Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen

Funktionen vom Typ $y = ax^2 + bx + c$ nennt man **quadratische Funktionen**, weil die Variable x als höchste Potenz den Wert 2 hat.

Das Kurvenbild quadratischer Funktionen bezeichnet man als **Parabel**.

Jede Parabel besitzt einen **Scheitelpunkt**, in dem ein Wechsel zwischen fallender und steigender Kurve stattfindet.
Der Scheitelpunkt ist entweder der tiefste Punkt der Parabel, oder der höchste Punkt.

Eine Parabel besitzt mit der x – Achse zwei Schnittpunkte, einen Schnittpunkt, oder keinen Schnittpunkt.

Mit der y – Achse besitzt die Parabel **immer genau einen** Schnittpunkt.

Die x – Werte, die für eine Funktion erlaubt sind, dh. für diese Werte ist ein y – Wert berechenbar, nennt man **Definitionsbereich** der Funktion.
Für quadratische Funktionen sind alle x – Werte erlaubt. Es gibt keine x – Werte die bei der Berechnung von y auf unberechenbare Ausdrücke führen.
x nennt man die **unabhängige Variable**, die x – Achse bezeichnet man als **Abszisse**.

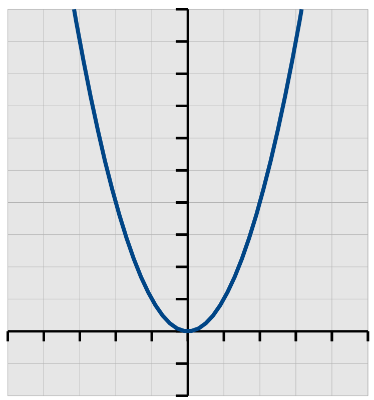
Die y – Werte, die ein Funktionsausdruck annehmen kann bezeichnet man als **Wertevorrat** oder **Wertebereich**.
Der Wertevorrat einer quadratischen Funktion geht vom y – Wert des Scheitels bis $+\infty$, oder von $-\infty$ bis zum y – Wert des Scheitels.
y nennt man die **abhängige Variable**, die y – Achse bezeichnet man als **Ordinate**.

Die Normalparabel $y = x^2$

Die einfachste Form einer quadratischen Funktion ist die Normalparabel, die die Funktionsgleichung $y = x^2$ besitzt.

Eigenschaften der Funktion

Definitionsbereich :	alle $x \in \Re$
Scheitelpunkt :	S(0 | 0)
Nullstelle :	$x_0 = 0$
Monotonie :	für $x \leq 0$ monoton fallend für $x \geq 0$ monoton wachsend
Symmetrieachse :	y – Achse
Wertebereich :	$x \in \Re$ mit $y \geq 0$



$y = x^2$

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: **Quadratische Funktionen**

Normalparabel mit zusätzlicher Konstante

$$y = x^2 + q$$

Eigenschaften der Funktion

Definitionsbereich: alle $x \in \Re$

Scheitelpunkt: S (0; q)
– Der Scheitelpunkt liegt auf der y – Achse
– der y – Wert des Scheitels ist gleich q

Monotonie: für $x < 0$ monoton fallend
für $x > 0$ monoton steigend

Symmetrieachse: Ordinatenachse (y-Achse)

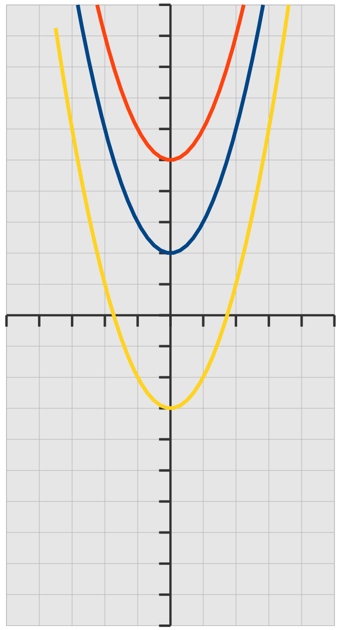
Wertebereich: $y \in \Re$, $y > q$ Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, die größer als q sind.

Lage des Scheitelpunktes S(0; q) bezüglich der x-Achse:

$q > 0$ => S liegt oberhalb der x – Achse
$q = 0$ => S liegt auf der x – Achse (= Normalparabel)
$q < 0$ => S liegt unterhalb der x – Achse

Nullstellen:

$q < 0$ => genau 2 Nullstellen
$q = 0$ => genau eine Nullstelle
$q > 0$ => keine Nullstelle



$y = x^2 + 2$
$y = x^2 + 5$
$y = x^2 – 3$

Normalparabel mit zusätzlichem Linearglied

$$y = x^2 + px$$

Eigenschaften der Funktion

Definitionsbereich: alle $x \in \Re$

Scheitelpunkt: S (– p/2 ; – p^2 /4)

Monotonie: für $x < – p/2$ monoton fallend
für $x > – p/2$ monoton steigend

Symmetrieachse: Ordinatenachse: $x = – p/2$

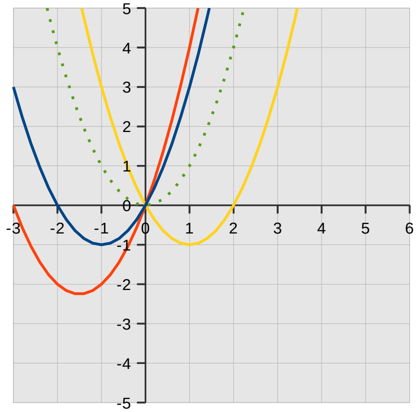
Wertebereich: $y \in \Re$, $y > – p^2/4$

Lage des Scheitelpunktes S (– p/2 ; – p^2 /4) bezüglich der x-Achse:

$q > 0$ => S liegt oberhalb der x – Achse
$q = 0$ => = Normalparabel
$q < 0$ => S liegt unterhalb der x – Achse

Nullstellen:

1. Nullstelle: $x = 0$
2. Nullstelle: $x = – p$



$y = x^2 + 2x$
$y = x^2 + 3x$
$y = x^2 – 2x$

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Funktionen

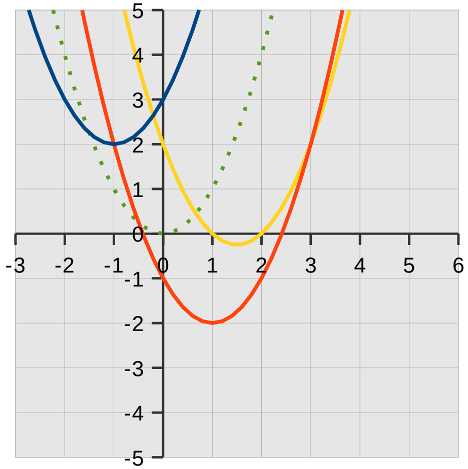
Normalparabel in allgemeiner Form

$$\boxed{y = x^2 + px + q}$$

Aussagen über eine solche Parabel können nur sehr allgemein gehalten werden. Die Werte von p und q beeinflussen das Aussehen der Parabel.

