Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Potenzgleichungen

Potenzgleichungen

Eine Potenzgleichung ist Gleichung, die aus nur einer Potenz einer Unbekannten besteht (meist x genannt), und einer Konstanten (also aus einer Zahl). x.B $x^4 = 64$

Die folgende Gleichung ist deshalb keine Potenzgleichung, denn es kommen zwei (unterschiedliche) Potenzen von x vor: $x^2 + x^4 = 64$

Typ 1: Potenzgleichungen mit geradem Exponenten

- Potenzgleichungen mit geradem Exponenten haben nur dann einen Lösung, wenn die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung ein positives Vorzeichen hat. $x^4 = 64$
- Für gerade Wurzelexponenten gilt

$$\textbf{aus}\quad x^n = b \quad \textbf{folgt:}\quad \sqrt[n]{x} = |\sqrt[n]{b}\,|$$

Der Betrag ist deshalb notwendig, weil bei geradem Exponenten auch das Minuszeichen zu einem Pluszeichen wird. Ohne den Betrag würden diese Lösungen entfallen.

- Ist die Konstante auf der rechten Seite eine negative Zahl, hat die Potenzgleichung nie eine Lösung, weil eine gerade Potenz niemals negativ werden kann.

Typ 2: Potenzgleichungen mit ungeradem Exponenten

- Potenzgleichungen mit ungeradem Exponenten haben immer eine Lösung, gleichgültig, welches Vorzeichen die Konstante auf der rechten Seite hat
- Für positives Vorzeichen der Konstanten ist das klar.
- Ist die Konstante auf der rechten Seite eine negative Zahl, kann die Potenzgleichung nach dem Potenzgesetz umgeschrieben werden:

$$\textbf{aus}\quad x^n = -b \quad \textbf{folgt:}\quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-1}\ \sqrt[n]{b}$$

damit ist der zweite Wurzelausdruck wieder eine positive Zahl und $\sqrt[n]{-1}$ ist für alle ungeraden n gleich -1

Typ 3: Potenzgleichungen mit rationalem Exponenten

Potenzgleichungen mit rationalem Exponenten müssen mit dem Kehrwert des Bruches, der als Exponent steht potenziert werden.

$$x^{\frac{2}{3}} = 2$$

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \sqrt[2]{2^3}$$

Schrittweises Vorgehen:

$$x^{\frac{2}{3}} = 2 \quad |\ ^3$$

$$x^{\frac{2}{1}} = 2^3 \quad |\ ^{\frac{1}{2}}$$

$$x^{\frac{1}{1}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung bei der in mindestens einem Radikanten (Ausdruck unter der Wurzel) die Unbekannte x vorkommt. Ziel bei Wurzelgleichungen ist es, die Wurzeln wegzubekommen, unter denen die Variable x steht. das erreicht man durch Potenzieren, wobei die Binomischen Formeln zu beachten sind, da oft Summanden auftreten und der Wurzelexponent nicht nur eine Quadratwurzel sein muss.
Beim Potenzieren mit geraden Potenzen können zusätzliche Lösungen entstehen, die keine Lösung der Ausgangsaufgabe sind. Deshalb ist unbedingt die Probe zu machen !
Potenzieren ist keine äquivalente Umformung !

Unlösbare Fälle

Es gibt einige Typen von Wurzelgleichungen, bei denen man von vornherein sagen kann, dass sie unlösbar sind. das betrifft in erster Linie Aufgaben mit geradem Wurzelexponent und negativen Vorzeichen. Dort braucht man mit dem Rechnen gar nicht erst zu beginnen.

Musterbeispiele:

$\sqrt{x+1} = -2$

$\sqrt{-x^2} = 4$

Diese Gleichung ist lösbar:
$\sqrt[3]{x+1} = -2$

Typ 1: Grundform $\sqrt{x} = b$

Einfache Wurzelgleichungen muss man nur potenzieren um die Lösung zu ermitteln. Wenn nur ein Wurzelausdruck auftritt muss man diese Wurzel auf eine Seite der Gleichung bringen und dann die Gleichung potenzieren. Damit entfällt die Wurzel und man erhält eine normal lösbare Gleichung.

