Aufgabe	Lösung	Erläuterung

Potenzen

Basis
Exponent

Tritt eine reelle Zahl a in einem Produkt n-mal als Faktor auf, so schreibt man dafür kurz a^n und nennt a^n die "n-te Potenz von a": $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$
Die Zahl a nennt man "Basis" oder Grundzahl,
die Zahl n "Exponent" oder Hochzahl.
Beispiele: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$; $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5^5$; $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^4$

Negative ganzzahlige Exponenten

Für die Exponenten 0 und 1 sowie für negative ganze Zahlen als Exponenten wird festgelegt:

$a^1 = a$; $a^0 = 1$ für $a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$; $n \in \mathbb{Z}$

Beispiele: $5^1 = 5$; $1{,}8^0 = 1$; $(-\sqrt{2})^0 = 1$; $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$ $3{,}75^{-3} = \frac{1}{3{,}75^3}$

Zehnerpotenzen

Eine Potenz mit der Basis 10 und ganzzahligem Exponenten heißt Zehnerpotenz.
Beispiele: $10^3 = 1\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10^6 = 1000\,000$; $10^{12} = 1000\,000\,000\,000$
$10^{-3} = 0{,}001$; $10^{-5} = 0{,}000\,01$; $10^{-6} = 0{,}000\,001$; $10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$
Wird eine betragsmäßig sehr große oder sehr kleine Zahl als Produkt aus einer Zahl a mit $1 \leq | a | < 10$ und einer Zehnerpotenz dargestellt, so spricht man von der "wissenschaftlichen Schreibweise" oder oder vom "schreiben mit abgetrennter Zehnerpotenz".
Beispiele: $3{,}2 \cdot 10^6 = 3\,200\,000$; $-3{,}2 \cdot 10^6 = -3\,200\,000$; $3{,}2 \cdot 10^{-6} = 0{,}000\,003\,2$

n-te Wurzel
Wurzelexponent
Radikand

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ für a > 0 ist definiert als diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ist: $(\sqrt{a})^2 = a$. Entsprechend kann man auch die Basen von n-ten Potenzen als n-te Wurzeln verstehen:
Mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet man diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ist:
$(\sqrt[n]{a})^n = a$ für a > 0 und $n \in \mathbb{N}$. n heißt "Wurzelexponent", a heißt "Radikand".
Beachte: ❶ Das Potenzieren einer nicht negativen reellen Zahl mit n lässt sich durch Ziehen der n-ten Wurzel ("Radizieren") rückgängig machen und umgekehrt.
❷ n-te Wurzeln aus negativen Zahlen sind nicht definiert.
❸ Für $\sqrt[2]{a}$ schreibt man in der Regel $\sqrt{a}$.
Beispiele: : $\sqrt[3]{8} = 2$, denn $2^3 = 8$; $\sqrt[4]{81} = 3$, denn $3^4 = 81$; $\sqrt[5]{-32}$ ist nicht definiert

Rationale Exponenten

Mithilfe der n-ten Wurzel lässt sich für nicht negative Basen a der Potenzbegriff auf rationale Exponenten p (p= m/n; $n \in \mathbb{N}$; $n \neq 0$; $m \in \mathbb{Z}$) erweitern:

❶ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ❷ $a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Beispiele: $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ $(-5)^{\frac{2}{3}}$ ist nicht definiert

Irrationale Exponenten

Potenzen können auch für irrationale Exponenten definiert werden. Eine gute rationale Näherung für den Exponenten liefert auch eine gute Näherung für die Potenz.

Beispiele: $\sqrt{2} = 1{,}414$; $5^{\sqrt{2}} = 5^{1{,}414} = 9{,}74$

Potenzgesetze

Multiplizieren/ Dividieren bei gleicher Basis

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert bzw. dividiert, indem man die Exponenten addiert bzw. subtrahiert und die Basis beibehält:

❶ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ❷ $a^m : a^n = a^{m-n}$

Beispiele: ❶ $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$ ❷ $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

Multiplizieren/Dividieren bei gleichem Exponenten

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert bzw. dividiert, indem man die Basen multipliziert oder dividiert und den Exponenten beibehält.

