Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Potenzgesetze

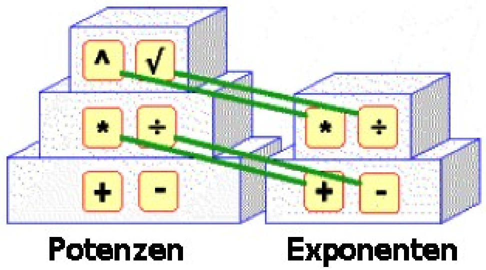
Potenzgesetze

Wie für das mehrfache Addieren einer Zahl abkürzend ein Multiplikationsausdruck geschrieben werden kann: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 * 2$
kann für das mehrfache Multiplizieren einer Zahl abkürzend ein Potenzausdruck geschrieben werden: $2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^5$
Die Anzahl der gleichen Faktoren werden als kleine Zahl oben an den eigentlichen Faktor angehängt. Die Zahl, die den Multiplikationsfaktor angibt, wird als **Basis** bezeichnet und die kleine Zahl für die Anzahl der Multiplikationen als **Exponent**.
Damit sind Potenzen zunächst nur für beliebige Basiszahlen und positive ganzzahlige Exponenten definiert.

Definition n-te Potenz von a: $a * a * a * a \ldots * a = a^n$

Potenzen berechnen aus einer Basis a und einem Exponenten n den Potenzwert c:

$$a^n = c$$



Bei Potenzen mit gleicher Basis wird die Rechenoperation auf den Exponenten verschoben, wobei die Rechenoperation eine Stufe niedriger ist.

Potenzen mit gleicher Basis und unterschiedlichen Exponenten

1. Potenzgesetz $\quad a^m * a^n = a^{n+m}$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man
die Exponenten addiert und die Basis beibehält.
Treten Vorzahlen auf, so werden sie multipliziert

Musterbeispiele:

$2^3 * 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$;

$\sqrt[4]{5} * 5^{1,75} = 5^{0,25} * 5^{1,75} = 5^{0,25+1,75} = 5^2 = 25$

2. Potenzgesetz $\quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ für $n > m$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man
die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.
Treten Vorzahlen auf, so werden sie multipliziert

Musterbeispiel:

$2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$;

Erste Erweiterung des Potenzbegriffes: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Warum ist dieser Weg notwendig?
Nach der Definition der Potenz macht der Ausdruck a^{-n} keinen Sinn, deshalb muss man diesen Ausdruck auf einen Ausdruck zurückführen, der definiert ist. Eine Potenz mit einem negativen Exponenten ist definiert als eine Potenz mit positiven Exponenten, die aber im Nenner eines Bruches steht. Ebenso verhält es sich mit a0, da eine nullfache Multiplikation einer Zahl keinen Sinn macht. Damit ist der Ausdruck a^{m-n} auch für n=m und für n < m definiert. n und m müssen aber immer noch ganze Zahlen sein, keine Brüche

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ für $n < m$ und für $n = m$ definiert

Musterbeispiele:

$\frac{1}{3} = 3^{-1}$ $\qquad 3 = 3^1$

$\frac{1}{4^2} = 4^{-2}$ $\qquad 17 = 17^1$

$a \bullet b = a^1 \bullet b^1$

Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Potenzgesetze

3. Potenzgesetz $(a^m)^n = a^{n * m}$

Man potenziert Potenzen, indem man
die Exponenten multipliziert.

$$1.)\ (6^2)^3 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 = 6^6$$

$$2.)\ (a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{12}$$

- Potenzen mit gleicher Basis können nicht addiert und auch nicht subtrahiert werden: $a^m + a^n$ oder $a^m - a^n$.
- Multiplikation, Division und nochmaliges Potenzieren von Potenzen mit gleicher Basis führt zu einer Rechenoperation im Exponenten, die eine Hierarchiestufe niedriger ist, als die ursprüngliche Operation.

Potenzen mit unterschiedlicher Basis und gleichen Exponenten

Bei Potenzen mit unterschiedlicher Basis wird die Rechenoperation mit den Basen durchgeführt und der Exponent bleibt bestehen.