Eigenschaften der Funktion

Definitionsbereich:	alle $x \in \Re$
Scheitelpunkt:	wird in den x – und y – Koordinaten von p und q beeinflusst, Berechnung erfolgt später
Monotonie:	bis zum Scheitel monoton fallend ab dem Scheitel monoton steigend
Symmetrieachse:	eine Parallele zur y – Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft.
Wertebereich:	$y \in \Re$, Menge der reellen Zahlen, die größer als die y – Koordinate des Scheitels sind



$y = x^2 + 2x + 3$
$y = x^2 – 2x – 1$
$y = x^2 – 3x + 2$

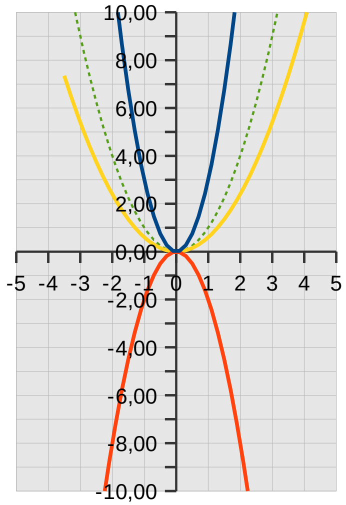
Gestreckte / gestauchte Normalparabel

$$\boxed{y = a x^2}$$

Bei dieser Funktion handelt es sich um gestreckte oder gestauchte Normalparabel, wobei das Vorzeichen von a die Öffnung der Parabel bestimmt. Der Scheitel liegt im Punkt S(0| 0) .

a > 0 : Parabel nach oben geöffnet, W = [0, ∞[
Scheitel ist das Minimum
a < 0 : Parabel nach unten geöffnet, W =] - ∞, 0]
Scheitel ist das Maximum

|a| < 1 : Parabel gestaucht, breiter als Normalparabel
|a| = 1 : Normalparabel
|a| > 1 : Parabel gestreckt, enger als Normalparabel



$y = 3x^2$
$y = – 2x^2$
$y = 0,6x^2$
$y = x^2$

Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Funktionen

Die allgemeine quadratische Funktion

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

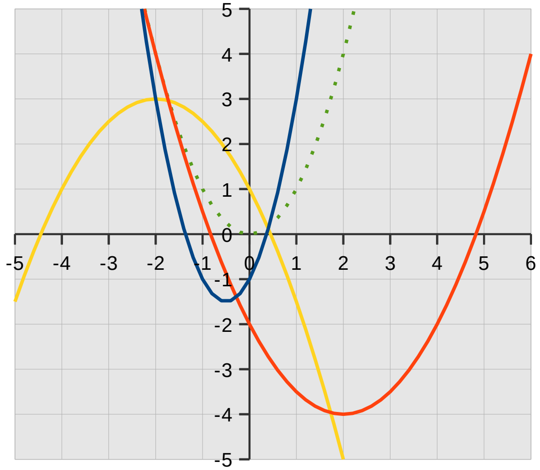
Treten alle möglichen Veränderungen gleichzeitig auf, so spricht man von der allgemeinen Form einer Parabel. In diesen Fällen schreibt man für den Wert p den Buchstaben b und für den Wert q den Buchstaben c.

p und q werden nur benutzt, wenn es sich um einen verschobene Normalparabel handelt, also a = 1 ist. Damit lässt sich auch formal unterscheiden, was für eine Parabel gemeint ist.

Jede Funktion f: $x \rightarrow a x^2 + b x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $D_f = \mathbb{R}$, nennt man eine **quadratische Funktion**.
Der Graph von f ist eine **Parabel**.

- $a x^2$: quadratisches Glied im Term
- $b x$: lineares Glied im Term
- c : konstantes Glied im Term

Die zugehörige Parabel schneidet die y-Achse bei c.



$y = 2x^2 + 2x – 1$
$y = ½x^2 – 2x – 2$
$y = –½x^2 – 2x + 1$

Nullstellenbestimmung (y = 0)

Nullstellen sind die x – Werte, bei denen der y – Wert = 0 ist. In der Funktionsgleichung wird dazu der linke Wert von y gleich 0 gesetzt, und die Gleichung nach x aufgelöst. Der dazu notwendige Rechenweg wird im Abschnitt „Quadratische Gleichungen“ beschrieben.
Hier sollen nur einige einfache Spezialfälle behandelt werden.

Normalparabel $y = x^2 + px + q$

Kein Absolutglied q=0 $\quad y = x^2 + px$

x ausklammern: $\quad x^2 + px = x (x + p) = 0$

In dieser Formel erscheint ein Produkt, das 0 werden soll. Es sind die x – Werte gesucht, bei denen das eintritt. Ein Produkt kann aber nur 0 werden, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren gleich Null ist. Damit hat die Gleichung nur eine Lösung, wenn entweder

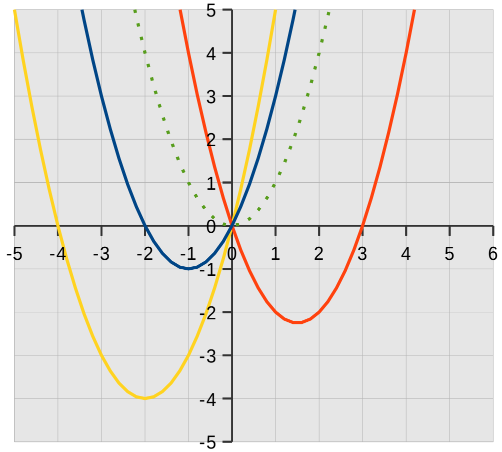
$x = 0$ oder $x + p = 0$

Damit sind die beiden x – Werte, bei denen dieses Gleichheit eintritt

$x_1 = 0$ und $x_2 = – p$

Eine solche Parabel hat immer zwei Nullstellen.

p = 0 ist Normalparabel.



$y = x^2 + 2x$	p = + 2
$y = x^2 – 3x$	p = – 3
$y = x^2 + 4x$	p = + 4

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Funktionen

Kein Linearglied p = 0 $y = x^2 + q$

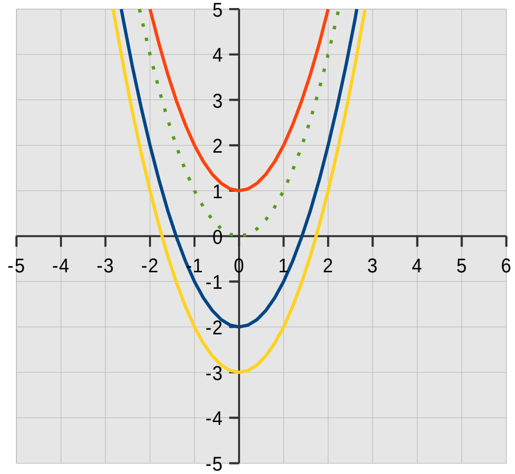
$x^2 + q = 0$
$x^2 = -q$
$x_1 = +\sqrt{-q}$
$x_2 = -\sqrt{-q}$

Da man aus negativen Zahlen keine Quadratwurzel ziehen kann, sind die beiden Gleichungen nur lösbar, wenn q selbst negativ ist, da dann – q eine positive Zahl ist.

Damit besitzen nur Funktionen der Art $y = x^2 - 4$ oder $y = x^2 - 25$ Nullstellen, während Funktionen der Art $y = x^2 + 4$ und $y = x^2 + 25$ keine Nullstellen besitzen.

Eine solche Parabel hat für q < 0 zwei Nullstellen und für q > 0 keine Nullstelle.

q = 0 ist Normalparabel.



$y = x^2 - 2$ q = – 2
$y = x^2 + 1$ q = + 1
$y = x^2 - 3$ q = – 3

$x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = +\sqrt{2}$
keine Nullstelle
$x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = +\sqrt{3}$

Allgemeine Parabel $y = ax^2 + bx + c$

Kein Absolutglied c=0 $y = a x^2 + bx$

x ausklammern: z.B. $ax^2 + bx = x (ax + b) = 0$
=> $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$

Kein Linearglied b=0 $y = a x^2 + c$

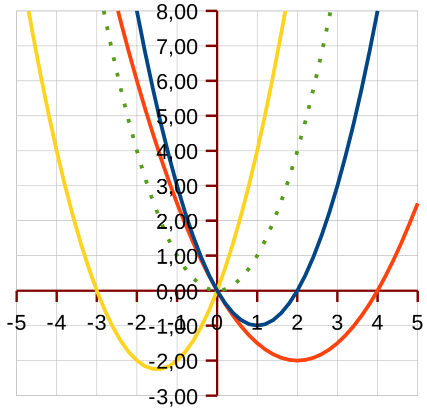
Entweder 3. Binomische Formel $ax^2 - c = 0$ mit
$x_1 = +\sqrt{(c/a)}$ $x_2 = -\sqrt{(c/a)}$
oder, wenn $ax^2 + c = 0$, dann gibt es keine Lösung

Faktorisiert $y = a (x - x_1)(x-x_2)$

x_1 : Nullstelle der Parabel
x_2 : Nullstelle der Parabel

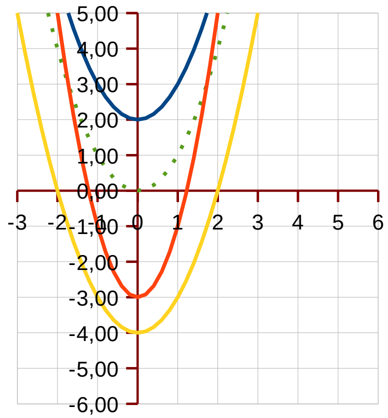
Scheitel auf x-Achse $y = a(x-d)^2$ $d \in \mathbb{R}$,

$x_1 = x_2 = d$: Doppelte Nullstelle, Parabel berührt die x-Achse, kein schneiden.