❶ $a^n \cdot b^n = (a \bullet b)^n$ ❷ $a^n : b^n = (a:b)^n$

Beispiele: ❶ $2^3 \cdot 5^3 = (2 \bullet 5)^3 = 10^3 = 1000$ ❷ $10^3 : 5^3 = (10:5)^3 = 2^3 = 8$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält: $(a^n)^m = a^{n \bullet m}$

Beispiele: $(2^4)^2 = 2^{4 \bullet 2} = 2^8 = 256$ $(2^4)^{-2} = 2^{4 \bullet (-2)} = 2^{-8} = \frac{1}{256}$

Für die Wurzelschreibweise bei rationalen Exponenten folgt daraus (k, $n \in \mathbb{N}$; $n \neq 0$; $m \in \mathbb{Z}$; a>0):

❶ $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$ ❷ $\sqrt[kn]{a^{km}} = (\sqrt[n]{a})^m$

Beispiele: ❶ $(\sqrt[3]{2})^2 = (\sqrt[3]{2^2}) = (\sqrt[3]{4})$ ❷ $(\sqrt[12]{2^8}) = (\sqrt[3]{2^2}) = (\sqrt[3]{4})$

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

1. Potenzen mit natürlichem und ganzzahligen Exponenten

1.1. Berechne folgende Potenzen

Aufgabe:

a) 25 b) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$

c) $(-3)^4$ d) $(-5)^3$

e) 10^1 f) $(-0{,}1)^1$

g) 1.5° h) 0^0

Lösung:

a) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{729}$

c) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

d) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

e) = 10

f) = –0,1

g) = 1

h) unbestimmter Ausdruck, kann so nicht berechnet werden

Erläuterung:

Treten Potenzen auf, deren Exponenten natürliche Zahlen sind, dann beachte:
- Ist die Basis negativ und der Exponent ungerade, dann ist der Potenzwert negativ [Aufg. d), f)].
- Eine Potenz mit dem Exponenten 1 hat den Wert der Basis [Aufg. e), f)].
- Eine Potenz mit dem Exponenten 0 hat den Wert 1 [Aufg. g)].
- Eine Potenz mit der Basis 0 und dem Exponenten 0 ist nicht definiert [Aufg. h)].

1.2. Schreibe ohne negative Exponenten

Aufgabe:

a) 3^{-4} b) $3 \cdot 2^{-5}$

c) $\frac{1}{6^{-10}}$ d) $\frac{3}{8^{-5}}$

e) x^{-1} f) $2x^{-3}$

Lösung:

a) $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$

b) $3 \cdot 2^{-5} = 3 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3}{2^5}$

c) $\frac{1}{6^{-10}} = 6^{10}$

d) $\frac{3}{8^{-5}} = 3 \cdot 8^5$

e) $x^{-1} = \frac{1}{x}$

f) $2\,x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

Erläuterung:

Treten Potenzen mit ganzzahligen Exponenten auf, dann beachte (für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$):

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

Hinweis:
Durch das Ändern des Vorzeichens des Exponenten kannst du eine Potenz vom Nenner in den Zähler bringen und umgekehrt.

1.3. Schreibe ohne Bruchstrich

Aufgabe:

a) $\frac{1}{2^5}$ b) $\frac{3}{10}$

c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{3y}{x^5}$

Lösung:

a) $\frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

b) $\frac{3}{10} = 3 \cdot 10^{-1}$

c) $\frac{1}{x} = x^{-1}$

d) $\frac{3y}{x^5} = 3 \cdot x^{-5} \cdot y$

1.4. Berechne

Aufgabe:

a) $9^3 \cdot 9^{-3}$ b) $(2x)^{-1} \cdot 2x$

c) $1 - (-2)^4$ d) $-(-4)^3$

e) $2 \cdot 6^3$ f) $3 : (-2)^3$

g) $5 \cdot 10^{-5}$ h) $\frac{2}{10^{-6}}$

i) $1 - \frac{12^{-3}}{10}$ j) $\frac{2^{-4}}{3^{-5}}$

Lösung:

a) $9^3 \cdot 9^{-3} = 9^3 \cdot \frac{1}{9^3} = 1$

b) $(2x)^{-1} \cdot 2x = \frac{1}{2x} \cdot 2x = 1$

c) $1 - (-2)^4 = 1 - 16 = 15$

d) $-(-4)^3 = -(-64) = 64$

e) $2 \cdot 6^3 = 2 \cdot 216 = 432$

f) $3 : (-2)^3 = 3 : (-8) = -\frac{3}{8}$

g) $5 \cdot 10^{-5} = \frac{5}{100\,000} = \frac{1}{20\,000}$

h) $\frac{2}{10^{-6}} = 2 \cdot 10^6 = 2\,000\,000$

i) $1 - \frac{12^{-3}}{10} = 1 - \frac{1}{12^3} \cdot \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{1728 \cdot 10}$
$= 1 - \frac{1}{17280} = \frac{17279}{17280}$

j) $\frac{2^{-4}}{3^{-5}} = \frac{3^5}{2^4} = \frac{243}{16}$

Erläuterung:

Beachte beim Rechnen mit und beim Umformen von Potenzen:

❶ a^{-n} ist der Kehrwert von a^n, das heißt:
$a^n \cdot a^{-n} = 1$
[Aufgabe a) und b)]

❷ Vorrangregeln
Potenzrechnung geht vor Punktrechnung und vor Strichrechnung !

2. Zahlen mit Zehnerpotenzen

2.1. Schreibe ohne Potenzen

Aufgabe	Lösung
a) $3 \cdot 10^3$	a) $3 \cdot 10^3 = 3\,000$
b) $5{,}6 \cdot 10^6$	b) $5{,}6 \cdot 10^6 = 5\,600\,000$
c) $1{,}125 \cdot 10^2$	c) $1{,}125 \cdot 10^2 = 112{,}5$
d) $3{,}68 \cdot 10^5$	d) $3{,}68 \cdot 10^5 = 368\,000$
e) $3 \cdot 10^{-3}$	e) $3 \cdot 10^{-3} = 0{,}003$
f) $5{,}6 \cdot 10^{-6}$	f) $5{,}6 \cdot 10^{-6} = 0{,}000\,005\,6$
g) $1{,}125 \cdot 10^{-2}$	g) $1{,}125 \cdot 10^{-2} = 0{,}011\,25$
h) $3{,}68 \cdot 10^{-5}$	h) $3{,}68 \cdot 10^{-5} = 0{,}000\,036\,8$

Zehnerpotenzen sind die Stufenzahlen unseres Stellenwertsystems. 10^n ist eine 1 mit n Nullen, 10^{-n} bedeutet, dass die 1 an n-ter Stelle nach dem Komma steht und davor nur Nullen.

Aufgabe 2.1:
Bei der Multiplikation mit einer Zehnerpotenz wird das Komma verschoben - und zwar um I n I Stellen nach
rechts I links
wenn der Exponent n
positiv I negativ ist.

2.2. Schreibe mit abgetrennter Zehnerpotenz

Aufgabe	Lösung
a) 400 000	a) $400\,000 = 4 \cdot 10^5$
b) 21 000 000	b) $21\,000\,000 = 2{,}1 \cdot 10^7$
c) 20 481	c) $20\,481 = 2{,}048 \cdot 10^4$
d) 975	d) $975 = 9{,}75 \cdot 10^2$
e) 0,000 5	e) $0{,}000\,5 = 5 \cdot 10^{-4}$
f) 0,24	f) $0{,}24 = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$
g) 0,000 060 7	g) $0{,}000\,060\,7 = 6{,}07 \cdot 10^{-5}$
h) 0,001 58	h) $0{,}001\,58 = 1{,}58 \cdot 10^{-3}$

Aufgabe 2.2.:
Eine positive Zahl mit abgetrennter Zehnerpotenz zu schreiben heißt, sie in ein Produkt aus einem Faktor $1 \le a < 10$ und einer Zehnerpotenz zu zerlegen. Gehe so vor:

1. Verschiebe das Komma hinter die von links aus gesehen erste von 0 verschiedene Ziffer.
2. Zähle die Anzahl der Stellen, um die du verschoben hast. Sie gibt den Betrag des Exponenten an.
   Sein Vorzeichen ist
   positiv I negativ
   wenn du das Komma nach
   links I rechts
   verschoben hast.
3. Schreibe als Produkt $a \cdot 10^n$.

