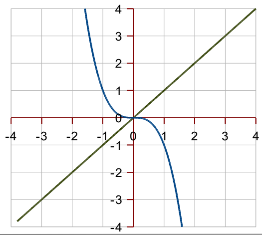
Aufgabe	Lösung	Erläuterung

Eigenschaften von Funktionen

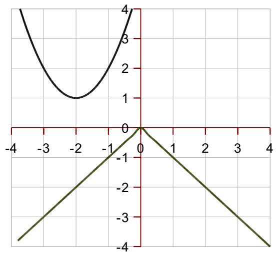
Monotonie

❶ Monotonie:
Werden die x-Werte größer, dann werden die Funktionswerte von f_1 kleiner, die von f_2 größer. Die Funktion f_1 nennt man **monoton fallend**, die Funktion f_2 nennt man **monoton steigend**.



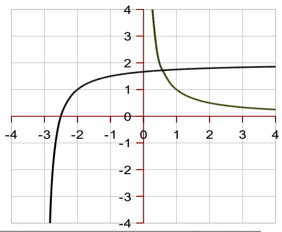
Symmetrie

❷ Symmetrie:
Dreht man den Graphen von f_2 um 180° um irgendeinen seiner Punkte ("Punktspiegelung"), so wird er auf sich selbst abgebildet.
Der Graph von f_2 ist punktsymmetrisch zu jedem seiner Punkte, der Graph von f_1 ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt.
Spiegelt man den Graphen von f_3 an der Geraden zu x = –2, so wird er auf sich selbst abgebildet.
Der Graph von f_3 ist achsensymmetrisch zur Geraden zu x = –2, der Graph von f_4 ist achsensymmetrisch zur y-Achse.



Asymptote

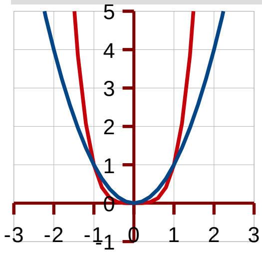
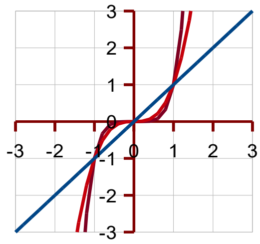
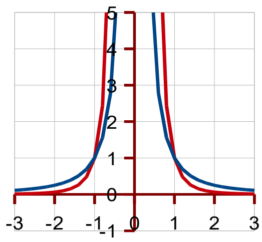
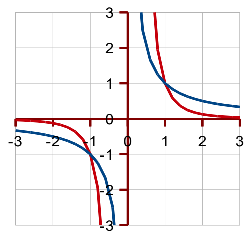
❸ Asymptote:
Je größer x wird, desto enger "schmiegt" sich der Graph von fs an die x-Achse an, ohne sie jemals zu berühren.
Die x-Achse ist eine Asymptote des Graphen von f_5, ebenso die y-Achse. Die Geraden zu x = –3 und y = 2 sind Asymptoten des Graphen von f_6.



Potenzfunktionen

Funktionen der Form $f(x) = x^n$ und $f(x) = x^{-n}$, heißen Potenzfunktionen n–ten Grades

Sie haben folgende Eigenschaften

	$f(x) = x^n$		$f(x) = x^{-n}$	
	n gerade	**n ungerade**	**n gerade**	**n ungerade**
Graphen				
Eigenschaften	♦ D = ℝ; W= $ℝ_+$ ♦ f ist monoton fallend für x ≤ 0 und monoton steigend für x ≥ 0. ♦ Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse. ♦ Der Graph geht durch die Punkte P_1(1 | 1), P_2(–1 I1) und P_3(0 | 0).	♦ D = ℝ ; W = ℝ ♦ f ist überall monoton steigend. ♦ Der Graph ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt. ♦ Der Graph geht durch die Punkte P_1(1 | 1), P_2(–1I –1) und P_3(0|0).	♦ D = ℝ \ {0}; W = $ℝ^+$ ♦ f ist monoton steigend für x < 0 und monoton fallend für x > 0. ♦ Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse. ♦ Der Graph geht durch die Punkte P_1(1|1) und P_2(-1|1). ♦ Die x-Achse und die y-Achse sind Asymptoten des Graphen.	♦ D = ℝ \ {0}; W = ℝ \ {0} ♦ f ist monoton fallend für x < 0 und monoton fallend für x > 0. ♦ Der Graph ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt. ♦ Der Graph geht durch die Punkte P_1(1|1) und P_2(-1|-1). ♦ Die x-Achse und die y-Achse sind Asymptoten des Graphen

Parabel
Hyperbel

Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ heißt für n > 1 Parabel n-ter Ordnung.

Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = x^{-n}$ heißt für n ≠ 0 Hyperbel n-ter Ordnung.