Musterbeispiele:

$\sqrt{x} = 2 \quad |\ ^2$
$x = 2^2$
$x = 4$

$\sqrt{x} + 3 = 5 \quad |\ -3$
$\sqrt{x} = 2 \quad |\ ^2$
$x = 4$

Typ 2: Zwei Wurzelausdrücke mit gleichem Wurzelexponenten $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Wenn sich die beiden Wurzelausdrücke eliminieren lassen führt ein Potenzieren wieder zur Lösung.

Musterbeispiele:

$\sqrt{2x + 2} = \sqrt{3x - 1} \quad |\ ^2$
$2x + 2 = 3x - 1$
$x = 3$
Probe:
$\sqrt{8} = \sqrt{8}$
=> Lösung

$\sqrt[2]{4x - 3} = \sqrt[3]{2x + 5} \quad |\ ^6$
$(4x-3)^3 = (2x + 5)^2$ 1. Wurzelgesetz

$4^3x^3 - 3 * 4^2x^2 * 3 + 3 * 4x * 3^2 - 3^3 = 2^2x^2 + 2 * 2x * 5 + 5^2$ Binomische Formeln
(die farbig gekennzeichneten Faktoren kommen aus den Binomischen Formeln und sind die Werte des Pascalschen Dreiecks). Mit welchem Aufwand die entstandene Gleichung zu lösen oder nicht zu lösen ist spielt zunächst keine Rolle!

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Wurzel-gleichungen	**Typ 3: Zwei Wurzelausdrücke bei dem der eine Wurzelexponent ein Vielfaches des anderen ist** $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n*m]{g(x)}$ Das Potenzieren der Gleichung erfolgt mit dem größeren Wurzelexponenten. Dadurch entsteht auf der Seite des kleineren Wurzelexponenten eine Potenz des Ausdrucks, der unter der Wurzel steht.(1. Wurzelgesetz)	$\sqrt[2]{x + 1} = \sqrt[6]{7x + 1}$ $\quad \mid ^6$ $(x + 1)^3 = 7x + 1$ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 7x + 1$ $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$ $x(x^2+3x-4) = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -4$ Probe: => $x_1 = 0$ echte Lösung $x_2 = 1$: linke Seite: $\sqrt[2]{2}$; rechte Seite: $\sqrt[6]{8} = 2^{3/6} = 2^{1/2} = \sqrt[2]{2}$ echte Lösung $x_3 = -4$ keine Lösung, negative Wurzelausdrücke bei geradem Wurzelexponent
	Typ 4: Zwei Wurzelausdrücke bei dem der eine Wurzelexponent kein Vielfaches des anderen ist $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$ In diesem Fall sollte man die Wurzelausdrücke in Potenzen umschreiben. Anschließend ist mit dem Hauptnenner der beiden Brüche, die im Exponenten stehen zu potenzieren.	$\sqrt[9]{x - 1} = \sqrt[6]{2x - 3}$ $(x - 1)^{1/9} = (2x - 3)^{1/6}$ $\quad \mid$ Hauptnenner der Brüche ist 18 $(x - 1)^{2/18} = (2x - 3)^{3/18}$ $\quad \mid ^{18}$ (Potenzieren mit 18) $(x - 1)^2 = (2x - 3)^3$ $x^2 - 2 \ast x^2 + 1 = 2^3x^3 - 3 \ast 2^2x^2 \ast 3 + 3 \ast 2x \ast 3^2 - 3^3$ $x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ $0 = 8x^3 - 37x^2 + 56x - 28$ Durch zielgerichtetes Probieren erhält man eine Lösung $x_1 = 2$. Polynomdivision und Quadratische Lösungsformeln führen zu negativen Wurzelausdrücken. Probe: => $x_1 = 2$: $\sqrt[9]{1} = \sqrt[6]{1}$; jede Wurzel aus 1 ist wieder 1 => echte Lösung
	Typ 5: Verschachtelte Wurzeln und Absolutglied Wurzel auf einer Seite der Gleichung eliminieren und das erste Mal potenzieren. Die noch vorhandene zweite Wurzel wieder auf einer Seite eliminieren und das zweite Mal potenzieren. Beim Potenzieren von Summen oder Differenzen sind die Binomischen Formeln zu berücksichtigen.	$\sqrt{6 - \sqrt{x + 1}} - 2 = 0$ $\quad \mid +2$ $\sqrt{6 - \sqrt{x + 1}} = 2$ $\quad \mid ^2$ $6 - \sqrt{x + 1} = 4$ $\quad \mid -4 \quad \mid +\sqrt{x + 1}$ $2 = \sqrt{x + 1}$ $\quad \mid ^2$ $4 = x + 1$ $3 = x$ Probe: $\sqrt{6 - \sqrt{3 + 1}} - 2 = \sqrt{6 - \sqrt{4}} - 2 = \sqrt{6 - 2} - 2 =$ $= \sqrt{4} - 2 = 0$ => echte Lösung

