3x – 2 < 2x + 1 I nach x | auflösen

x < 3 (II)

Die Lösungsmenge sind diejenigen x, die beide Ungleichungen erfüllen:

x > 2 und x < 3; also:

1 < x < 3 (I und II)

2.Fall: x – 1 < 0; also x < 1 (III)

$\frac{3x-2}{x-1} < \frac{2x+1}{x-1}$ | • (x – 1)

Wegen Multiplikation mit negativer Zahl dreht sich das Ungleichheits-zeichen

3x – 2 < 2x + 4 I nach x auflösen

x > 3 (IV)

Die Lösungsmenge sind diejenigen x, die beide Ungleichungen erfüllen:

x < 1 und x > 3; also:

keine Lösung

IL = { x | 1 < x < 3 }

---

c) $\frac{3}{x} > \frac{2}{x-2}$

c) HN = x (x – 2)

1. Fall: x (x – 2) > 0; also:

x > 0 und x > 2; oder

x < 0 ud x < 2; also

x < 0 oder x > 2 (I)

$\frac{3}{x} > \frac{2}{x-2}$ | nach x

3 (x–2) > 2x | auflösen

x > 6 (II)

(x< 0 oder x > 2) und x > 6:

x > 6 (I und II)

Sollst du eine Bruchungleichung lösen, dann gehe so vor:

1. Ermittle den Hauptnenner (HN) der auftretenden Bruchterme. Kommt wie bei den Aufgaben a) und b) nur ein Nenner (N) vor, dann ist er der Hauptnenner.

1. Fall: Nenner positiv

2. Ermittle alie Zahlen, für die der Haupt-nenner positiv wird (Bedingung 1). Ist der Hauptnenner ein Produkt wie in Aufgabe c), dann denke daran: **Ein Produkt aus zwei Faktoren ist positiv, wenn beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind.**
3. Multipliziere die Ungleichung mit dem Hauptnenner und verändere dabei das Ungleichheitszeichen nicht.
4. Löse nach der Variablen auf (Bedingung II).
5. Ermittle alle Zahlen, die sowohl Bedingung I als auch Bedingung II erfüllen.

2. Fall: Nenner negativ

6. Ermittle alle Zahlen, für die der Haupt-nenner negativ wird (Bedingung III). Ist der Hauptnenner ein Produkt wie in Aufgabe c), dann denke daran: **Ein Produkt aus zwei Faktoren ist negativ, wenn ein Faktor positiv und der andere negativ ist.**
7. Multipliziere die Ungleichung mit dem Hauptnenner und drehe das Ungleich-heitszeichen um.
8. Löse nach der Variablen auf (Bedingung IV).
9. Ermittle alle Zahlen, die sowohl Bedingung III als auch Bedingung IV erfüllen.

Beide Fälle zusammen

10. Fasse alle Zahlen von 5. und 9. zusam-men. Du erhältst so alle Lösungen der Bruchungleichung. Notiere die Lösungen als Lösungsmenge.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

2\. Fall: $x(x-2) < 0$; also
$x < 0$ und $x > 2$; oder
$x > 0$ und $x < 2$; also:
$0 < x < 2$ (III)

$$\frac{3}{x} > \frac{2}{x-2} \quad | \text{ nach } x \text{ auflösen}$$

$3(x-2) < 2x$
$x < 6$ (IV)

$0 < x < 2$ und $x < 6$; also:
$\mathbf{0 < x < 2}$ **(III und IV)**

Insgesamt:
L= {x I 0 < x < 2 oder x > 6}

4. Bruchgleichungen mit Parametern

Aufgabe a) $\frac{a+2}{x+2} = 1$

Lösung a) $x \neq -2$

$\frac{a+3}{x+2} = 1 \quad | \cdot (x+2)$

$a + 3 = x + 2 \quad | -2$
$a + 1 = x$,

Wegen $x \neq -2$ und $x = a + 1$ muss gelten: $a + 1 \neq -2$; also: $a \neq -3$
L= {a+1} für $a \neq -3$
L= { } für $a = -3$

Aufgabe b) $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = 3$

Lösung b) $x \neq 0$

$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = 3 \quad | \cdot x$

$a - b = 3x \quad | : 3$

$\frac{a-b}{3} = x$

Wegen $x \neq 0$ und $x = \frac{a-b}{3}$ muss gelten: $\frac{a-b}{3} \neq 0$; also: $a \neq b$.