Wurzelfunktionen

Schränkt man die Definitionsmenge einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ auf nicht negative x-Werte ein und spiegelt deren Graphen an der Geraden zu y = x, so erhält man den Graphen der Funktion $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

Umkehrfunktion

Funktionen der Form $g(x) = \sqrt[n]{x}$, n ∈ ℕ , n > 1 heißen "Wurzelfunktionen".

Die Funktionen $f(x) = x^n$ und $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ nennt man auch **Umkehrfunktionen** voneinander, weil gilt: $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt[n]{x})^n = x$ und $f^{-1}(f(x)) = \sqrt[n]{x^n}$.
Die Graphen von Wurzelfunktionen sind monoton steigend und gehen durch die Punkte P(0|0) und P(1|1). Es ist D = W = $ℝ_+$.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

1. Funktionen der Form f(x) = a x^n

1.1. Funktionen mit positivem Exponenten in ein Koordinatensystem einzeichnen

a) $f_1(x) = 0{,}5x^4$

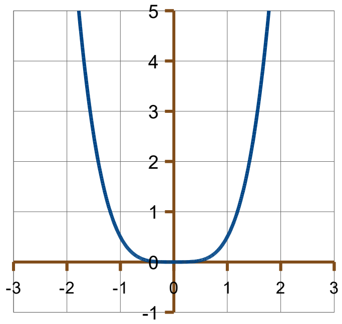
b) $f_2(x) = 0{,}5x^3$

c) $f_3(x) = -0{,}5x^3$

a) Wertetabelle

x	–1,8	–1	0	1	1,8
$f_1(x)$	5,2	0,5	0	0,5	5,2

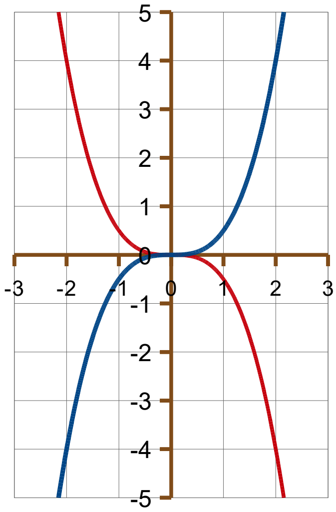
Graph



b), c) Wertetabellen

x	–2	–1	0	1	2
$f_2(x)$	–4	–0,5	0	0,5	4
$f_3(x)$	4	0,5	0	–0,5	–4

Graph



Sollst du den Graphen einer Funktion f(x) = a · x^n (n ∈ ℤ ; a ∈ ℝ; a,n ≠ 0): zeichnen, dann lege zunächst eine Wertetabelle an.

Beachte

- ▶ Die Graphen von Potenzfunktionen können sehr schnell steigen, fallen oder abflachen. Es ist daher zweckmäßig, beim Zeichnen einen relativ kleinen Ausschnitt um den Nullpunkt zu wählen.
- ▶ Jeder Graph geht durch den Punkt P(1| a). Für positives n geht er auch durch P(0 | 0), für gerades n auch durch P(–1 I a), für ungerades n auch durch P(–1| –a).
- ▶ Für **gerades n** ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, d. h. es gilt: f(–x) = f(x)
  Auf der einen Seite der Symmetrieachse ist der Graph monoton fallend, auf der anderen monoton steigend.
- ▶ Für ungerades n ist der Graph punktsymmetrisch zum Nullpunkt, d. h. es gilt: f(–x) = – f(x).
  Die Funktion ist für x < 0 und für x > 0 monoton steigend (a>0, n>0 bzw. a<0, n<0) oder monoton fallend (a >0, n<0 bzw. a<0, n>0).
- ▶ Für negatives n ist die Funktion an der Stelle x = 0 nicht definiert. Die x-Achse und die y-Achse sind Asymptoten des Graphen.
- ▶ Den Graphen von g(x) = –a · x^n erhält man durch Spiegelung des Graphen von f(x) = a · x^n an der x-Achse.

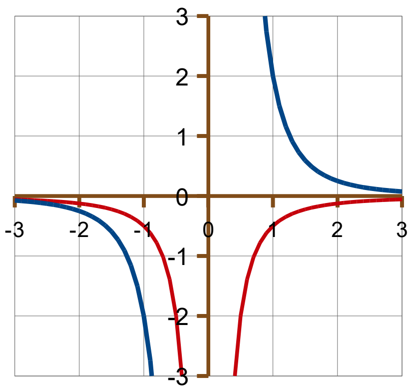
1.2. Funktionen mit negativem Exponenten in ein Koordinatensystem einzeichnen

a) $f_1(x) = 2x^{-3}$

b) $f_2(x) = -0{,}5x^{-2}$

Wertetabelle

x	–2	–1,5	–1	1	1,5	2
$f_1(x)$	–0,25	–0,6	–2	2	0,6	0,25
x	–2	–1	–0,5	0,5	1	2
$f_2(x)$	–0,125	–0,5	–2	–2	0,5	0,125



Hinweis

Der Graph einer Funktion der Form f(x) = a · x^n; (n ∈ ℤ ; a ∈ ℝ; a,n ≠ 0) heißt:

- ▶ Gerade für n = 1.
- ▶ Parabel für n > 1.
- ▶ Hyperbel für n < 0.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

2. Funktionen der Form $f(x) = (x - d)^n + e$

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^4$ und $g(x) = x^{-9}$.

a) Verschiebe die Graphen von f und g gedanklich um
❶ drei Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben.
❷ drei Einheiten nach links und um eine Einheit nach unten.