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wurzelgleichungen

Typ 6: Zwei Quadratwurzeln und Absolutglied

Für diese Gleichungen gibt es zwei Möglichkeiten:
1. Auf jede der Gleichungsseiten wird eine Wurzel gebracht und dann quadriert
2. Auf einer Seite stehen beide Wurzeln, auf der anderen Seite das Absolutglied.

Beim Quadrieren ist die Binomische Formel zu berücksichtigen. In beiden Fällen einsteht wieder eine Wurzel. Diese ist dann auf eine Seite zu eliminieren und die Gleichung noch einmal zu Quadrieren.

$\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} - 1 = 0 \quad | + \sqrt{x+2}$

$\sqrt{x+7} - 1 = \sqrt{x+2} \quad |^2$

$(\sqrt{x+7} - 1)^2 = (\sqrt{x+2})^2$

$x + 7 - 2*\sqrt{x+7} + 1 = x + 2$

$-2*\sqrt{x+7} = -6 \quad | : -2$

$\sqrt{x+7} = 3 \quad |^2$

$x + 7 = 9$

$x = 2$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} - 1 = 0 \quad | + 1$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} = 1 \quad |^2$

$(\sqrt{x+7})^2 - 2*\sqrt{(x+7)(x+2)} + (\sqrt{x+2})^2 = 1$

$x + 7 - 2*\sqrt{(x+7)(x+2)} + x + 2 = 1$

$-2*\sqrt{(x+7)(x+2)} = -2x - 8 \quad | : -2$

$\sqrt{(x+7)(x+2)} = x + 4 \quad |^2$

$(x+7)(x+2) = x2 + 8x + 16$

$x^2 + 9x + 14 = x^2 + 8x + 16 \quad | -8x \quad | -14$

$x = 2$

Probe:
$\sqrt{2+7} - \sqrt{2+2} - 1 = \sqrt{9} - \sqrt{4} - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$
=> echte Lösung

Typ 6: Lösen durch Substitution

Wenn die Wurzelexponenten nicht von vornherein gleich sind, dann müssen sie Vielfache sein, damit mit dem 1. Wurzelgesetz gearbeitet werden kann. Der entscheidende Schlüssel ist, dass sich Wurzeln und Potenzen mit dem gleichen Exponenten aufheben. Ist das nicht der Fall muss mit den Methoden, die unter Typ 4 beschrieben sind, versucht werden, gleiche Wurzelexponenten zu erzeugen.

$\sqrt[2]{4x - 12} + \sqrt[4]{x - 3} - 3 = 0$

$\sqrt[2]{4(x - 3)} + \sqrt[4]{x - 3} - 3 = 0$

$\sqrt[2]{4} * \sqrt[2]{(x - 3)} + \sqrt[4]{x - 3} - 3 = 0$

$2*\left(\sqrt[2]{\sqrt[2]{(x - 3)}}\right)^2 + \sqrt[4]{x - 3} - 3 = 0$

$2*\left(\sqrt[4]{(x - 3)}\right)^2 + \sqrt[4]{x - 3} - 3 = 0 \quad | \quad \sqrt[4]{x - 3} = z$