$y = x^2$
$y = x^2 - 2x = x(x-2)$
$y = ½ x^2 - 2x = ½x(x-4)$
$y = x^2 + 3x = x(x+3)$

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$
$x_1 = 0$; $x_2 = 4$
$x_1 = 0$; $x_2 = -3$



$y = x^2$
$y = x^2 + 2$
$y = x^2 - 3$
$y = x^2 - 4$

keine Nullstellen
$x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = +\sqrt{3}$
$x_1 = -\sqrt{4}$; $x_2 = -\sqrt{4}$

Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Funktionen

Die Scheitelgleichung

$$y - e = a\,(x - d)^2$$

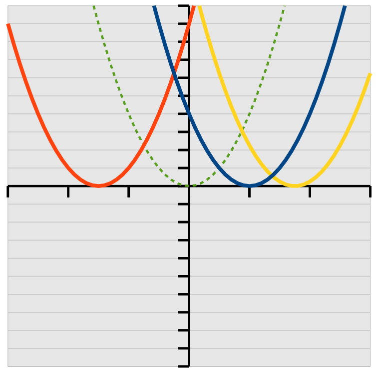
Der Scheitel ist unmittelbar ablesbar

In x-Richtung verschobene Parabel $y = (x-d)^2 \quad d \in \mathbb{R}$,

Bei dieser Funktion handelt es sich um eine entlang der x-Achse verschobene Normalparabel.
Bei dieser Funktion liegt der Scheitel in S(**d|0**)

d > 0 : Verschiebung nach oben, W = [0, ∞[

d < 0 : Verschiebung nach unten, W = [0, ∞[



$y = (x-2)^2$
$y = (x+3)^2$
$y = (x-3{,}5)^2$
$y = x^2$

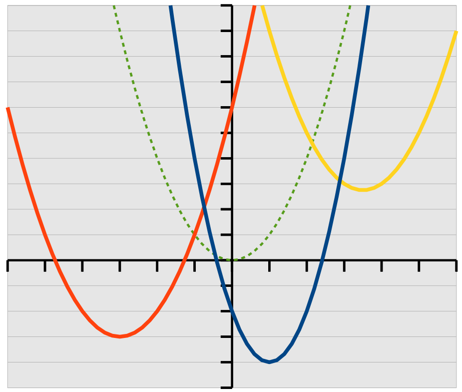
Verschobene Normalparabel $y - e = (x - d)^2$

(ACHTUNG! Die Schreibweise unterscheidet sich eventuell von der in der offiziellen Formelsammlung !
Bei dieser Funktion handelt es sich um eine entlang der x–Achse und der y–Achse verschobene Normalparabel.

Bei dieser Funktion liegt der Scheitel in **S(+d|+e)**
(Die beiden Minuszeichen gehören zur Formel. Die Scheitelkoordinaten sind in diesem Fall immer positiv, sonst sind die Vorzeichenänderungen zu berücksichtigen)

=> $y + 3 = (x - 4)^2$ => $y - (-3) = (x - 4)^2$ S(– 3, 4)
$y + 1 = (x + 5)^2$ => $y - (-1) = (x - (-4))^2$ S(– 1, –4)
$y - 2 = (x + 3)^2$ => $y - 1 = (x - (-3))^2$ S(2, –3)

Durch Ausmultiplizieren der Klammer erhält man die Parabelgleichung:
$y = x^2 - 2dx + d^2 + c$



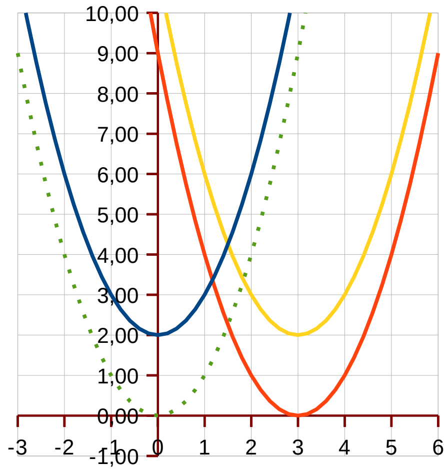
$y + 3 = (x+3)^2$
$y - 2{,}75 = (x-3{,}5)^2$
$y = x^2$
$y + 6 = (x-2)^2$
$= x^2 - 4x + 4 - 6$
$= x^2 - 4x - 2$

Schnittpunkt mit der y-Achse (x = 0)

$y = a * d^2 + e$

Schnittpunkt mit der x-Achse (y = 0)

$x_{1/2} = d \pm \sqrt{-e/a}$ Die Nullstellen liegen symmetrisch zum x-Wert des Scheitels und existieren nur, wenn – e/a einen positiven Wert ergibt.



$y = x^2$
$y - 2 = x^2$
$y = (x - 3)^2$
$y - 2 = (x - 3)^2$

Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Funktionen

Geometrische Interpretation von $y - e = a(x - d)^2$

Setze $y' = y - e$ und $x' = x - d$ so erhält man eine neue Parabel $\mathbf{y' = ax'^2}$. das ist eine Parabel in einem x'-y'-Koordinatensystem, bei dem der Scheitel im Ursprung des neuen Koordinatensystems liegt. Die Gleichungen $y' = y - e$ und $x' = x - d$ geben die Transformation der alten Koordinaten in die neuen Koordinaten an. Das nutzt man bei der Scheitelbestimmung aus: Im neuen Koordinatensysetm $y' = y - e$, $x' = x - d$ sind im Scheitel x' und y' gleich 0, also $0 = y - e$ und $0 = x - d$ oder $y=e$ und $x=d$. Das heißt:

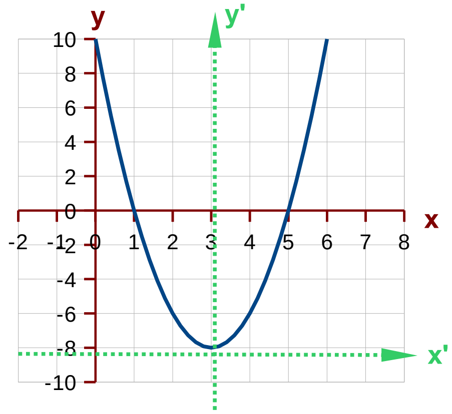
Der Koordinatenursprung (0|0)des neuen x'-y'-Koordinatensystems hat im alten x-y-Koorddinatensystem die Position (d|e).

Dieser Ursprung im neuen Koordinatensystem ist aber gleich die Scheitelposition, die dann im alten Koordinatensystem auch S(d|e) ist.
Diese Vorgehensweise liefert immer die richtigen Vorzeichen !