4. Potenzgesetz $a^n * b^n = (a * b)^n$

Potenzen mit unterschiedlicher Basis und gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man
die Basis multipliziert und den Exponenten beibehält.

$$2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5\ ;$$

$$\left(\frac{x \cdot \sqrt{2}}{y \cdot \sqrt{3}}\right)^4 \cdot \left(\frac{y^2 \cdot \sqrt{6}}{x \cdot \sqrt{8}}\right)^4 = \left(\frac{x \cdot \sqrt{2}}{y \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{y^2 \cdot \sqrt{6}}{x \cdot \sqrt{8}}\right)^4 = \left(\frac{y \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{4y^4}{16} = \frac{1}{4}y^4$$

$$\left(\frac{x^2y^2}{a^2}\right)^n \cdot \left(\frac{ab}{xy^2}\right)^n \cdot \left(\frac{a^2}{xy}\right)^n = \left(\frac{x^2y^2}{a^2} \cdot \frac{ab}{xy^2} \cdot \frac{a^2}{xy}\right)^n = \left(\frac{ab}{y}\right)^n = \frac{a^nb^n}{y^n}$$

5. Potenzgesetz $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Potenzen mit unterschiedlicher Basis und gleichem Exponenten werden dividiert, indem man
die Basis dividiert und den Exponenten beibehält.

$$6^7 : 2^7 = (6 : 2)^7 = 3^7\ ;$$

$$48^{0,75} : 3^{0,75} = 16^{0,75} = (2^4)^{3/4} = 8$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^6 = \frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{a^3}{x^3} = \frac{a^5}{x^5} = \left(\frac{a}{x}\right)^5$$

Potenzen mit unterschiedlicher Basis und unterschiedlichem Exponenten

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$\frac{a^{x+2} \cdot a^{x+4}}{a^{x+3} \cdot a^{x+1}} = \frac{a^{2x+6}}{a^{2x+4}} = a^{(2x+6)-(2x+4)} = a^{2x+6-2x-4} = a^2$$

$a^n * b^m$ läßt sich nicht weiter bearbeiten.

- Potenzen mit unterschiedlicher Basis können nicht addiert und auch nicht subtrahiert werden: $a^m + b^m$ oder $a^m - b^m$.
- Multiplikation, Division von Potenzen mit ungleicher Basis ist nur bei gleichem Exponenten möglich. Dabei wird die Rechenoperation auf die Basiswerte angewandt und der Exponent bleibt erhalten.

Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomische Formeln

Binomische Formeln

Da Potenzgesetze nur für Produkte und Quotienten gelten, sind für Summen und Differenzen die Binomischen Formeln anzuwenden. Binomische Ausdrücke sind zweigliedrige Ausdrücke (a + b) für die die n-te Potenz berechnet werden soll.

$(a \pm b)^0 = 1$

$(a \pm b)^1 = a \pm b$

$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$ 1. und 2. Binomische Formel

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

Das Vorzeichen wechselt mit der ungeraden Potenz von b.

Die Koeffizienten unterliegen einem Bildungsgesetz, dem **Pascalschen Dreieck**: Die Koeffizienten der nächsten Potenz entstehen aus der Summe der Koeffizienten der vorhergehenden Potenz. An den Rändern wird jeweils eine 1 hinzugefügt.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Weitere brauchbare Zerlegungsformeln

$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$ 3. Binomische Formel

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$

$a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$

Musterbeispiele

Pascalsches Dreieck in der Schreibweise mit Binomialkoeffizienten

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Potenzgesetze © Dipl.-Math. Armin Richter Treff Lernen Christina Strauch	**Potenzen mit negativem Exponenten** Da Potenzen nur als Vielfache der Multiplikation definiert sind, gibt es zunächst keine negativen Exponenten. Es hat sich aber gezeigt, dass man den Potenzbegriff auf negative Exponenten erweitern kann, so dass auch dann alle Potenzgesetze gelten. $\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $\qquad a^0 = 1$ *Warum ist dieser Weg notwendig?* *Nach der Definition der Potenz macht der Ausdruck a^{-n} keinen Sinn, deshalb muss man diesen Ausdruck auf einen Ausdruck zurückführen, der definiert ist. Eine Potenz mit einem negativen Exponenten ist definiert als eine Potenz mit positiven Exponenten, die aber im Nenner eines Bruches steht.* *Ebenso verhält es sich mit a^0, da eine nullfache Multiplikation einer Zahl keinen Sinn macht. Damit ist der Ausdruck a^{m-n} auch für n=m und für n < m definiert. n und m müssen aber immer noch ganze Zahlen sein, keine Brüche.* Die obige Formel ist kein mathematisches Gesetzt, sondern eine Definition, die nicht zu beweisen ist. Es gibt nur eine Möglichkeit, sich darüber klar zu werden, dass diese Definition sinnvoll ist: Nach Potenzgesetz gilt: $\frac{a^7}{a^4} = a^{7-4} = a^3$ Wenn für den umgekehrten Bruch das Potenzgesetz auch gelten soll: $\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$ Daran sieht man, dass die Definition sinnvoll ist. Die obige Definition schießt auch folgende Regel mit ein: $\mathbf{a^n = \frac{1}{a^{-n}}}$ $a^0 = 1$ Gilt für jedes relle (!) a außer 0. $0^0 = ?$ Das ist ein unbestimmter Ausdruck, er ist werden 0 noch 1 noch + ∞ oder – ∞. Dieser Ausdruck kann jeden beliebigen Wert annehmen. Dazu sind Rechenregeln notwendig, die hier noch nicht besprochen werden können.	