$2*z^2 + z - 3 = 0$

Quadratische Gleichung mit Lösung: $z = 1$ und $z = -3/2$
Nur $z = 1$ führt zu einer Lösung, da $\sqrt[4]{x - 3} = -3/2$ keine Lösung hat.
$\sqrt[4]{x - 3} = 1 \Rightarrow x = 4$
Probe:
$\sqrt[2]{16 - 12} + \sqrt[4]{4 - 3} - 3 = \sqrt[2]{4} + \sqrt[4]{1} - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$
=> echte Lösung

http://www.mathematik.net/homepage/lehrgang.htm

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Exponential-gleichungen

Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen die gesuchte Variable im Exponenten vorkommt.Zur Lösung von Exponentialgleichungen sind Kenntnisse der Potenz- und Logarithmengesetze notwendig. Zentrales Ziel ist es immer, die Variable aus dem Exponenten auf die normale Ebene zu bringen. Es sind nur relativ einfache Aufgaben überhaupt lösbar.Grundsätzlich kann man sagen, dass Exponentialgleichungen mit zwei Summanden immer lösbar sind. Exponentialgleichungen mit drei Summanden sind nur in Sonerfällen lösbar

Typ 1: Grundform $a^x = b$

1. Lösungsvariante:
(mit Hilfe der Definition und des Basiswechsels)

$a^x = b$ | Definition

$\log_a b = x$ | Basiswechsel

$$x = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

2. Lösungsvariante:
(Logarithmieren und Log-Gesetz anwenden)

$a^x = b$ | log10

$\log_{10} a^x = \log_{10} b$ | 2. Log-Gesetz

$x * \log_{10} a = \log_{10} b$ | $: \log_{10} a$

$$x = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

Prinzipiell ist die Rechenoperation "Logarithmieren" eine Äquivalenzumformung, solange man nur positive Zahlen logarithmiert, denn es gilt: a= b <=> log a = log b. Solange man nur positive Zahlen logarithmiert, gibt es also keine Probleme.
Das gleiche trifft zu, wenn beide Seiten negativ sind. Dann kann mit (-1) multipliziert werden und es entstehen positive Ausdrücke.

Problemfall:
Eine Seite negativ, eine Seite unklar ! $(-2)^x = -8$
Auch hier darf man nicht logarithmieren, denn wir wissen ja nicht, ob die linke Seite positiv oder negativ ist.
Wir müssen hier den gleichen Trick anwenden, der schon bei "Potenzgleichungen" angewendet wurde. Wir potenzieren beide Seiten mit 2. Wir müssen nur beachten, daß wir dann am Ende der Rechnung die Probe machen müssen, denn Potenzieren mit einer geraden Zahl ist keine Äquivalenzumformung (es können Lösunge hinzukommen):

$(-2)^{2x} = (-8)^2$

$(-2^2)^x = 64$

$4^x = 64$

Jetzt haben wir wieder eine Exponentialgleichung, mit 2 positiven Seiten, die wir durch logarithmieren lösen können. Unbedingt die Probe machen !! Die gefundene Lösung muß nicht Lösung der Ausgangsgleichung sein.

Typ 2: Summe von Potenzen $a^{x+n} + a^{x+m} = b$

Wichtig: Die Basis der Potenz muss übereinstimmen und der Summand im Exponent mit dem x muss übereinstimmen.

Lösungsvariante:
(1. Potenzgesetz anwenden und dann die Potenz mit der Lösungsvariable ausklammern)

$a^{x+n} + a^{x+m} = b$ | 1. Potenzgesetz

$a^x * a^n + a^x * a^m = b$ | Ausklammern

$a^x * (a^n + a^m) = b$ | $: (a^n + a^m)$

$$a^x = \frac{b}{a^n + a^m}$$

Damit ist eine Gleichung vom Typ 1 erzeugt.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Exponential-gleichungen		

Typ 3: Produkte verschiedener Potenzen $\quad a^x\, b^{x^2} = c$

Lösungsvariante:
(Gleichung logarithmieren und Log-Gesetze anwenden)

$$a^x * b^{x^2} = c \qquad | \log_{10}$$

$$\log_{10}(a^x * b^{x^2}) = \log_{10} c \qquad | \text{ 1. Log-Gesetz}$$

$$\log_{10} a^x + \log_{10} b^{x^2} = \log_{10} c \qquad | \text{ 2. Log-Gesetz}$$

$$x * \log_{10} a + x^2 * \log_{10} b = \log_{10} c$$

In diesem Beispiel ist eine Quadratische Gleichung in x entstanden, die nun wie üblich gelöst werden kann. Eventuell tritt dann x auch nur linear auf.