L= { $\frac{a-b}{3}$ } für $a \neq b$
L= { } für $a = b$

Aufgabe c) $\frac{4}{a-x} = \frac{1}{a}$

Lösung c) $x \neq a$; $a \neq 0$

$\frac{4}{a-x} = \frac{1}{a} \quad | \cdot a(a-x)$

$4a = a - x \quad | -a$
$3a = -x \quad | : (-1)$
$-3a = x$

Wegen $x \neq a$ und $x = -3a$ muss gelten: $-3a \neq a$. Dies gilt aber sowieso wegen $a \neq 0$.
L = { – 3a } für $a \neq 0$

Aufgabe d) $\frac{x}{a-x} + \frac{x}{a+x} = \frac{a}{a^2 - x^2}$

Lösung d) $x \neq -a$; $x \neq a$

$\frac{x}{a-x} + \frac{x}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2} \quad |(a+x)(a-x)$

$x(a+x) + x(a-x) = a$
$ax + x^2 + ax - x^2 = a$
$2ax = a$

I. Für $a \neq 0$ gilt: $x = ½$
Wegen $x \neq -a$, $x \neq a$ und $x = ½$ muss gelten: $½ \neq -a$ und $½ \neq a$;
also $a \neq -½$ und $a \neq ½$
L = { ½ } für $a \neq 0$; $a \neq -½$; $a \neq ½$
L= { } für $a = -½$ oder $a = ½$

II. Für $a = 0$ ist die Gleichung
$2ax = a$ allgemein gültig, also:
L= $\mathbb{Q}$ \ { 0 } für $a = 0$

Erläuterung:

Sollst du eine Bruchgleichung lösen, die neben der Lösungsvariablen (x) noch Parameter enthält, dann gehe so vor:

1. Ermittle die Bedingungen dafür, dass kein Nenner null wird.
2. Multipliziere die Gleichung mit dem Hauptnenner und kürze.
3. Isoliere x: Bringe alle x-Glieder auf dieselbe Seite der Gleichung und alle Glieder ohne x auf die andere Seite. Fasse zusammen und klammere gegebenenfalls x aus.
4. Ist der Koeffizient (Vorfaktor) von x von null verschieden (Aufgaben a bis c), dann dividiere durch ihn. Du erhältst den Lösungsterm. Prüfe, welche einschränkenden Bedingungen sich für den Lösungsterm aus den einschränkenden Bedingungen für die Lösungsvariable ergeben.
5. Kann der Koeffizient von x für bestimmte Parameterwerte null werden (Aufgabe d), dann führe eine Fallunterscheidung durch:
   I. Koeffizient von x ≠ 0
   II. Koeffizient von x = 0
   Verfahre im ersten Fall weiter nach 4. Der zweite Fall führt auf eine allgemein gültige oder unerfüllbare Gleichung.

Merke:

* Hat eine Gleichung mehrere Variablen und soll die Gleichung nach einer der Variablen aufgelöst werden, dann heißt diese Variable "Lösungsvariable". Die übrigen Variablen heißen "Parameter", "Formvariablen" oder "Konstanten".
* Ist die Gleichung nach der Lösungsvariablen aufgelöst, so erhältst du den Lösungsterm. Dieser besitzt als Variablen die Parameter. Ersetzt du die Parameter durch dafür erlaubte Zahlen, so erhältst du Lösungen der zugehörigen Gleichung.