Die Darstellung des verschobenen Koordinatensystem kann man sich auch zunutze machen, wenn man aus einem Scheitelpunkt die Parabelgleichung bestimmen soll. Gesucht ist die Gleichung der Parabel, deren Scheitel im Punkt $S(x_s|y_s)$ liegt:

- Im x-y-Koordinatensystem ist der Scheitel bei den Koordinaten: $x = x_s$ und $y = y_s$
- Im (noch unbekannten) x'-y' Koordinatensystem liegt der Scheitel im Koordinatenursprung: $x - x_s = 0$; $y - y_s = 0$.
- Damit ist die Umrechnung der beiden Koordinatensysteme mit $x' = x - x_s$ und $y' = y - y_s$ gegeben.
- Im x'-y' Koordinatensystem ist die Parabelgleichung: $\mathbf{y' = ax'^2}$
- Für y' und x' werden die oben erstellten Umrechnungsformeln eingesetzt: $y - y_s = a(x - x_s)^2$

Musterbeispiele



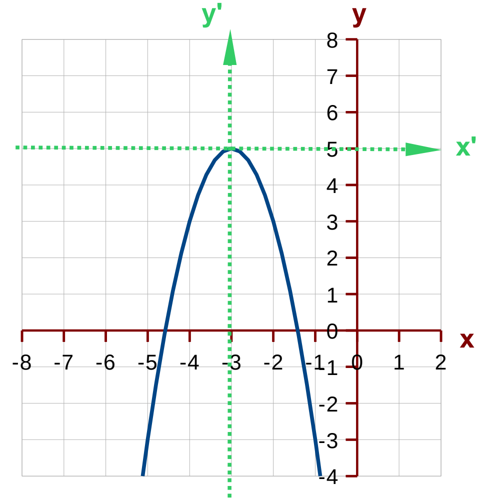
Kurve im x-y System
$y = (x - 3)^2 - 8$
$y + 8 = (x - 3)^2$

$y' = y + 8$
$x' = x - 3$

Koordinatenursprung:
$y' = 0$; $x' = 0$ liefert
$y = -8$; $x = 3$

Kurve im x'-y' System
$y' = x'^2$

Gesucht ist die Gleichung einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Öffnungsfaktor 2 und dem Scheitel im Punkt (-3|5)



$y = 5$
$x = -3$

x'-y' -Koordinatenursprung:
$0 = y - 5$
$0 = x + 3$

x'-y'- Koordinatenssystem mit obigen Ursprung:
$y' = y - 5$
$x' = x + 3$

Parabelgleichung im x'-y' System:
$y' = -2x'^2$

Parabelgleichung im x-y System:
$y - 5 = -2(x + 3)^2$

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Quadratische Funktionen	Bestimmung der Nullstellen (y = 0)	

$$y - c = a(x - d)^2$$
$$0 - c = a(x - d)^2$$
$$-c/a = (x - d)^2$$
$$\sqrt{-c/a} = |x - d|$$

1. Lösung

$$\sqrt{-c/a} = x - d$$
$$\mathbf{x_1 = d + \sqrt{-c/a}}$$

2. Lösung

$$\sqrt{-c/a} = -(x - d)$$
$$\sqrt{-c/a} = -x + d$$
$$\mathbf{x_2 = d - \sqrt{-c/a}}$$

ACHTUNG! da es sich bei -c/a um eine Quadratwurzel handelt, darf das Minuszeichen nicht vor die Wurzel gezogen werden.

Schlußfolgerungen aus den Formeln:

- Ist die y-Koordinate des Scheitels größer 0 (c>0) und die Parabel nach oben geöffnet (a>0), gibt es keine Nullstellen, da der Wurzelausdruck negativ ist.
- Ist die y-Koordinate des Scheitels kleiner 0 (c<0) und die Parabel nach unten geöffnet (a<0), gibt es keine Nullstellen.
- Ist die y-Koordinate des Scheitels größer 0 (c>0) und die Parabel nach unten geöffnet (a<0), gibt es Nullstellen, da der Wurzelausdruck positiv ist.
- Ist die y-Koordinate des Scheitels kleiner 0 (c<0) und die Parabel nach oben geöffnet (a>0), gibt es Nullstellen, da der Wurzelausdruck positiv ist.
  (Diese Schlußfolgerungen sind geometrisch sofort einleuchtend)

- Die Nullstellen befinden sich symmetrisch zur x-Koordinate des Scheitels (d), nämlich im Abstand $\pm \sqrt{-c/a}$
- Da immer $a \neq 0$ sein muss fallen für c = 0(y-Koordinate des Scheitels) die beiden Nullstellen zusammen, der Scheitelpunkt ist Nullstelle, da die y-Koordinate des Scheitels gleich 0 ist (c=0)

Zweite Lösungsmöglichkeit ist das Ausmultiplizieren des quadratischen Terms, wobei unter Berücksichtigung der Binomischen Formeln eine quadratische Gleichung der Form $y = ax^2+bx+c$ entsteht, die mit der quadratischen Lösungsformel bearbeitet werden kann.

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Funktionen

Scheitelbestimmung

Kein Absolutglied c=0 $y = a x^2 + bx$

x ausklammern: z.B. $ax^2 + bx = x(ax+b) = 0 \rightarrow$ Damit erhält man die Nullstellen $x_1 = 0$, die andere $x_2 = -b/a$.
Die x-Koordinate des Scheitels ist der Mittelwert $x_S = (x_1+x_2)/2 = -(b/2a)$.
Die y-Koordinate des Scheitels ist aus der Funktionsgleichung zu bestimmen oder über quadratische Ergänzung $y_S = -(b^2/4a)$

Kein Lineargliedb b=0 $y = a x^2 + c$

Der Scheitel liegt auf der y-Achse mit $x_S = 0$ $y_S = c$

Scheitel auf x-Achse $y = a(x-d)^2$ $d \in \mathbb{R}$,

$x_1 = d$: Doppelte Nullstelle, Parabel berührt die x-Achse, kein schneiden. Die Nullstelle ist gleichzeitig Scheitel mit $x_S = d$; $y_S = 0$

Allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$

Unter einer quadratischen Ergänzung versteht man das Einfügen eines geeigneten Summanden, so dass ein vollständiges Quadrat entsteht, auf das die Binomische Formel anwendbar ist. Das Ergänzungsglied muss wieder subtrahiert werden:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Konstanten Wert c nach links

$$y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

Halbiere den Koeffizienten vor x und addiere das Quadrat dieser Zahl auf beiden Seiten

$$y - c + \frac{b^2}{4a} = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Der Ausgleich erfolgt nur mit $\frac{b^2}{4a}$ da bei der Ergänzung in der Klammer noch ein a vor der Klammer zu berücksichtigen ist, 1. Binomische Formel auf die Klammer anwenden.

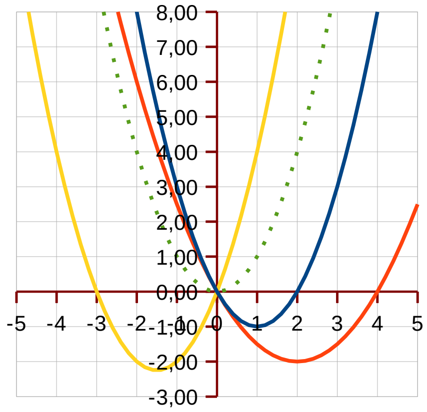
$$y - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$$

Wandle den Ausdruck so um, dass nach dem x und dem y ein Minuszeichen zu stehen kommt.

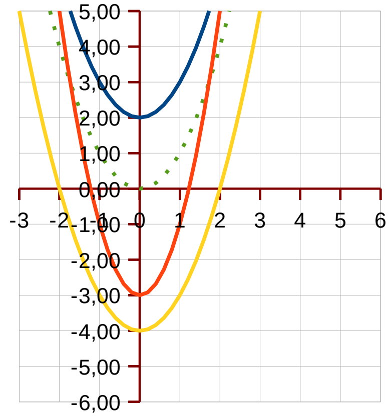
In den Klammern stehen die Scheitelgleichung der Parabel.

$$\boxed{S\left(-\frac{b}{2a};\ c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

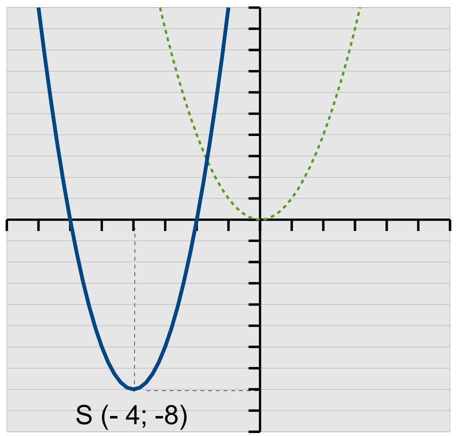
Musterbeispiele



$y = x^2$
$y = x^2 - 2x = x(x-2)$ => $x_s = 1$
$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x = \frac{1}{2}x(x-4)$ => $x_s = 2$
$y = x^2 + 3x = x(x+3)$ => $x_s = -1{,}5$