Hinweis:
Im Prinzip kann jede Exponentialgleichung, welche nur Produkte von Potenzen enthält (keine Summen oder Differenzen) auf diese Weise in einen anderen Gleichungstyp umgewandelt werden. Es lohnt sich aber zu prüfen, ob man nicht mit Hilfe der Potenzgesetze vor dem Logarithmieren Potenzen zusammenfassen könnte.

Typ 4: Summenausdrücke zur gleichen Basis $\quad a^{2x} + a^x = c$

Wichtig: Die beiden vorkommenden Summanden mit der Unbekannten x müssen gleiche Basis haben und der Exponent des einen Summanden muss eine Potenz eines Grundausdruckes sein z.B. a^x und a^{2x}, a^x und $\sqrt{a^x} = a^{\frac{1}{2}x}$
3^x und $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$,....

Lösungsvariante:
(Potenzgesetz anwenden und danach substituieren)

$$a^{2x} + a^x = c \qquad | \text{ 3. Potenzgesetz}$$

$$(a^x)^2 + a^x = c \qquad | \text{ Substituiere } z = a^x$$

$$z^2 + z = c \qquad | \text{ Berechne } z$$

$$z = \ldots\ldots \qquad | \text{ Rücksubstitution (nur für } z > 0)$$

$$a^x = z$$

Damit ist eine Gleichung vom Typ 1 erzeugt.

Typ 4: Exponentenvergleich bei gleicher Basis $\quad a^{2x} = a^{mx+n}$

Wenn zwei Potenzen gleich sind, dann folgt aus der Gleichheit der beiden Basen auch die Gleichheit der Exponenten:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Mitunter müssen die gleichen Basen erst erzeugt werden. Das ist dann möglich, wenn die Basen durch potenzieren auseinander hervorgehen.

Musterbeispiel:

$$8^{x+2} = 2^{x+10}$$

$$(2^3)^{x+2} = 2^{x+10}$$

$$2^{3(x+2)} = 2^{x+10}$$

$$\Rightarrow \quad 3(x+2) = x + 10$$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Logarithmen-gleichungen

Gesetze und Regeln

Logarithmengleichungen

Eine Logarithmusgleichung ist eine Gleichung, bei der die Unbekannte (x) im Numerus vorkommt: $\log_2 x = \log_2 5$

Deshalb ist $\log_2 7 = x^2$ keine Logarithmusgleichung

Probe bei Logarithmusgleichungen ist unbedingt notwendig !

Typ 1: Logarithmusdefinition $\log_a x = c$

Numerus ein Bruch: $\log_2 \frac{x-14}{4x+6} = 3$

Führt durch Anwendung der Logarithmendefinition zu $\frac{x-14}{4x+6} = 2^3$

Faktor vor dem Logarithmus: $3 \log_2 x = 9$

$\log_2 x = 3$

$x = 2^3$

Typ 2: Mit zwei Logarithmen lösen $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Wenn zwei Logarithmen mit gleicher Basis gleich sind, dann sind auch die Numeri gleich:

$\log_a b = \log_a c \quad \Rightarrow \quad b = c$

Musterbeispiele:

$\log_{10}(2x+1) = \log_{10}(x+5)$

$2x + 1 = x + 5$

$x = 4$

Probe:

$\log_{10}(2 * 4+1) = \log_{10}(4+5)$

$\log_{10}(9) = \log_{10}(9)$

echte Lösung.

$\log_2(x) = \log_2(2x+2)$

$x = 2x + 2$

$x = -2$

Probe:

$\log_2(-2) = \log_2(2 * (-2)+2)$

Da die Numeri negativ sind, ist -2 keine Lösung.

Scheinlösung !