2.3. Berechne oder vereinfache so weit wie möglich

Aufgabe	Lösung
a) $3 \cdot 10^6 + 5{,}6 \cdot 10^6$	a) $= (3 + 5{,}6) \cdot 10^6$ $= 8{,}6 \cdot 10^6 = 8\,600\,000$
b) $4 \cdot 2^{-2} - 7 \cdot 2^{-2}$	b) $= (4 - 7) \cdot 2^{-2} = -3 \cdot 2^{-2}$ $= -3 \cdot \frac{1}{2^2} = -\frac{3}{4}$
c) $-6 \cdot 5^n + 8 \cdot 5^n$	c) $= (-6 + 8) \cdot 5^n = 2 \cdot 5^n$
d) $c^{-5} - 5 \cdot c^{-5}$	d) $= (1 - 5) \cdot c^{-5} = -4 \cdot c^{-5}$
e) $a \cdot 2^x + 4a \cdot 2^x$	e) $= (a + 4a) \cdot 2^x = 5a \cdot 2^x$
f) $5a \cdot 4^{2y} - 7b \cdot 4^{2y}$	f) $= (5a - 7b) \cdot 4^{2y}$

Treten in Summen und Differenzen Potenzen auf, so kannst du diese zusammenfassen, wenn Basen und Exponenten gleich sind. Gehe so vor:

1. Klammere die Potenz aus.
2. Berechne oder vereinfache.

Hinweis

Potenzen bezeichnen reelle Zahlen.
Für sie gilt das Distributivgesetz:
$b \cdot a^n \pm c \cdot a^n = (b \pm c) \cdot a^n$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

3. Multiplizieren und Dividieren

3.1. Potenzen mit gleicher Basis

Aufgabe

a) $3^2 \cdot 3^3$ b) $2^5 \cdot 2^{-2}$

c) $a^{-8} \cdot a^9$ d) $5^x \cdot 5^{-2x}$

e) $c^x \cdot c^{x-y}$ f) $6^3 : 6^2$

g) $5^3 \cdot 5^{-2}$ h) $a^{-7} : a^{-1}$

i) $c^x : c^{x-y}$

Lösung

a) $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

b) $2^5 \cdot 2^{-2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$

c) $a^{-8} \cdot a^9 = a^{-8+9} = a^1 = a$

d) $5^x \cdot 5^{-2x} = 5^{x-2x} = 5^{-x} = \frac{1}{5^x}$

e) $c^x \cdot c^{x-y} = c^{x+x-y} = c^{2x-y}$

f) $6^3 : 6^2 = 6^{3-2} = 6^1 = 6$

9) $5^3 : 5^{-2} = 5^{3+2} = 5^5 = 3\,125$

h) $a^{-7} : a^{-1} = a^{-7+1} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$

i) $c^x : c^{x-y} = c^{x-(x-y)} = c^y$

Erläuterung

Um Potenzen mit gleicher Basis zu multiplizieren bzw. zu dividieren, gehe so vor:
1. Potenziere die Basis mit der Summe bzw. der Differenz der Exponenten.
2. Berechne oder vereinfache.

Merke: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$

3.2. Potenzen mit gleichem Exponenten

Aufgabe

a) $3^4 \cdot 2^4$

b) $2^{-3} \cdot 5^{-3}$

c) $(3a)^n \cdot (0{,}5b)^n$

d) $2^3 : 4^3$

e) $8^{-5} : 4^{-5}$

f) $(6a)^n : (2ab)^n$

g) $\frac{(x^2 + x)^3}{8x^3}$

Lösung

a) $= (3 \cdot 2)^4 = 6^4 = 1\,296$

b) $= (2 \cdot 5)^{-3} = 10^{-3} = 0{,}001$

c) $= (3a \cdot 0{,}5b)^n = (1{,}5ab)^n$

d) $= (2 : 4)^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

e) $= (8 : 4)^{-5} = 2^{-5} = (\frac{1}{2})^5 = {}^1/_{32}$

f) $= (6a : 2ab)^n = \left(\frac{6a}{2ab}\right)^n = \left(\frac{3}{b}\right)^n$

g) $= \frac{(x^2 + x)^3}{(2x)^3} = \left(\frac{x^2 + x}{2x}\right)^3 =$

$= \left(\frac{x(x + 1)}{2x}\right)^3 = \left(\frac{x + 1}{2}\right)^3$

Erläuterung

Um Potenzen mit gleichem Exponenten zu multiplizieren bzw. zu dividieren, gehe so vor:
1. Potenziere das Produkt bzw. den Quotienten der Basen mit dem Exponenten.
2. Berechne oder vereinfache.