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wurzelgesetze

Wurzelgesetze

Berechnen von Wurzeln ist die Umkehroperation des Potenzierens. Beim Potenzieren wird aus einer **Basis** a und einem **Exponenten** n ein **Potenzwert** c errechnet.

Wurzeln berechnen aus einem Radikand c und einem Exponenten n den Wurzelwert a:

$$a = \sqrt[n]{c}$$

Da Potenzen nur als Vielfache der Multiplikation definiert sind, hat man den Potenzbegriff auch rationale Exponenten mit einer Definition erweitert.
Ziel jeder Erweiterung muss es sein, dass für die bekannten Fälle auch die bekannten Gesetze gelten.

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad \text{für } a > 0$$

Warum ist dieser Weg notwendig?
Nach der Definition der Potenz macht der Ausdruck $a^{1/n}$ keinen Sinn, es kann eine Zahl 1/3 mal mit sich selbst multipliziert werden. Deshalb muss man diesen Ausdruck auf einen Ausdruck zurückführen, der definiert ist. Ein Wurzelwert ist eine genau definierte Zahl.

Wurzelgesetze sind Potenzgesetze mit gebrochen-rationalem Exponenten

Deshalb gibt es zu jedem Potenzgesetz ein entsprechendes Wurzelgesetz

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Der Nenner des Exponenten (n) wird zum Wurzelexponenten, der Zähler des Exponenten (m) kommt als Exponent zum Radikanden oder als Exponent hinter die Wurzel.

Wurzeln mit gleichem Radikanten

1. Wurzelgesetz $\quad a^{m/n} = (\sqrt[n]{a^m}) = (\sqrt[n]{a})^m$

$$(a^{1/n})^m = (a)^{m \cdot 1/n}$$

2. Wurzelgesetz $\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (\sqrt[n \cdot m]{a}) = a^{1/m \cdot n}$

$$(a^{1/n})^{1/m} = (a)^{1/m \cdot 1/n} = a^{1/m \cdot n}$$

Musterbeispiele

$$16^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{16}\right)} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$0{,}008^{-0{,}\overline{6}} = \left(\frac{8}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1000}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1000}{8}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1000}{8}}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$$

oder: $0{,}008^{-0{,}\overline{6}} = \left(\frac{8}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(125)^2} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$

<u>allgemein:</u>

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^m} = \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^m$$

MERKE:

1.) Minus-Zeichen im Exponent bedeutet:
Kehrwert der Basis bilden und gleichzeitig den Exponenten positiv machen.

2.) Bruch- oder Dezimalzahl im Exponenten bedeutet:
Umformen in einen Wurzelterm. Dabei rückt der Nenner des Bruches auf die Wurzel (Wurzelexponent), der Zähler kommt als Exponent zur Zahl unter der Wurzel (Radikand) oder hinter die Wurzel.

$$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$0{,}01^{-0{,}5} = \frac{1}{0{,}01^{0{,}5}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}01}} = \frac{1}{0{,}1} = 10$$

$$32^{0{,}2} = 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$64^{-0{,}\overline{6}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{0{,}\overline{6}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{64}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-0{,}\overline{3}} = 27^{0{,}\overline{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Wurzelgesetze		

Spezialfälle: $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ Potenzgesetz $a^{-1/n} = (a^{-1})^{1/n}$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \left(\sqrt[n]{a^n}\right)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n*c]{a^{m*c}}$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)\left(\sqrt[n]{a}\right) = \left(\sqrt[n*m]{a^{m+n}}\right)$$

$$\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)}{\left(\sqrt[m]{a}\right)} = \left(\sqrt[n*m]{a^{m-n}}\right)$$

ACHTUNG!
Wurzelexponent des
Zählers wird subtrahiert !