Typ 3: Faktor vor dem Logarithmus $C^* \log_a f(x) = \log_a g(x)$

Zur Lösung solcher Aufgaben kommt das dritte Logarithmengesetz zur Anwendung: $\log_a b^m = m * \log_a b$

Bei Anwendung des 3.Logarithmusgesetzes in der angegebenen Richtung, bei der der Exponent vor den Logarithmus gezogen wird, können Lösungen verloren. Man kann das aber mit einem Trick verhindern.

Musterbeispiel:

$2 * \log_6(2x) = \log_6(3x^2+9)$

$\log_6 [(2x)^2] = \log_6(3x^2+9)$

$(2x)^2 = 3x^2+9$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

Probe:

nur +3 ist eine Lösung, da -3 zu einem negativen Numerus führt

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Logarithmengleichungen

Gesetze und Regeln

Die Anwendung des dritten Logarithmengesetzes bei ungeraden Exponenten ist problemlos.

$$\log_a b^m = m * \log_a b$$

Die Anwendung des dritten Logarithmengesetzes bei geraden Exponenten ist mit Problemen behaftet. Die Ursache liegt wieder einmal darin, dass ein Minuszeichen mit einer geraden Potenz zu einem Pluszeichen wird. Bei ungeraden Potenzen ist das eben nicht so, da bliebt Minus ein Minus und Plus ein Plus.
Abhilfe schafft die Nutzung des Betragszeichens an der richtigen Stelle, wie es schon bei quadratischen Gleichungen angewendet wird. Wenn wir aber Betragszeichen um den Numerus machen, dann verkleinert sich der Definitionsbereich nicht, sondern besteht weiterhin aus alle reellen Zahlen außer der Null: D=ℝ*. Und weil der Definitionsbereich sich nicht verkleinert, kann die negative Lösung (x=–10) nicht verloren gehen:

Musterbeispiele

$$\log_{10} x^3 = 3$$
$$3 * \log_{10} x = 3$$
$$\log_{10} x = 1$$
$$x = 10$$

Probe:
10 ist eine Lösung der Gleichung

$$\log_{10} x^2 = 2$$
$$2 * \log_{10} x = 2$$
$$\log_{10} x = 1$$
$$x = 10$$

Probe:
10 ist eine Lösung der Gleichung aber die Lösung x = -10 ist nicht vorhanden, obwohl sie auch die Gleichung erfüllt.

$$\log_{10} x^2 = 2$$
$$2 * \log_{10} |x| = 2$$
$$\log_{10} |x| = 1$$
$$|x| = 10$$
$$x = \pm 10$$

Probe:
Es sind beide Lösungen vorhanden.

Typ 3: Logarithmus im Exponenten $\log_a f(x)^{\log_2 g(x)} = C$

Bei Logarithmusgleichungen, die einen Logarithmus im Exponenten haben, weiß man nicht, ob der Logarithmus eine gerade, ungerade oder reelle Zahl ist.Daher muss man - zur Sicherheit - von einen geraden Exponenten ausgehen und ein Betragszeichen setzen:

$$\log_2 x^{\log_2 x^2} = 2$$
$$\log_2 x^2 * \log_2 |x| = 2$$
$$2 * \log_2 |x| * \log_2 |x| = 2$$
$$\log_2 |x| * \log_2 |x| = 1$$
$$(\log_2 |x|)^2 = 1$$
$$\sqrt{(\log_2 |x|)^2} = \sqrt{1}$$
$$|\log_2 |x|| = 1$$

$\log_2 \lvert x\rvert = 1$	$\log_2 \lvert x\rvert = -1$
$\lvert x\rvert = 2^1$	$\lvert x\rvert = 2^{-1}$
$x_{1/2} = \pm 2$	$x_{3/4} = \pm \frac{1}{2}$

Probe:
Alle vier Ergebnisse erfüllen die Ausgangsgleichung !

$$\log_{10} x^{\log_{10} x} = 1$$
$$\log_{10} x * \log_{10} |x| = 1$$
$$\log_{10} |x| * \log_{10} |x| = 1$$
$$(\log_{10} |x|)^2 = 1$$
$$\sqrt{(\log_{10} |x|)^2} = \sqrt{1}$$
$$|\log_{10} |x|| = \pm 1$$