$y = x^2$
$y = x^2 + 2$ => $y_s = 2$
$y = x^2 - 3$ => $y_s = -3$
$y = x^2 - 4$ => $y_s = -4$



Beispiel:

$y = 2x^2 + 16x + 24$
$y = 2(x^2 + 8x) + 24$
$y = 2(x^2 + 8x + 16) - 32 + 24$
$y = 2(x + 4)^2 - 8$
$y = 2(x - (-4))^2 - 8$

=> S (- 4; -8)

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Funktionen

Schnelle Bestimmung der x-Koordinate des Scheitels

Vernachlässigen des Absolutgliedes $y = a x^2 + bx$

Auf der vorhergehenden Seite, unter „Faktorisierte Form“ wurde gezeigt, dass die x-Koordinate des Scheitels genau in der Mitte der beiden Nullstelle liegt. Diese Tatsache kann man sich zunutze machen, indem man von der allgemeinen Parabelgleichung das Absolutglied ignoriert. Damit erhält man eine neue Parabel, die parallel zu y-Achse verschoben ist, aber keine Verschiebung in x-Richtung. Von dieser verschobenen Parabel werden die Nullstelle bestimmt:

$y = ax^2 + bx$

$0 = ax^2 + bx$

$0 = x\left(x + \frac{b}{a}\right)$

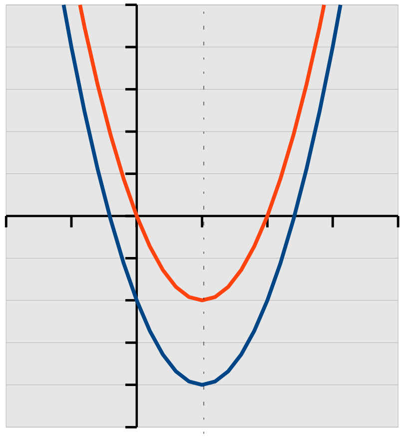
Nach der Regel, dass ein Produkt nur dann Null sein kann, wenn mindestens einer ihrer Faktoren Null ist, erhält man die Nullstellen der verschobenen Parabel mit:

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$

Eine Nullstelle dieser Parabel ist immer 0, die andere immer -b/a. Da die x-Koordinate des Scheitels genau in der Mitte der Nullstellen liegt, ist ihr Wert:

$$\boxed{x_s = -\frac{b}{2a}}$$

Die Nullstellen dieser verschobenen Parabel haben nichts mit den Nullstellen der Ausgangsparabel gemeinsam. Lediglich die x-Koordinate des Scheitels liegt genau in der Mitte der Nullstellen bei beiden Parabeln.



Originalparabel:
$y = 2x^2 – 4x – 2$
(blau gezeichnet)

Verschobene Parabel ohne Absolutglied:
$y = 2x^2 – 4x$
(rot gezeichnet)

Man sieht deutlich, dass die beiden Parabeln verschiedene Nullstellen haben, aber die x-Koordinate von beiden Scheiteln die gleiche ist.

Dieser Lösungsweg funktioniert auch für Parabeln, die selbst keine Nullstellen haben.

Ausblick auf erste Ableitung $y' = 2 a x + b$

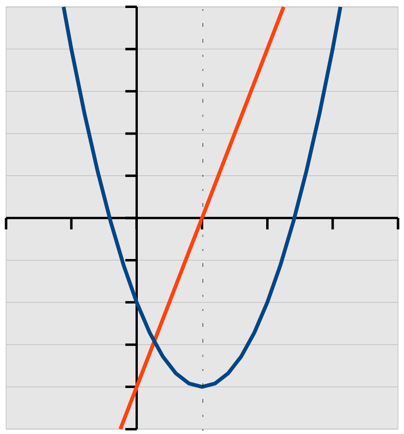
In der 11. Klasse wird die sogenannte 1.Ableitung behandelt.

1.)Der Wert der 1. Ableitung an einer Stelle x gibt den Tangentenanstieg der Kurve in diesem Punkt x an.
   Die Berechnung der 1. Ableitung, bezeichnet mit y' , für die Parabel $y=ax^2+bx+c$ ist $y' = 2ax +b$
2.) Der Scheitel einer Parabel ist ein sogenannte Extrempunkt, bei dem der Tangentenanstieg gleich Null ist (Tangente läuft parallel zur x-Achse).

$y' = 2 a x + b = 0$

$$\boxed{x_s = -\frac{b}{2a}}$$

In beiden Fällen ist die y-Koordinate über die Funktionsgleichung zu ermitteln.



Originalparabel:
$y = 2x^2 – 4x – 2$
(blau gezeichnet)

Erste Ableitung der Funktion
$y' = 4x – 4$
(rot gezeichnet)
Diese Funktion ist eine Gerade und man sieht deutlich, dass diese Gerade die x-Achse dort schneidet (y der ersten Ableitung =0, d.h. Tangentenanstieg der Kurve =0), wo die Parabel ihren Scheitel hat.

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Quadratische Funktionen

Gesetze und Regeln

Die Faktorisierte Form

$$y = a(x-x_0)(x-x_1)$$

Der Nullstellen sind unmittelbar ablesbar

Die faktorisierte Form ist die Umsetzung des Wurzelsatzes von Vieta auf quadratische Funktionen.

x_0 und x_1 sind die **Nullstellen** der quadratischen Funktion, die Schnittpunkte der zugehörigen Parabel mit der x-Achse.
Man erhält die Nullstellen aus der **Normalform**, indem man den Funktionsterm gleich 0 setzt und die Lösungen der so entstandenen quadratischen Gleichung bestimmt.

Bestimmung des Scheitels

Die x-Koordinate des Scheitels liegt in der Mitte zwischen x_0 und x_1

$$x_s = \frac{x_0 + x_1}{2} \qquad y_s = a\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0\right)\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1\right)$$

$$y_s = a\left(\frac{-x_0 + x_1}{2}\right)\left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)$$

$$y_s = -\frac{a}{4}(x_0 - x_1)^2$$

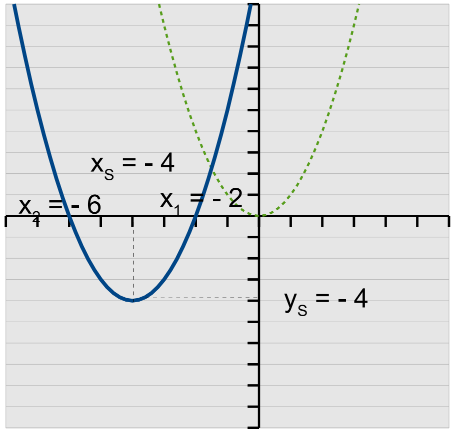
Schnittpunkt mit der y-Achse (x = 0)

$$x = 0 \quad => \quad y = a * x_0 * x_1$$

Musterbeispiele

Bestimme die faktorisierte Form aus der Normalform

Dazu ist es notwendig, die Formel für die quadratische Gleichung zu benutzen, mit der die Nullstellen berechnet werden können.



$$y = x^2 + 8x + 12$$
$$0 = x^2 + 8x + 12$$
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$
$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16 - 12}$$
$$x_1 = -4 + 2 = -2$$
$$x_2 = -4 - 2 = -6$$