Gib die Gleichungen der neuen Funktionen f_1, g_1, f_2 und g_2 an.

b) Beschreibe die Symmetrieeigenschaften der Graphen.

c) Gib für die Funktionen g_1 und g_2 die Definitionsmengen und die Asymptoten ihrer Graphen an.

a) $f_1(x) = (x - 3)^4 + 1$

$g_1(x) = (x - 3)^{-9} + 1 = \dfrac{1}{(x - 3)^9} + 1$

$f_2(x) = (x + 3)^4 - 1$

$g_2(x) = (x + 3)^{-9} - 1 = \dfrac{1}{(x + 3)^9} - 1$

b) Der Graph von f_1 ist achsensymmetrisch zur Geraden x=3.

Der Graph von f_2 ist achsensymmetrisch zur Geraden x= –3.

Der Graph von g_1 ist punktsymmetrisch zu P(3 I 1).

Der Graph von g_2 ist punktsymmetrisch zu P(–3| –1).

c) Definitionsbereich:
g_1: $D = \mathbb{R} \setminus \{ 3 \}$
g_2: $D = \mathbb{R} \setminus \{ -3 \}$

Asymptoten:
g_1: x = 3; y = 1
g_2: x = –3; y = –1

Verschiebt man den Graphen einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ um d Einheiten nach rechts (links) und um e Einheiten nach oben (unten), dann hat die neue Funktion die Gleichung

f(x) = (x + d)" ± e mit

► – d, wenn nach rechts; + d, wenn nach links verschoben wird.
► + e, wenn nach oben; - e, wenn nach unten verschoben wird.

Original- und Bildgraph haben die gleiche Form und die gleichen geometrischen Eigenschaften:

► **Symmetrie**: Für gerade n ist der Bildgraph achsensymmetrisch zur Geraden x = ± d.
Für ungerade n ist der Bildgraph punktsymmetrisch zu P(±d I ±e).
► **Asymptoten**: Für negative n hat der Graph Asymptoten, nämlich die Geraden zu x = ± d und y = ± e.

3. Funktionen der Form $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$ mit $D = \mathbb{R}_+$

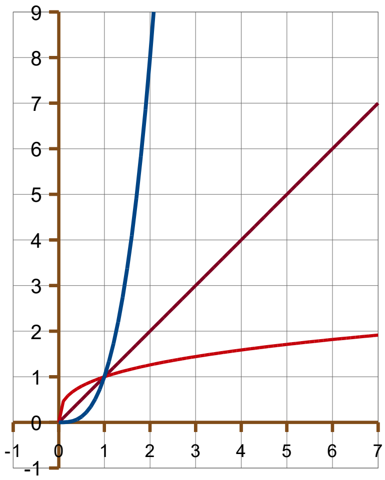
a) Zeichne den Graphen und spiegele ihn an der Geraden y=x.

b) Wie lautet die Gleichung des Bildgraphen?

c) Verschiebe den Bildgraphen gedanklich um eine Einheit nach rechts.
Wie lautet die Gleichung der neuen Funktion g?

d) Von welcher Funktion ist g die Umkehrfunktion?

a)



b) $y = x^3$
x und y vertauschen: $x = y^3$
auflösen: $x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

d) $y = \sqrt[3]{x-1}$
x und y vertauschen: $x = \sqrt[3]{y-1}$
auflösen: $x = \sqrt[3]{y-1}$
$x^3 = y - 1 \Leftrightarrow y = x^3 + 1$
$g^{-1}(x) = x^3 + 1$

Schränkt man die Definitionsmenge einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ auf nicht negative x-Werte ein und spiegelt deren Graphen an der Geraden y = x, so erhält man den Graphen der Funktion
$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.
Solche Funktionen nennt man **"Wurzelfunktionen"**.

► Beim Spiegeln wird der Punkt P(xly) auf den Punkt P'(y I x) abgebildet, d.h. es gilt:
$f^{-1}(y) = \ = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[n]{x^n} = x$

Die Funktion f^{-1} nennt man deswegen auch Umkehrfunktion der Funktion f.
► Die Umkehrfunktion einer Funktion der Form $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ ist $f^{-1}(x) = x^{\frac{n}{m}}$.

► Die Gleichung der Umkehrfunktion einer Funktion f erhältst du, wenn du in der Gleichung y = f(x) x und y vertauschst und die neue Gleichung nach y auflöst.
► Für das Verschieben von Wurzelfunktionen gilt Entsprechendes wie für Potenzfunktionen (s. Aufg.).