$\log_2 \lvert x\rvert = \pm 1$	$\log_2 \lvert x\rvert = -1$
$\lvert x\rvert = +10^{\pm 1}$	$\lvert x\rvert = -10^{\pm 1}$
$x_1 = 10$	$x_3 = -10$
$x_2 = 1/10$	$x_4 = -1/10$

Probe:
Die Ergebnisse mit den negativen Vorzeichen erfüllen die Ausgangsgleichungen nicht.
Durch das Setzen der Betragszeichen in der dritte Zeile gehen keine Lösungen verloren, es kommen höchstens welche hinzu, die durch die probe eliminiert werden.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Logarithmengleichungen

Gesetze und Regeln

Typ 4: Logarithmengleichungen mit mehreren Logarithmen

Die bisherigen Logarithmusgleichungen haben aus einem oder zwei Logarithmen bestanden. Kommt zusätzlich noch ein weiteres Glied hinzu, z.B. ein Absolutglied, dann versagen die bisherigen Lösungsverfahren.
Beispiel:

$$\log_{10}(-x) + \log_{10}(x+20) = 2$$

Um solche Gleichungen zu lösen, brauchen wir das 1.und 2.Logarithmusgesetz. Die Lösungsidee besteht darin, dass man die Logarithmen mit Hilfe des 1. bzw. 2.Logarithmusgesetzes zu einen einzelnen Logarithmus zusammenfasst.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b * c)$$
$$\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c)$$

Warum Scheinlösungen entstehen:
Die Logarithmengesetze sind eigentlich nur für positive Numeri (b bzw. c) definiert:
Bei Anwendung der Logarithmusgesetze auf Logarithmusgleichungen gibt es daher Probleme, denn die Numeri enthalten Variablen und können daher auch negativ werden. Was geschieht genau?
Um diese Frage zu klären, betrachten wir die folgende Logarithmusgleichung. Weil Logarithmen nur für positve Numeri (ohne Null) definiert sind, besteht der Definitionsbereich aus $D=\mathbb{R}_+$:

$$\log_2(x) + \log_2(x) = 4$$

Wir wenden das 1.Logarithmusgesetz an. Der Definitionsbereich vergrößert sich auf die positiven und negativen reellen Zahlen (ohne Null), d.h. es gilt $D=R^*$
Weil sich der Definitionsbereich vergrößert hat, können Lösungen hinzugekommen sein, wenn diesem im erweiterten Teil des Definitionsbereichs liegen. Daher ist die Probe nötig.
In unserem Beispiel ist zur ursprünglichen Lösung x=4 die Scheinlösung x=–4 hinzugekommen.

Wie Lösungen verloren gehen:

$\log_2(x * x) = 2$ dies ist auch: $\log_2(x^2) = 2$

$\log_2(x) + \log_2(x) = 2$

$2 * \log_2(x) = 2$ da ist es passiert: Das Quadrat verschwindet und wird zum Faktor 2. Damit verschwindet auch, dass aus negativem Vorzeichen ein positives Vorzeichen wird.

Abhilfe schafft der Betrag:

$\log_2(x * x) = 2$

$\log_2 |x| + \log_2|x| = 2$

$\log_2 |x| = 1$

oder Umwandlung in Potenzen:

$\log_2(x^2) = 2$

$x^2 = 2^2$

$x = |2| = \pm 2$

Musterbeispiele

$\log_{10}(-x) + \log_{10}(x+20) = 2$
$\log_{10} [(-x)(x+20)] = 2$
$(-x)(x+20) = 10^2$
$-x^2 - 20x = 10^2$
$x^2 + 20x + 10^2 = 0$
$(x+10)^2 = 0$
$x = -10$
Probe:
$\log_{10}(10) + \log_{10}(10)$
$= 1 + 1 = 2$
=> echte Lösung.

$\log_2(5x+1) – \log_2(x–1) – 3 = 0$
$\log_2 [(5x+1)/(x–1)] = 3$
$(5x+1)/(x–1) = 2^3$
$5x + 1 = 2^3 * (x–1)$
$5x + 1 = 8x- 8$
$3x = 9$
$x = 3$
Probe:
$\log_2(16) – \log_2(2) – 3 = 4 – 1 – 3 = 0$
=> echte Lösung.