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten

3. Wurzelgesetz $\sqrt[n]{\mathbf{a}} * \sqrt[n]{\mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a*b}}$

$$\mathbf{a^{1/n} * b^{1/n} = (a*b)^{1/n}}$$

4. Wurzelgesetz $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$$\mathbf{a^{1/n} / b^{1/n} = (a / b)^{1/n}}$$

Spezialfall: $\frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$ $b^{-1/n} = (b^{-1})^{1/n}$

Auch Wurzelgesetze gelten nur für Multiplikation und Division und nicht für Addition und Subtraktion.

Summen und Differenzen dürfen **nicht** gliedweise radiziert werden

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}\ ,$$

insbesondere:

$$\sqrt{a^2 \pm b^2} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

Treff Lernen
Christina Strauch

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Wurzelgesetze		

Bei folgenden Ausdrücken müssen deshalb Binomische Formeln Anwendung finden:

$$(\sqrt{3} + 1/\sqrt{3})^2 = (3^{1/2} + 3^{-1/2})^2 = (3^{1/2})^2 + 2 * 3^{1/2}\, 3^{-1/2} + (3^{-1/2})^2$$

$$= 3 + 2 + 3^{-1} = 5\tfrac{1}{3}$$

$(\sqrt{3} + 1/\sqrt{3})^{1/3}$

Additionen und Subtraktionen mit gebrochen rationalem Exponenten lassen sich nicht mit Binomischen Formeln bearbeiten, da diese nur für ganzzahlige Exponenten existieren. In diesen Fällen lassen sich nur (eventuell) Zusammenfassungen in der Klammer durchführen.

Rationalmachen des Nenners bei Quadratwurzeln

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\,\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{a}$$

Durch erweitern des Bruches im Nenner mit dem gleichen Wurzelausdruck erreicht man, dass die Wurzel im Nenner verschwindet. Bei Quadratwurzel reicht die Multiplikation mit einer Wurzel, bei höherem Wurzelexponent muss mit mehreren Wurzel erweitert werden, damit nach erstem Wurzelgesetz m=n erreicht wird.

Musterbeispiele:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^3} * \sqrt[7]{a^4}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{a}$$

$$\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15 * \sqrt{5}}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3 * \sqrt{5}$$

$$\frac{8}{\sqrt[4]{5}} = \frac{8 * \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5}\,\sqrt[4]{5^3}} = \frac{8 * \sqrt[4]{5^3}}{5} = \frac{8}{5} * \sqrt[4]{5^3}$$

Nenner ist eine höhere Wurzel

Wenn nun im Nenner eine n-te Wurzel steht, müssen wir mit dieser n-ten Wurzel erweitern, und zwar n-1 mal. Dann vereinfachen wir den Nenner noch durch das 1.Potenzgesetz:

Musterbeispiele:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^3} * \sqrt[7]{a^4}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{a}$$

$$\frac{8}{\sqrt[4]{5}} = \frac{8 * \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5}\,\sqrt[4]{5^3}} = \frac{8 * \sqrt[4]{5^3}}{5} = \frac{8}{5} * \sqrt[4]{5^3}$$

Nenner ist Summe zweier Quadratwurzeln

Der Erweiterungsfaktor ergibt sich dabei nach folgender Regel:
Der Erweiterungsfaktor entspricht dem Nenner des ursprünglichen Bruches, jedoch ändert man das Rechenzeichen zwischen den Quadratwurzeln.
Ziel ist es, dass durch das Erweitern des Nenners im Nenner eine 3. Binomische Formel entsteht. Durch die Quadratwurzel und das entstandene Quadrat aus der Binomischen Formel verschwinden im Nenner die vorherigen Wurzeln.

Musterbeispiel:

$$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}$$

$$= \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Wurzelgesetze

Nenner ist Summe dreier Quadratwurzeln

Auch in diesem Fall ist die Lösung über die 3. Binomische Formel zu suchen. Da aber im Nenner zwei Summen stehen muss die Erweiterung des Nenners zweimal durchgeführt werden. Beim ersten mal sind zwei Summenaden des Nenners als einer zu behandeln.

$$\frac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{d}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}} = \frac{d\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,]}{[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}]\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,]}$$

$$\frac{d\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,]}{\underbrace{[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}]\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,]}_{(a\ +\ b\ )(\ a\ -\ b)}} = \frac{d\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,]}{\underbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}_{(a^2\ -\ b^2)}}$$

Für die erste Anwendung der 3. Binomischen Formel werden die ersten zwei Summanden ($\sqrt{a}+\sqrt{b}$) als einer zusammengefasst. das Ergebnis ist noch nicht frei von Wurzeln. Durch Umordnen aller Ausdrücke, die keine Wurzel mehr besitzen und dem verbliebenen Wurzelausdruck entsteht die Ausgangsgleichung für die 2. Anwendung der 3. Binomischen Formel.