Merke: $a^n \cdot b^n = (a\, b)^n$
$a^n : b^n = (a : b)^n$

3.3. Potenzieren von Potenzen

Aufgabe

a) $(3^2)^3$ b) $(3^{-2})^3$

c) $((-3)^2)^3$ d) $((-3)^3)^3$

e) $(a^2)^{n+1}$ f) $(b^{x+y})^{x-y}$

Lösung

a) $(32)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$

b) $(3-2)^3 - 3^{-2 \cdot 3} = 3^{-6} = 1/729$

c) $((-3)^2)^3 = (-3)^{2 \cdot 3} = (-3)^6 = 729$

d) $((-3)^3)^3 = (-3)^{3 \cdot 3} = (-3)^9 = -19\,683$

e) $(a^2)^{n+1} = a^{2(n+1)} = a^{2n+2}$

f) $(b^{x+y})^{x-y} = b^{(x+y)(x-y)} = b^{x^2 - y^2}$

Erläuterung

Um Potenzen zu potenzieren, gehe so vor:
1. Potenziere die Basis mit dem Produkt der Exponenten.
2. Berechne oder vereinfache.

Merke: $(a^n)^m = (a)^{n \cdot m}$

3.4. Potenzterme vereinfachen

Aufgabe

a) $2a^3 (4a^2 + 3a^4b - b^5)$

b) $3(3^m - 3^{2n})$

c) $(x^n - x^{n+3}) : x^n$

d) $[(x^{-3} + y^4)(x^{-3} - y^4)]^2$

e) $4(4^x + 2^{2x} - 4)$

Lösung

a) $= 8 \cdot a^3 \cdot a^2 + 6 \cdot a^3 \cdot a^4b - 2 \cdot a^3 \cdot b^5$
$= 8a^5 + 6a^7b - 2a^3b^5$

b) $= 3 \cdot 3^m - 3 \cdot 3^{2n} = 3^{m+1} - 3^{2n+1}$

c) $= x^n : x^n - x^{n+3} : x^n = 1 - x^3$

d) $= [(x^{-3})^2 - (y^4)^2]^2 = (x^{-6} - y^8)^2$
$= (x^{-6})^2 - 2x^6y^8 + (y8)^2$
$= x^{-12} - 2x^{-6}y^8 + y^{16}$
$= \frac{1}{x^{12}} - 2\frac{y^8}{x^6} + y^{16}$

e) $= 2^2 \cdot 2^{2x} + 2^2 \cdot 2^{2x} - 2^2 \cdot 2^2$
$= 2^{2x+2} + 2^{2x+2} - 2^4$
$= 2 \cdot 2^{2x+2} - 2^4 = 2^{2x+3} - 16$

Erläuterung

Um Terme mit Potenzen zu vereinfachen, kannst du alle bekannten Regeln zur Termumformung anwenden, insbesondere
- das Distributivgesetz.
- die binomischen Formeln.

Bei manchen Termen ist es angebracht, zunächst einmal für gleiche Basen zu sorgen [Aufg. e].
Vereinfache anschließend mithilfe der Potenzgesetze wenn es möglich ist.

Merke: Für Summen und Differenzen gibt es keine Potenzgesetze. Da sind nur die Binomischen Formeln möglich.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

4. Wurzelausdrücke

4.1. Berechne ohne Taschenrechner

Aufgabe

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{64}$

c) $\sqrt[5]{\frac{1}{100\,000}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$

e) $\sqrt[4]{0{,}0001}$

Lösung

a) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

b) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

c) $\sqrt[5]{\frac{1}{100\,000}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^5} = \frac{1}{10}$

d) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{5}{4}$

e) $\sqrt[4]{0{,}0001} = \sqrt[4]{10^{-4}} = 0{,}1$

Erläuterung

Lässt sich der Radikand als Potenz mit dem Exponenten n schreiben, kannst du auch ohne Taschenrechner die n-te Wurzel ziehen. Für $a \geq 0$ gilt:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