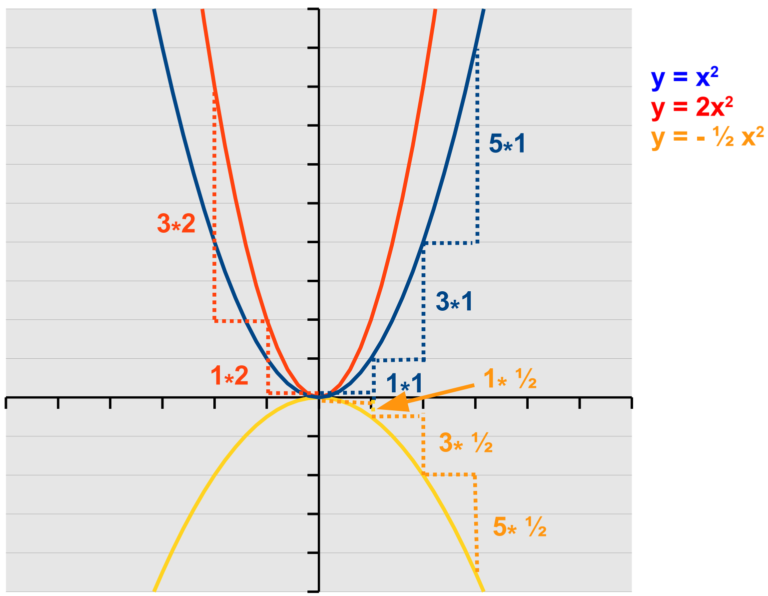
$$\boxed{y = (x + 2)(x + 6)}$$

$$x_s = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

$$y_s = -¼\,(-2 - (-6))^2$$
$$= -¼\,(4)^2$$
$$= -¼ * 16$$
$$= -4$$

Schnittpunkt mit y-Achse: y = 1 * (-2) (-6) = 12
(vergleiche mit Ausgangsgleichung)

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Quadratische Funktionen	**Zeichnen von Parabeln** Mit dem Scheitel beginnen, vom Scheitel 1 nach rechts (bzw. links) und 1 · a nach oben (oder unten), von dort noch 1 nach rechts (bzw. links) und 3 · a nach oben (oder unten), von dort noch 1 nach rechts (bzw. links) und 5 · a nach oben (oder unten) usw.	

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen haben die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$ in dieser allgemeinen Form können die Gleichungen graphisch als Bestimmung des Schnittpunktes mit der x-Achse gedeutet werden (nämlich y =0).
Eine quadratische Gleichung hat immer zwei Lösungen, wobei diese Lösungen nicht notwendig reelle Zahlen sein müssen.

Reinquadratische Gleichungen $ax^2 + c = 0$

Eine reinquadratische Gleichung besteht nur aus einem quadratischen Glied A und einem Absolutglied C. Die Berechnung ist trivial, man eliminiert x und erhält als Lösung:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Die beiden Lösungen sind natürlich nur dann reelle Zahlen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel ein positives Vorzeichen hat und das trifft nur dass zu, wen in der obigen Gleichung $c < 0$.

Beispiel:

$$0 = 3x^2 - 12$$
$$12 = 3x^2$$
$$\boxed{x_1 = 4} \qquad \boxed{x_2 = -4}$$

Beispiel:

$$0 = 3x^2 + 12$$
$$-12 = 3x^2$$
$$-4 = x^2$$

Keine Lösung: Der Scheitel liegt über der x-Achse und die Parabel ist nach oben geöffnet.

Quadratische Gleichungen mit Lineargleid $ax^2 + bx = 0$

Eine quadratische Gleichung mit Lineargleid hat immer zwei reelle Lösungen. Aus $(ax + b)x = 0$ folgt, da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn mindestens einer der beiden Faktoren 0 ist:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Beispiel:

$$0 = 5x^2 - 30x$$
$$12 = x(5x - 30)$$
$$\boxed{x_1 = 0} \qquad \boxed{x_2 = 6}$$

Allgemeine quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 + px + q = 0$

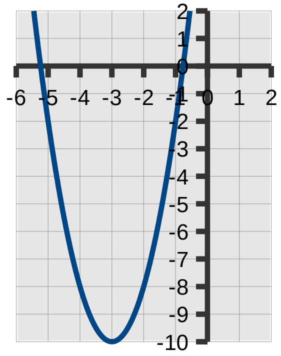
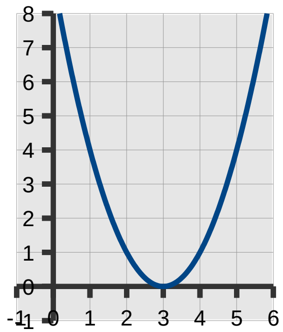
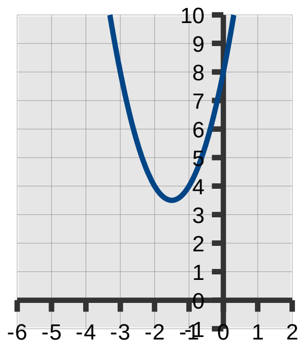
Indem man die erste Gleichung durch a dividiert, erhält man die zweite Gleichung. Deshalb ist es eigentlich ausreichend, für die zweite Gleichung einen Lösungsweg anzugeben. Der Koeffizient vor x^2 muss positiv sein. Steht da ein Minuszeichen, ist durch -1 zu dividieren.

$$0 = x^2 + px + q$$
$$-q = x^2 + px$$
$$-q + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$
$$\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$
$$x_1 + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$
$$x_2 + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

Die rechte Seite mit einem Summanden erweitern, der die rechte Seite zu einem vollständigen Quadrat ergänzt. Um Gleichheit zu sichern, ist der gleiche Summand auf der linken Seite zu ergänzen.

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}} \qquad \boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

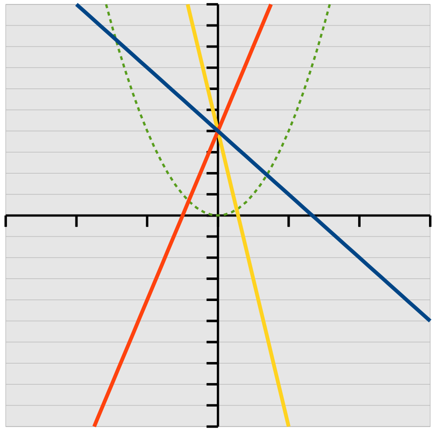
Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Quadratische Gleichungen	Für die Lösung ist der Ausdruck in der Wurzel entscheidend: $(\frac{p^2}{4} - q) > 0$: Es existieren zwei reelle Lösungen	 $y = 2x^2 + 12x + 8$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}$ $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-4}$ $x_1 = -3 + \sqrt{5} \approx -0{,}76$ $x_2 = -3 - \sqrt{5} \approx -5{,}23$
	$(\frac{p^2}{4} - q) = 0$: Es existiert eine reelle Doppellösung (Bei diese Lösung liegt der Scheitel der Parabel, auf der x-Achse) Eine solche Lösung existiert genau dann, wenn sich die rechte Seite zu einem vollständigen Quadrat ergänzen lässt.	 $y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}$ $x_{1/2} = +3 \pm \sqrt{9-9}$ $x_{1/2} = +3$
	$(\frac{p^2}{4} - q) < 0$: Es existieren **keine** reellen Lösungen, da die Wurzel aus einer negativen Zahl zu berechnen ist. Die Lösungen liegen im Bereich der komplexen Zahlen. Geometrisch bedeutet das, da der Koeffizient vor dem quadratischen Glied positiv ist (nämlich = 1), ist die Parabel nach oben geöffnet und der Scheitel liegt über der x-Achse Schlußfolgerung aus der Betrachtung der Diskriminante: Wenn $q < 0$ ist, gibt es immer zwei Lösungen Wenn $q > 0$, nur, wenn $p^2/4 > q$ oder $\|p\| > 2 \cdot \sqrt{q}$	 $y = 2x^2 + 6x + 8$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}$ $x_{1/2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}5 - 8}$ $x_{1/2} = -1{,}5 \pm \sqrt{-5{,}75}$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Quadratische Gleichungen	**Weitere geometrische Interpretation**	

Die Lösung einer quadratischen Gleichung $y = x^2 + px + q$ bedeutet auch, suche den Schnittpunkt der beiden Kurven $y = x^2$ und $y = -px - q$

1. Die beiden Kurven haben immer einen Schnittpunkt, wenn $q < 0$ ist, da dann für $x = 0$ der Funktionswert der Parabel $=0$ ist und der Funktionswert für die Gerade > 0.