$$\frac{d\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,]}{(a+2\sqrt{a}\,\sqrt{b}+b\,)-c} = \frac{d\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,]}{\underbrace{(2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,)}_{(a}+\underbrace{(a+b-c)}_{b\,)}}$$

$$= \frac{d\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,] * [(2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,)-\ (a+b-c)]}{[\underbrace{(2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,)}_{(a}+\underbrace{(a+b-c)}_{b\,)}]\ [\underbrace{(2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,)}_{(a}-\underbrace{(a+b-c)}_{b\,)}]}$$

$$= \frac{d\ [(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\,] * [(2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,)-\ (a+b-c)]}{\underbrace{(2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,)^2}_{(a^2}-\underbrace{(a+b-c)^2}_{b^2)}}$$

Damit sind im Nenner die Wurzelausdrücke verschwunden, da beim ersten Glied die Wurzeln als Produkt stehen werden sie durch das Quadrieren aufgehoben. Beim Rechnen mit Zahlenwerten vereinfacht sich das Bild im Nenner etwas, im Zähler entstehen Ausdrücke bei denen ein sauberes Arbeiten (Klammer setzen) dringend notwendig ist !

Musterbeispiele

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\,)+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{[(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}\,]}{[(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{2}]\ [(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}]}$$

$$= \frac{[\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,]}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-2}$$

$$= \frac{[\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,]}{(\ 5+2\sqrt{5}\sqrt{3}+3)-2} = \frac{[\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,]}{2\sqrt{15}\ +6}$$

$$= \frac{[\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,]}{(2\sqrt{15}+6)}\ \frac{[2\sqrt{15}-6]}{(2\sqrt{15}-6)}$$

$$= \frac{[\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,]\ [2\sqrt{15}-6]}{(2\sqrt{15})^2\ -\ 6}$$

$$= \frac{[\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,]\ [2\sqrt{15}-6]}{(2 * 15)\ -\ 6}$$

$$= \frac{[\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,] * [2\sqrt{15}-6]}{24}$$

Die Wurzel im Nenner ist verschwunden. das Ausmultiplizieren des Zählers ist sehr sorgfältig vorzunehmen !

$$= \frac{(2\sqrt{75}+2\sqrt{45}-2\sqrt{30}\,)-[6^*\ (\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,)]}{24}$$

$$= \frac{2^*(\sqrt{5^*15}+\sqrt{3^*15}-\sqrt{2^*15}\,)-[6^*\ (\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,)]}{24}$$

$$= \frac{(2\sqrt{15}-6)\ (\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\,)}{24}$$

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Logarithmengesetze	**Logarithmengesetze** Berechnen von Logarithmen ist die Umkehroperation des Exponenzierens. • Beim Potenzieren wird aus einer **Basis** a und einem **Exponenten** n ein **Potenzwert** c errechnet. • Beim Wurzelziehen wir aus einem **Radikanten** c (Potenzwert) und einem **Wurzelexponenten** n ein **Wurzelwert** (Basis) a berechnet. • Beim Logarithmieren wird für einen Wert c der **Logarithmus** (Exponent) n zu einer Basis a bestimmt. $a^n = c \Rightarrow n = \log_a c$ **Logarithmen berechnen zu einem Wert c den Exponenten n zu einer Basis a, mit dem man a Potenzieren muss, um c zu erhalten.**	Potenzschreibweise <=> Logarithmenschreibweise $125 = 5^3$ <=> $3 = \log_5 125$ $64 = 2^6$ <=> $6 = \log_2 64$ $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ <=> $-3 = \log_2 \frac{1}{8}$ $0{,}0001 = 10^{-4}$ <=> $-4 = \log_{10} 0{,}0001$
	Spezialfälle: $\log_a (1/b) = -\log_a b$ $\log_a (a^x) = x$ $\log_a (a) = 1$ $\log_a (1) = 0$ $a^{\log_a (b)} = b$ $\log_a (0)$ ist undefiniert. $\lim_{x \to +0} \log_a (x) = -\infty$	$\log_3 (\frac{1}{34}) = -\log_3 (34)$ da $\frac{1}{34} = 34^{-1}$ $\log_5 (5^{23}) = 23$ da $5^{23} = 5^{23}$ $10^{\log_{10}(100)} = 100$
	Es existieren nur Logarithmengesetze zur gleichen Basis, als Parallelen zu den Potenzgesetzen mit gleicher Basis. Damit werden die Rechenoperationen vom Gesamtausdruck eines Logarithmus in eine niedrigere Rechenstufe bei den einzelnen Logarithmen transformiert: Aus Multiplikation wird Addition (1. Logarithmengesetz) aus Division wird Subtraktion (2. Logarithmengesetz) aus Potenzieren wird Multiplizieren. (3. Logarithmengesetz)	
© Dipl.-Math. Armin Richter Treff Lernen CHRISTINA STRAUCH	*1. Logarithmengesetz* $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ **der Logarithmus eines Produktes ergibt sich aus der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren** Parallele zum Potenzgesetz: $a^{n+m} = a^n * a^m$ $a^n=b \Rightarrow n=\log_a b$ | $a^m=c \Rightarrow m=\log_a c$ | $b*c = a^{n+m} \Rightarrow n+m = \log_a(b*c)$ $\log_a b$ + $\log_a c$ = $\log_a(b*c)$	$\log_2 (4 \cdot 16) = \log_2 (4) + \log_2 (16)$ $\log_2 (4) = 2$ $\log_2 (16) = 4$ $\log_2 (4 \cdot 16) = \log_2 (64) = 6$ da $2^2 \cdot 2^4 = 2^6$

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Logarithmengesetze	*2. Logarithmengesetz* **$\log_a (b / c) = \log_a b - \log_a c$** **der Logarithmus eines Quotienten ergibt sich aus der Differenz der Logarithmen von Divident und Divisor** Parallele zum Potenzgesetz: $a^{n-m} = a^n / a^m$	$\log_7 (23/56) = \log_7(23) - \log_7 (56)$
	3. Logarithmengesetz **$\log_a b^m = m * \log_a b$** **der Logarithmus einer Potenz ergibt sich aus dem Produkt des Exponenten mit dem Logarithmus der Potenzbasis** Parallele zum Potenzgesetz: $(a^n)^m = a^{n*m}$	$\log_5 (34^3) = 3 \cdot \log_5(34)$ $\log_{10} (234^6) = \log_{10} (234)^6 = 6 \cdot \log_{10}(234)$ (Der Exponent kann als Faktor vor den Logarithmus geschrieben werden.)
	4. Logarithmengesetz **$\log_a \sqrt[n]{b^m} = m/n * \log_a b$** (Ableitung aus dem 3. Logarithmengesetz) **der Logarithmus einer Wurzel ergibt sich aus dem Produkt des Exponenten mit dem Logarithmus des Wurzelausdrucks** Parallele zum gleichen Potenzgesetz für rationale Exponenten: $(a^n)^m = a^{n*m}$	$\log_5(\sqrt[7]{98}) = \frac{1}{7} \cdot \log_7(98)$ $\log_3(\sqrt[4]{65^7}) = \frac{7}{4} \cdot \log_3 (65)$

Kettenregel

Logarithmen lassen sich von einer Basis auf eine andere Basis umrechnen:

Aus $c^{\log_c (b)} = b$

folgt durch logarithmieren zu einer Basis a $\boxed{\log_c b \cdot \log_a c = \log_a b}$

Logarithmen werden auf eine neue Basis umgerechnet, indem der Logarithmus des Numerus zur neuen Basis durch den Logarithmus der alten Basis zur neuen Basis dividiert wird:

$$\boxed{\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}}$$

Umrechnung natürlicher Logarithmus in dekadischen Logarithmus:

$$\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10} = \frac{\ln b}{2{,}3025851.}$$

Umrechnung dekadischer Logarithmus in natürlichen Logarithmus:

$$\ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{\lg b}{0{,}4342944}$$

Die Umrechnung gilt für jede Basis. Nützlich sind aber nur Umrechnungen auf die Basis10 zum **lg** oder auf die Basis e zum **ln**, da nur diese Funktionen mit dem Taschenrechner zu bestimmen sind.

$5^{\log_5 27} = 27$ | Logarithmieren zur Basis 10

$\Downarrow$

$\log_5(27) \log_{10}(5) = \log_{10}(27)$

$\Downarrow$

$$\log_5 27 = \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 5} = \frac{1{,}4313637641}{0{,}6989700043} = 2{,}047818$$

$$\log_5 27 = \frac{\ln 27}{\ln 5} = \frac{3{,}2958368660043}{1{,}6094379124341} = 2{,}047818$$

$$\log_7 34 = \frac{\log_{10} 34}{\log_{10} 7} = \frac{1{,}53147891704}{0{,}84509804001} = 1{,}812190828198$$

$$\log_7 34 = \frac{\ln 34}{\ln 7} = \frac{3{,}526360524616}{1{,}945910149055} = 1{,}812190828198$$

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Rechen-operationen

Rechenoperationen und ihre Umkehrung

Die Mathematik kennt verschiedene Hierarchiestufen bei Rechenoperationen, die in entsprechender Reihenfolge auszuführen sind. Dabei ist die Operation der höheren Stufe immer vor einer Operation der niedrigeren Stufe auszuführen. Nur Klammern können diese Reihenfolge ändern. Zu jeder Grundoperation gibt es eine Umkehroperation, je nachdem, an welcher Position die unbekannte Größe steht. Die jeweils unbekannte Größe wird im folgenden als u bezeichnet.

1. Stufe: Addition, Subtraktion

Die unterste Stufe ist die Addition: a + b = c

Grundoperation Addition

Wenn das Ergebnis bekannt ist und ein ein Ausdruck der linken Seite bestimmt werden soll,

a + b = **u**

Da für die Addition das Kommutativgesetz a + b = b + a gilt, ist die Umkehroperation für beide Umkehraufgaben gleich:

Umkehroperation Subtraktion

u + b = Ergebnis	a + **u** = Ergebnis
u = Ergebnis – b	**u** = Ergebnis – a

2. Stufe Multiplikation, Division

Die nächste Stufe ist die Addition von **mehreren gleichen Zahlen**, die man in einer Kurzschreibweise zusammenfassen kann:

$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{\text{Anzahl}}$ = Ergebnis → a * Anzahl = Ergebnis

Grundoperation Multiplikation

Wenn das Ergebnis bekannt ist und ein ein Ausdruck der linken Seite bestimmt werden soll,

a * Anzahl = **u**

Da für die Multiplikation das Kommutativgesetz a * b = b * a gilt, ist die Umkehroperation für beide Umkehraufgaben gleich:

Umkehroperation Division

u * Anzahl = Ergebnis	a * **u** = Ergebnis
u = Ergebnis : Anzahl	**u** = Ergebnis : a

Musterbeispiele

Wie löst man Gleichungen nach x auf ?

x + 3 = 5
x = 5 – 3

+ 3 ist auf die rechte Seite zu bringen:
Benutze die Umkehroperation von +: –
behalte die Zahl bei: 3

x – 3 = 5
x = 5 + 3

– 3 ist auf die rechte Seite zu bringen:
Benutze die Umkehroperation von – : +
behalte die Zahl bei: 3

x * 5 = 15
x = 15 / 5

Ein Faktor + 5 ist auf die rechte Seite zu bringen:
Benutze die Umkehroperation von ● : :
behalte die Zahl bei: 5

x : 3 = 5
x = 5 ● 3

Der Divisor + 3 ist auf die rechte Seite zu bringen:
Benutze die Umkehroperation von „:“ : ●
behalte die Zahl bei: 3

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Rechenoperationen

3. Stufe: Potenzieren, Wurzelziehen(Radizieren), Logarithmieren

Die nächste Stufe ist die **Multiplikation** von **mehreren gleichen Zahlen**, die man in einer Kurzschreibweise zusammenfassen kann:

$$\underbrace{a * a * a * \ ...\ * a}_{\text{Anzahl}} = \text{Ergebnis} \quad \Rightarrow \quad a^{\text{Anzahl}} = \text{Ergebnis}$$

Grundoperation Potenzieren

$a^{\text{Anzahl}} = \mathbf{u}$

Da für das Potenzieren kein Kommutativgesetz gilt, sind die Umkehroperation für beide Umkehraufgaben verschieden::

Wenn das Ergebnis bekannt ist und ein ein Ausdruck der linken Seite bestimmt werden soll,

Umkehroperation Wurzelziehen

$\mathbf{u}^{\text{Anzahl}} = \text{Ergebnis}$

$\mathbf{u} = \sqrt[\text{Anzahl}]{\text{Ergebnis}}$

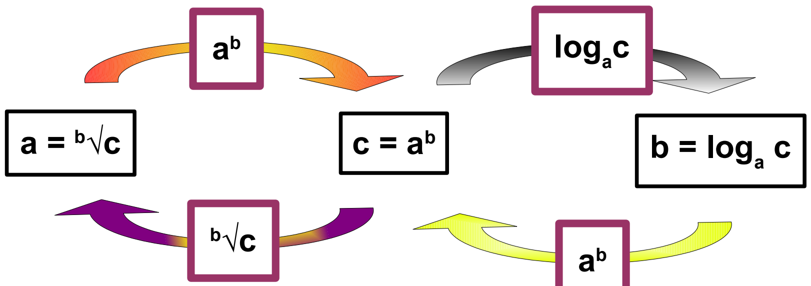
Umkehroperation Logarithmieren

$a^{\mathbf{u}} = \text{Ergebnis}$

$\mathbf{u} = \log_a \text{Ergebnis}$

Die b-te Wurzel aus c ist derjenige Wert a, der mit b potenziert c ergibt

Der Exponent b mit dem man a potenzieren muss, um c zu erhalten ist der Logarithmus von c zur Basis a



Der Basis a die man mit b potenzieren muss, um c zu erhalten ist die b-te Wurzel von c.

Die Logarithmus von c zur Basis a ist derjenige Wert b, mit dem man a potenzieren muss, um c zu erhalten.

Musterbeispiele

$x^2 = 10$

$x = \sqrt[2]{10}$

„hoch 2“ ist auf die rechte Seite zu bringen:
Benutze die Umkehroperation von Potenzieren: √
behalte die Zahl (Exponent) bei: 2

$\sqrt[5]{x} = 32$

$x = 32^5$

„$\sqrt[5]{}$“ ist auf die rechte Seite zu bringen:
Benutze die Umkehroperation von Wurzelziehen: Potenz
behalte den Zahl (Exponent) bei: 5

Potenzieren und Wurzelziehen sind Umkehroperationen, da beim Auflösen bei beiden der Exponent erhalten bleibt.

$4^x = 64$

$x = \log_4 64$

Exponent auf Basislinie bringen:
Benutze die Umkehroperation von Exponentialoperation: log
behalte die Zahl (Basis) bei: 4

$\log_5 x = 3$

$x = 5^3$

Logarithmus auf die rechte Seite bringen:
Benutze die Umkehroperation von Logarithmus: Exponentialoperation
behalte die Zahl (Basis) bei: 5

Exponentialoperation und Logarithmieren sind Umkehroperationen, da beim Auflösen bei beiden die Basis erhalten bleibt.

Intensivkurs – Mathematik: Potenzgesetze

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Rechen-operationen		

Kürzen von Brüchen und Potenzgesetze

Kürzen von Brüchen

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches aus einem Produkt besteht und die beiden Produkte über gleiche Faktoren verfügen, kann man den jeweiligen Faktor im Zähler und Nenner kürzen und somit die Zahlen des Bruches verkleinern.

$$\frac{504}{1260} = \frac{28 * 18}{20 * 63} = \frac{\overset{4}{\cancel{28}} * \overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{10}{\cancel{20}} * \underset{9}{\cancel{63}}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} * \overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{10}} * \underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{2}{5}$$

28 und 63 haben
den gleichen Faktor 7
20 und 18 haben
den gleichen Faktor 2

4 und 10 haben
den gleichen Faktor 2
9 und 9 haben
den gleichen Faktor 9

Potenzgesetze

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches aus einem Produkt besteht kann man jede Zahl des Zählers und des Nenners in Primfaktoren zerlegen. Die Anzahl der notwendigen Primfaktoren werden durch einen Exponenten angegeben, da es sich um ein Produkt handelt.

$$\frac{504}{1260} = \frac{2^3 * 7 * 3^2}{2^2 * 5 * 7 * 3^2} = \frac{2^3}{2^2} * \frac{1}{5} * \frac{7}{7} * \frac{3^2}{3^2} = 2^1 * \frac{1}{5} * 1 * 1 = \frac{2}{5}$$

Schlußfolgerungen

1. Das Kürzen von Brüchen ist eine Anwendung der Potenzgesetze.
2. Kürzen kann man nur von einem Produkt, da es Potenzgesetze nur für Produkte gibt (die Division macht der Bruchstrich) und nicht für Summen oder Differenzen.
3. Das Ausklammern gemeinsamer Faktoren aus einem Summenausdruck macht den Zähler oder Nenner zum Produkt, so dass die ausgeklammerten Faktoren dann gekürzt werden können. Auch gleiche Summenausdrücke in Zähler und Nenner sind dann Faktoren

Musterbeispiele:

$$\frac{12a^2b^4c + 6\,a^3b^2 - 4a^2b^2}{18a^3b^3c^2 + 9a^4bc - 6a^3bc} = \frac{2\,a^2\,b^2\ \cancel{(6b^2c + 3a - 2)}}{3\,a^3\,b\,c\,\cancel{(6b^2c + 3a - 2)}} = \frac{2\,b}{3ac}$$