$\log_3(2x–3) – \log_3(x+2) – 2 = 0$
$\log_3 [(2x–3)/(x+2)] = 2$
$(2x–3)/(x+2) = 3^2$
$2x – 3 = 3^2 * (x+2)$
$2x – 3 = 9x+ 18$
$-7x = 21$
$x = – 3$
Probe:
$\log_2(–9) – \log_2(–1) – 2$
=> negative Numeri, Scheinlösung.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Logarithmengleichungen

Typ 5: Lösen durch Substitution

Wenn ein und derselbe Logarithmenausdruck mehrmals in der Gleichung erscheint, kann man diesen Ausdruck insgesamt substituieren. Damit erhält man eine neue Gleichung, in der keine Logarithmen mehr auftreten.
Beispiel:

$$\frac{3\log_{10}(x+7)+2}{2\log_{10}(x+7)-1}=5$$

In diesen Fällen substituiert man den Logarithmus: $\log_{10}(x+7) = u$ und erhält eine neue Gleichung.

Typ 5: Logarithmen mit verschiedenen Basen

Logarithmengleichungen lassen sich, wenn überhaupt, nur Lösen mit gleichen Basen. Nur in diesem Fall kann man über die Logarithmusdefinition die Gleichung in Potenzen umwandeln, oder über Substitution den Logarithmenausdruck vorübergehend eliminieren. Deshalb müssen Gleichungen mit verschiedenen Basen zunächst auf eine einheitliche Basis gebracht werden. dazu hilft die Kettenregel der Logarithmengesetze:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

Musterbeispiele

$$\frac{3\log_{10}(x+7)+2}{2\log_{10}(x+7)-1}=5$$

Substitution:
$\log_{10}(x+7) = u$

$$\frac{3u+2}{2u-1}=5$$

$3u + 2 = 5(2u - 1)$
$3u + 2 = 10u - 5$
$u = 1$

Rücksubstitution:
$\log_{10}(x+7) = 1$
$10^1 = x + 7$
$3 = x$

Probe:

$$\frac{3\log_{10}(3+7)+2}{2\log_{10}(3+7)-1}=\frac{3*1+2}{2*1-1}=5$$

=> echte Lösung.

$3[\log_{10}(x-90)]^2 - 6\log_{10}(x-90) = -3$

Substitution:
$\log_{10}(x-90) = u$

=> $3u^2 - 6u = -3$
führt zu einer quadratischen Gleichung

ACHTUNG!
Nicht verwechseln mit:
$3\log_{10}(x-90)^2 - 6\log_{10}(x-90) = -3$
das Quadrat steht an einer anderen Stelle und führt nach Logarithmenformel zu

$3*2*\log_{10}(x-90) - 6\log_{10}(x-90) = -3$

$x^{2*\log_{10}(x)} - 2x^{\log_{10}(x)} = -1$
$(x^{\log_{10}(x)})^2 - 2x^{\log_{10}(x)} = -1$

Substitution: $x^{\log_{10}(x)} = u$
$u^2 - 2u + 1 = 0$
=> $u = 1$

Rücksubstitution: $x^{\log_{10}(x)} = 1$
$\log_{10}(x^{\log_{10}(x)}) = \log_{10}(1)$
$\log_{10}(x) * \log_{10}(x) = 0$
$\log_{10}(x) = 0$
$x = 1$

Probe:
$1^{2*\log_{10}(1)} - 2 * 1^{\log_{10}(1)} =$
$1^{2*0} - 2*1^0 = -1$
=> echte Lösung

$\log_8(4x) = \log_2(x)$

Basiswechsel:

$$\frac{\log_2(4x)}{\log_2(8)} = \log_2(x)$$

$$\frac{\log_2(4x)}{3} = \log_2(x)$$

$\log_2(4x) = 3*\log_2(x)$
$\log_2(4x) = \log_2 x^3$
$4x = x^3$
$x^3 - 4x = 0$
$x(x^2-4) = 0$
$x_1=0$; $x_2=2$; $x_3=-2$

Probe:
nur $x_2=2$ gibt eine echte Lösung