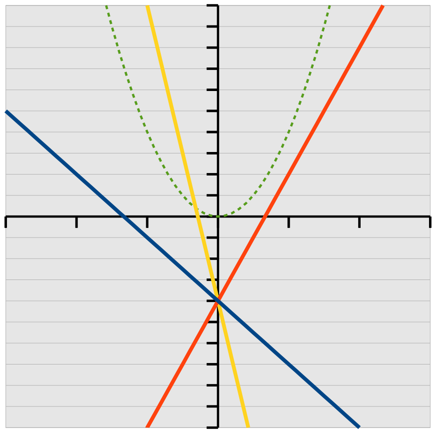


2. Wenn $q > 0$ ist, liegt für $x=0$ der Funktionswert der Geraden unter dem Funktionswert der Parabel. Ein Schnittpunkt kann nur dann zustande kommen, wenn die Gerade hinreichend „steil“ ansteigt, damit sie die Parabel noch schneiden kann. Je kleiner q wird, desto größer muss der Anstieg p der Geraden werden.

Auch hier spielt die Diskriminante eine Rolle. Damit ein Schnittpunkt entstehen kann muss $p^2/4 - q > 0$ oder $p^2/4 > q$ sein, woraus

$|p| > 2*\sqrt{q}$

folgt:



q = 4
$y = 1{,}5\,x - 4$
$y = 3x - 4$
$y = -7x - 4$

Schlußfolgerung:
Der Wert des Anstiegs der Geraden p muss mit positiven oder negativen Werten größer als $2\sqrt{q}$ sein, damit es einen Schnittpunkt gibt. Im angegebenen Beispiel größer als 4.

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Gleichungen

Schnittpunkte $y = ax^2 + bx + c$ mit Gerade $y = mx + n$

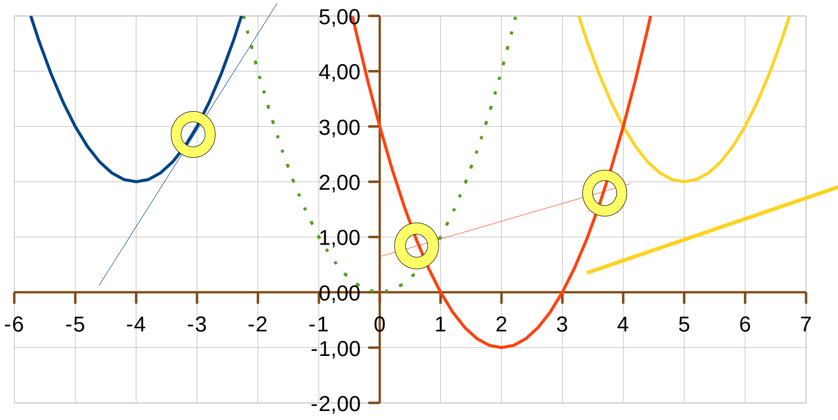
Für einen Schnittpunkt zweier Funktionen, müssen die Koordinaten des Schnittpunktes beide Funktionsgleichungen erfüllen:

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$

Die Zusammenfassung dieser Gleichung führt zu einer Nullstellenbestimmung der Differenzfunktion. Nur der geometrische Interpretation ist eine andere:

$$ax^2 + x(b-m) + c - n = 0$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist größer 0:
Es gibt zwei Schnittpunkte von Gerade und Parabel.
Der Ausdruck der Wurzel ist kleiner als 0:
Es gibt keinen Schnittpunkt zwischen Gerade und Parabel
Der Ausdruck unter der Wurzel ist =0
Die Gerade berührt die Kurve, sie ist Tangente an einem Kurvenpunkt



Tangente an $y = ax^2 + bx + c$ im Punkt $P(x_0,y_0)$

Die Tangente an einen Punkt der Parabel ist der Schnittpunkt mit einer Geraden, die aber nur einen Schnittpunkt mit der Parabel haben darf.

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$

Die Zusammenfassung dieser Gleichung führt zu einer Nullstellenbestimmung der Differenzfunktion. Nur die geometrische Interpretation ist eine andere:

$$ax^2 + x(b-m) + c - n = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{b-m}{2a} \pm \sqrt{\frac{(b-m)^2}{4a^2} - \frac{c-n}{a}}$$

Das ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten m und n, die nur durch weitere Informationen lösbar ist:

1. Der x-Wert der Doppellösung muss gleich dem x-Wert des vorgegebenen Punktes sein.

   $x_0 = -\frac{b-m}{2a}$ => daraus ist m zu bestimmen: $m = 2ax_0 + b$

2. Der Ausdruck unter der Wurzel muß 0 sein, sonst gibt es keine Doppellösung. Dazu reicht es, wenn nach der Hauptnennerbildung der Zähler 0 ist.

   $(b-m)^2 – 4a(c-n) = 0$ => daraus ist n zu bestimmen, da m jetzt bekannt ist

   $(b-m)^2 – 4a(c-n) = (2ax_0)^2 – 4a(c-n) = 4a^2x_0^2 – 4a(c-n) = 0$

   $a^2x_0^2 = a(c - n)$

   $n = c - ax_0^2$

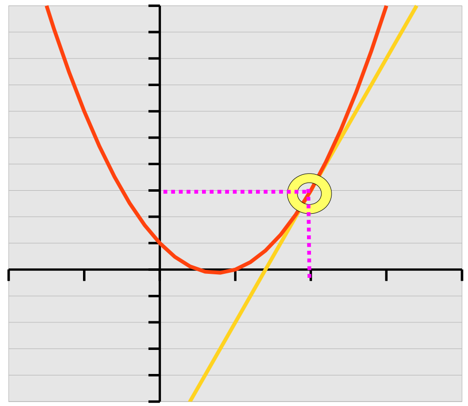
Gesucht ist an die Parabel $y = 2x^2-3x+1$ die Tangente im Punkt P(2,3).

$$2x^2 - 3x + 1 = mx + n$$

$$2x^2 - (3+m)x + 1 - n = 0$$

$$x^2 - \frac{3+m}{2}x + \frac{1-n}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{3+m}{4} \pm \sqrt{\frac{(3+m)^2}{16} - \frac{1-n}{2}}$$



$2 = \frac{3+m}{4}$ => $\underline{\underline{m = 5}}$

y = 2x² – 3x +1
y = 5x – 7

$(3+m)^2 – 8(1-n) = 8^2 – 8 + 8n = 56 + 8n = 0$ => $56 = -8n$

$\underline{\underline{-7 = n}}$

$$\boxed{y = mx + n = 5x - 7}$$

Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Gleichungen

Gesetze und Regeln

Tangente an $y = ax^2 + bx + c$ parallel zu $y = mx + n$

Um die Tangente an eine Parabel zu finden, die parallel zu einer vorgegebenen Geraden ist, muss die Gleichung für die Steigung der Tangente nach x_0 aufgelöst werden, da in diesem Fall m bekannt ist und x_0 gesucht.

aus $m = 2ax_0 + b$ folgt durch Umstellen der Gleichung $x_0 = -\dfrac{b-m}{2a}$

Musterbeispiel:

Gesucht ist die Tangente an die Parabel $y = 2x^2 - 3x + 1$ die parallel zu $y = 5x - 7$ ist.

$m = 5$
$a = 2$
$b = -3$

$$x_0 = -\frac{(-3) - 5}{2 * 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Tangente an $y = ax^2 + bx + c$ und durch einen Punkt $P_0(x_0|y_0)$ außerhalb der Parabel.