4.2. Schreibe als Wurzel

Aufgabe

a) $3^{\frac{1}{5}}$

b) $3^{-\frac{1}{5}}$

c) $a^{\frac{1}{10}}$

d) $(xy)^{\frac{1}{3}}$

e) $15^{\frac{5}{6}}$

f) $15^{-\frac{5}{6}}$

g) $25^{-0{,}75}$

h) $(xy)^{1{,}6}$

Lösung

a) $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

b) $3^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$

c) $a^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{a}$

d) $(xy)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{xy}$

e) $15^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{15^5}$

f) $15^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{15^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{15^5}}$

g) $25^{-0{,}75} = 25^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{25^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{25^3}}$

h) $(xy)^{1{,}6} = (xy)^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{(xy)^8}$

Erläuterung

Für Potenzen mit rationalen Exponenten gilt ($n \in \mathbb{N}$; $n > 1$; $m \in \mathbb{Z}$; $a > 0$):

$$\mathbf{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

n nennt man **Wurzelexponent**,
a^m heißt **Radikand**.

Aufgabe 4.2.
Sollst du eine Potenz als Wurzel schreiben, gehe so vor:

1. Forme zunächst so um, dass der Exponent eine positive Bruchzahl ist [(Aufg. b), f), g), h)].
2. Den Radikanden erhältst du, indem du die Basis mit dem Zähler potenzierst.
3. Notiere den Nenner als Wurzelexponenten.

4.3. Schreibe als Potenz

Aufgabe

a) $\sqrt[4]{18}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{18}}$

c) $\sqrt{b}$

d) $\frac{1}{\sqrt{b}}$

e) $\sqrt[4]{18^3}$

f) $\frac{1}{\sqrt[4]{18^3}}$

g) $\sqrt{b^5}$

h) $\frac{1}{\sqrt{b^5}}$

Lösung

a) $\sqrt[4]{18} = 18^{\frac{1}{4}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{18}} = 18^{-\frac{1}{4}}$

c) $\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{b}} = b^{-\frac{1}{2}}$

e) $\sqrt[4]{18^3} = 18^{\frac{3}{4}}$

f) $\frac{1}{\sqrt[4]{18^3}} = 18^{-\frac{3}{4}}$

g) $\sqrt{b^5} = b^{\frac{1}{5}}$

h) $\frac{1}{\sqrt{b^5}} = b^{-\frac{1}{5}}$

Erläuterung

Aufgabe 4.3.
Sollst du eine Wurzel als Potenz schreiben, gehe so vor:

- Potenziere die Basis mit dem Bruch, dessen Zähler der Exponent des Radikanden und dessen Nenner der Wurzelexponent ist.

4.4. Berechne mit dem Taschenrechner

Aufgabe

a) $18^{\frac{3}{4}}$

b) $28^{-\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt[4]{18}$

d) $\frac{1}{\sqrt[6]{9^2}}$

Lösung

a) $18^{\frac{3}{4}} = 18^{0{,}75} \approx 8{,}74$

b) $28^{-\frac{2}{3}} = 1 / 28^{0{,}66} \approx 0{,}11$

c) $\sqrt[4]{18} = 18^{0{,}25} \approx 2{,}06$

d) $\frac{1}{\sqrt[6]{9^2}} = 9^{0{,}33} \approx 0{,}48$

Erläuterung

Um Potenzwerte näherungsweise mit dem Taschenrechner zu bestimmen, kannst du so vorgehen:

1. Schreibe Wurzeln als Potenzen $a^{m/n}$. [Aufg. c), d)].
2. Gib ein: a m/n . Benutze für m/n die Bruchtaste, evtl. auch die Vorzeichentaste, oder schreibe als Dezimalzahl. Die – Taste heißt oft auch x^y – Taste.
3. Ist m = 1, so kannst du auch mit der Shift – Taste arbeiten.

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

4.5. Umformen mithilfe der Potenzgesetze

Aufgabe

a) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[6]{6^7} : \sqrt[3]{6^2}$

c) $a^{\frac{4}{9}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$

d) $\sqrt[4]{x^3} : \frac{1}{\sqrt{x^5}}$

e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$

f) $a^{-\frac{4}{9}} : (ab)^{-\frac{4}{9}}$

g) $\left(a^{-\frac{4}{9}}\right)^{\frac{3}{4}}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{25^9}}}}$

Lösung

a) $= 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$

b) $= 6^{\frac{7}{6}} : 6^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

c) $= a^{\frac{4}{9}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{10}{9}} = \sqrt[9]{a^{10}}$

d) $= x^{\frac{3}{4}} : x^{-\frac{5}{2}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{5}{2}} = x^{\frac{13}{4}} = \sqrt[4]{x^{13}}$

e) $= 3^{\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3$

f) $= \left(\frac{a}{ab}\right)^{-\frac{4}{9}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{4}{9}} = b^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{b^4}$

g) $= a^{-\frac{4}{9}\bullet\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

h) $= \left((25\ )\right) = 5^{2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = 5$

Erläuterung

Für Potenzen mit rationalen Exponenten gelten die gleichen Gesetze wie für solche mit ganzzahligen Exponenten. Terme, die Wurzeln enthalten, kannst du übersichtlich umformen, wenn du zunächst die Wurzeln als Potenzen schreibst.

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$a^p : a^q = a^{p-q}$

$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$

$a^p : b^p = (a : b)^p$

$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

4.6. Wurzeln vereinfachen

Aufgabe

a) $\sqrt[4]{18^8}$

b) $\sqrt[5]{6^{15}}$

c) $\sqrt[18]{8^6}$

d) $\frac{1}{\sqrt[6]{9^{15}}}$

e) $\sqrt[3]{27a^6}$

f) $\sqrt[4]{32}$

g) $\sqrt[6]{a^{21}}$

h) $\sqrt[6]{256a^{16}}$

Lösung

a) $\sqrt[4]{18^8} = 18^{\frac{8}{4}} = 18^2 = 324$

b) $\sqrt[5]{6^{15}} = 6^{\frac{15}{5}} = 6^3 = 216$

c) $\sqrt[18]{8^6} = (2^3)^{\frac{6}{18}} = 2^1 = 2$

d) $\frac{1}{\sqrt[6]{9^{15}}} = (3^2)^{-\frac{15}{6}} = 3^{-5} = \frac{1}{243}$

e) $\sqrt[3]{27a^6} = ((3a^2)^3)^{\frac{1}{3}} = (3a^2)^1 = 3a^2$

f) $\sqrt[4]{32} = (2^5)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{4}} = 2^1\, 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$

g) $\sqrt[6]{a^{21}} = a^{\frac{21}{6}} = a^{\frac{7}{2}} = a^3\, a^{\frac{1}{2}} = a^3\sqrt{a}$

h) $\sqrt[6]{256a^{16}} = ((2a^2)^8)^{\frac{1}{6}} = (2a^2)^{\frac{8}{6}}$
$= (2a^2)^{\frac{4}{3}} = 2a^2\,(2a^2)^{\frac{1}{3}} = 2a^2\sqrt[3]{2a^2}$

Erläuterung

Sollst du Wurzeln so weit wie möglich vereinfachen oder berechnen, gehe so vor:

1. Prüfe, ob sich der Radikand als Potenz mit möglichst großem Exponenten schreiben lässt [Aufg. c) bis f), h)].
2. Schreibe die Wurzel als Potenz, berechne den Exponenten und kürze ihn. Ist der Exponent nun ganzzahlig, rechne aus [Aufg. a) bis e)].
3. Ist der Exponent nicht ganzzahlig, dann schreibe ihn als Bruch oder gemischte Zahl.
4. Schreibe Potenzen mit gemischten Zahlen im Exponenten als Produkt:
   $a^{n+p} = a^n \cdot a^p$ $(n \in \mathbb{N})$.
5. Berechne oder vereinfache.

4.7. Potenz– und Wurzelgleichungen

Aufgabe

a) $x^6 = 729$

b) $x^6 + 100 = 36$

c) $x^3 = 729$

d) $x^3 + 100 = 36$

Lösung

a) $x^6 = 729 \quad \Leftrightarrow$
$x = -\sqrt[6]{729}$ und $x = +\sqrt[6]{729}$
$\mathbb{L} = \{ -3 ; 3 \}$

b) $x^6 + 100 = 36 \;\Leftrightarrow\; x^6 = -64$
$\mathbb{L} = \{ \ \}$

c) $x^3 = 729 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{729}$; $\mathbb{L} = \{ 9 \}$

d) $x^3 + 100 = 36 \Leftrightarrow x^3 = -64$
$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-64|}$; $\mathbb{L} = \{ -4 \}$

Erläuterung

Eine Potenzgleichung der Form $x^n = a$ $(n \in \mathbb{N})$ hat die Lösung:

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	$-\sqrt[n]{a}$; $\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	0	0
$a < 0$	keine Lösung	$-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}$