Von der Geraden ist ein Punkt bekannt und die Tatsache, dass der Geradenanstieg ein Tangentenanstieg an die Parabel ist. Damit ist die Punkt-Richtungs-Formel für die Gerade zu benutzen:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \qquad m = 2ax_1 + b$$

x_1 ist der gesuchte Punkt auf der Parabel

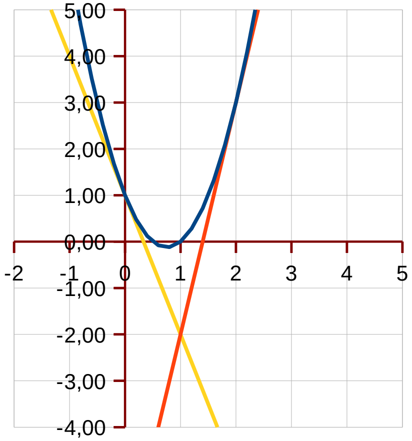
Dieser Punkt x_1 muss außer der Parabelgleichung auch die Tangentengleichung erfüllen.

$$\frac{ax_1^2 + bx_1 + c - y_0}{x_1 - x_0} = 2ax_1 + b$$

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c - y_0 &= (2ax_1 + b)(x_1 - x_0) \\ &= 2ax_1^2 - 2ax_0x_1 + bx_1 - bx_0 \\ 0 &= ax_1^2 - 2ax_0 x_1 - (c - y_0 + bx_0) \\ 0 &= x_1^2 - 2x_0 x_1 - (c - y_0 + bx_0)/a \end{aligned}$$

Musterbeispiel:

Gesucht ist die Tangente an die Parabel $y = 2x^2 - 3x + 1$ die durch den Punkt $P_0(1,-2)$ verläuft.



$$\frac{2x_1^2 - 3x_1 + 1 - (-2)}{x_1 - 1} = 2*2x_1 - 3$$

$$= x^2 - 2\, x_0\, x - (c - y_0 + b\, x_0)/a$$

$$0 = x^2 - 2 * 1\, x - (1 - (-2) + (-3)*1)/2$$
$$0 = x^2 - 2x + 0$$

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1}$$
$x_1 = 0$
$x_2 = 2$

Zwei Geraden durch den Punkt $P_0(1,-2)$ sind in den Punkten $x_1=0$ und $x_2=2$ Tangenten an die Parabel.(In der obigen Grafik als gelbe und rote Linie eingezeichnet.)

Normale von $y = ax^2 + bx + c$ im Punkt $P(x_0,y_0)$

Die Normale ist eine Gerade, die senkrecht zur Tangente verläuft. Damit ist vom Tangentenanstieg der senkrechte Anstieg zu bestimmen. Der Anstieg der senkrechten Geraden ist der negative reziproke Wert des ursprünglichen Geradenanstiegs. Dann ist Punkt-Richtungs-Gleichung für Geraden anzuwenden

Tangentenanstieg
$m = 2ax_1 + b$

Normalenanstieg
$$m = -\frac{1}{2ax_1 + b}$$

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Quadratische Gleichungen

Schnittpunkte $y = ax^2 + bx + c$ mit Parabel $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Für einen Schnittpunkt zweier Funktionen, müssen die Koordinaten des Schnittpunktes beide Funktionsgleichungen erfüllen:

$$ax^2 + bx + c = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Die Zusammenfassung dieser Gleichung führt wieder zu einer Nullstellenbestimmung, diesmal aber der Differenzfunktion:

Zwei Werte sind genau dann gleich, wenn ihre Differenz 0 ist

Nur der geometrische Interpretation ist eine andere. Die Nullstellen der Differenzfunktion sind gleichzeitig die Schnittstellen der Ausgangsfunktion:

$$(a - a_2)x^2 + (b - b_2)x + c - c_2 = 0$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist größer 0:
Es gibt zwei Schnittpunkte Parabel.
Der Ausdruck der Wurzel ist kleiner als 0:
Es gibt keinen Schnittpunkt der Parabeln.
Der Ausdruck unter der Wurzel ist =0
Die beiden Kurven berühren sich.
Erste Schlußfolgerungen:
Wenn $a = a_2$ ist, dann gibt es genau einen Schnittpunkt, da aus der oberen quadratischen Gleichung eine lineare Gleichung entsteht.
Wenn dazu auch noch $b = b_2$, dann gibt es keinen Schnittpunkt, es sei denn, $c = c_2$, dann sind aber beide Funktionen identisch.

$y = x^2+7x+9$
$y = x^2 - 4x + 5$

$y = x^2+7x+9$
$y = 0,33x^2 + 2x + 4$

$y = x^2+7x+9$
$y = -2x^2 - 16x - 26$

$y = x^2+7x+15$
$y = -1/2\ x^2 - 3x - 3$

Intensivkurs – Mathematik: Quadratische Funktionen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionskurven

Spezielle Parameter-Wirkungen: Verschiebungen und Streckungen

Allgemeine Form mit Verschiebe- und Streckungsparameter, ausgehend von einer Funktion f:

$$h(x) = a * f(b * (x + c)) + d$$

Man unterscheide dabei den”außen“ stehenden Faktor a und Summanden d, die den Graphen in y-Richtung verändern, und den ”innen“ bei x stehenden Faktor b und Summanden c.

+d bewirkt, dass alle y-Werte um d größer werden, d. h. der Funktionsgraph wird um d nach oben verschoben (bzw. bei negativem d nach unten).

a bewirkt, dass die y-Werte mit a multipliziert werden, d. h. der Funktionsgraph wird in y-Richtung um den Faktor a gestreckt (bzw. bei |a| < 1 gestaucht), bei negativem a zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

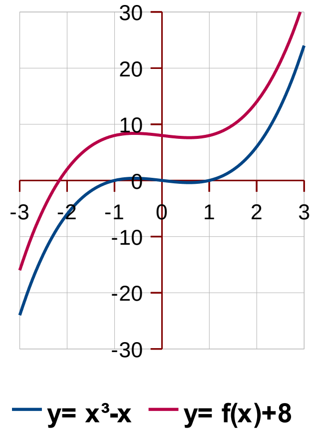
b bewirkt, dass man für x jetzt das 1/b -fache einsetzen muss, um das gleiche Ergebnis zu erhalten wie ohne diesen Faktor, d. h. der Graph wird in x-Richtung um den Faktor 1/b gestaucht, bei negativem b zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.

+c bewirkt, dass für x jetzt um c weniger eingesetzt werden muss, um das gleiche Ergebnis zu erhalten wie ohne diesen Summanden, d. h. der Graph wird in x-Richtung um c nach links verschoben (bzw. bei negativem c nach rechts).

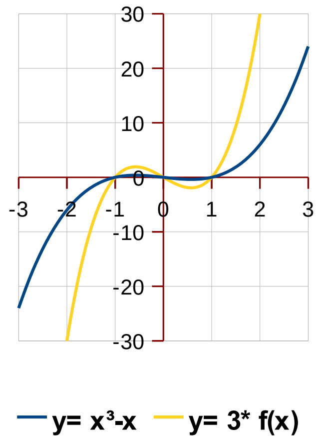
Musterbeispiele

$f(x) = x^3 – x$

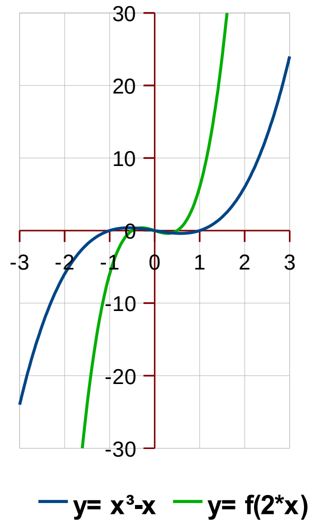
$h_1(x) = f(x) + 8$



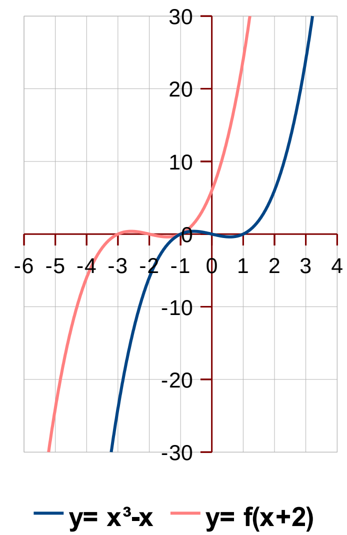
$h_2(x) = 3*f(x)$



$h_3(x) = f(2x)$



$h_4(x) = f(x+2)$



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH