1. Rechenregeln für Matrizen

(1) Matrizenaddition

Sind zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben, können diese miteinander addiert werden. Es folgt:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+6 & 5+3 & 2+9 \\ 8+1 & 7+4 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 \\ 9 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wichtig dabei ist, dass nur Matrizen miteinander addiert werden können, die die gleichen Zeilen- und Spaltenanzahlen haben.

(2) Subtraktion von Matrizen

Analog zur Matrizenaddition können auch eine Matrix von einer anderen subtrahiert werden. Seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 17 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ und

$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben und soll B von A subtrahiert werden, ergibt sich

$$A - B = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 17 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-4 & 9-3 & 17-9 \\ 8-5 & 10-7 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch hier sei darauf zu achten, dass nur solche Matrizen voneinander subtrahiert werden können, die sie die gleichen Zeilen- und Spaltenanzahl haben

(3) s-Multiplikation

Soll die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ beispielsweise verdoppelt werden, gilt:

$$s \cdot A = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 7 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 16 & 14 & 6 \end{pmatrix}.$$

Jedes Element der Matrix ist mit dem Faktor vor der Matrix zu multiplizieren.

(4) Matrizenmultiplikation

Sollen die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ miteinander multipliziert werden, gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4+2\cdot 1 & 3\cdot 5+2\cdot 2 \\ 1\cdot 4+1\cdot 1 & 1\cdot 5+1\cdot 2 \\ 0\cdot 4+3\cdot 1 & 0\cdot 5+3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 19 \\ 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wichtig ist hierbei, dass zwei Matrizen nur dann multipliziert werden können, wenn die eine Matrix so viele Spalten wie die andere Zeilen besitzt.

2. Determinanten

Unter einer Determinante einer quadratischen Matrix versteht man eine reelle Zahl, die nach festgelegten Regeln zu bestimmen ist. Für zwei und dreireihige Matrizen lässt sich die Determinante sehr einfach berechnen und hilft bei der Bestimmung der Inversen.

Eine Determinante einer Matrix wird durch senkrechte Striche gekennzeichnet, zum Unterschied zur Matrix, die durch runde Klammern gekennzeichnet ist.

2 – reihige Determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3\,(-1) - 5\,(-2) = 7$$

3 – reihige Determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die ersten beiden Spalten werden am Ende noch einmal angehängt:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23} - (\, a_{13}\, a_{22}\, a_{31} + a_{23}\, a_{32}\, a_{11} + a_{33}\, a_{12}\, a_{21})$$

Die drei Diagonalen von links oben nach rechts unten werden jeweils multipliziert und dann addiert. Die drei Diagonalen von links unten nach rechts oben werden multipliziert und dann addiert, und dann insgesamt subtrahiert.

Das ist die sogenannte Sarrussche Regel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot2\cdot3 + 2\cdot1\cdot2 + 3\cdot3\cdot1 - (2\cdot2\cdot3 + 1\cdot1\cdot1 + 3\cdot3\cdot2)$$

Jede Determinante besitzt ein unsichtbares Vorzeichenfeld, das links oben mit einem + beginnt und dann nach rechts und nach unten abwechselnd + und - enthält.

$$\begin{array}{l} + - + - + - \ldots. \\ - + - + - + \ldots. \\ + - + - + - \ldots. \\ \ldots.. \end{array}$$

Das Feldvorzeichen kann man aus der Zeilen- und Spaltennummer bestimmen.

$(-1)^{i+k}$ wobei i und k die jeweilige Spalten- und Zeilennummer ist.

Unter der zum Element a_{ik} gehörigen **Unterdeterminante D_{ik}** einer dreireihigen Matrix A versteht man die Determinante der Matrix, die aus A durch Streichen der i - ten Zeile und der k - ten Spalte entsteht. Der Wert der Unterdeterminante D_{jk} wird mit dem Vorzeichen ihrer Position i; k multipliziert. Daraus entsteht der Wert A_{ik}, der die **Adjunkte** der Determinante von A ist zu ihrer Position i;k.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$$

Die Adjunkte ist die Unterdeterminante von A zur Position i;k , die mit dem Vorzeichen ihrer Position zu multiplizieren ist (Feldvorzeichen).

Die Inverse einer Matrix lässt sich aus der Determinante und der Matrix der Adjunkten bestimmen.

Ob eine Matrix invertierbar ist, zeigt sich, wenn die Determinante nicht gleich 0 ist.
Inverse Matrizen existieren, wenn überhaupt, nur für quadratische Matrizen.
Mit einer Inversen Matrix kann man ein Gleichungssystem nach ihren Unbekannten auflösen.

3. Inverse Matrix

Kehrt man den „normalen" Prozess von einem Ausgangsprodukt zu einem Endprodukt um, erhält man über nun ausgehend von den Endprodukten über A^{-1} die Ausgangsprodukte.

$$\text{Ausgangsprodukte} \xleftarrow{\textit{Prozess } (A^{-1})} \text{Endprodukte.}$$

Man erhält also über diese inverse Matrix den Schritt zuvor.
Wird eine quadratische Matrix A mit ihrer inversen Matrix A^{-1} multipliziert, erhält man die Einheitsmatrix E. Folgender Zusammenhang wird dadurch erkennbar:

$$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A\,.$$

2 – reihige Matrix

Matrix A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Determinante:

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 5(-2) = 7$$

Adjunkte A_{11}

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

A_{11} = (-1)$^{1+1}$ (-1) = -1

Adjunkte A_{21}

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

A_{21} = (-1)$^{2+1}$ (5) = -5

Adjunkte A_{12}

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

A_{12} = (-1)$^{1+2}$ (-2) = 2

Adjunkte A_{22}

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

A_{22} = (-1)$^{2+2}$ (3) = 3

Matrix der Adjunkten

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix der Adjunkten

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Inverse Matrix ist die Transponierte Matrix der Adjunkten dividiert durch die Determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

3 – reihige Matrix

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \bullet (-1) \bullet 2 + 4 \bullet (-1) \bullet 1 + 3 \bullet 2 \bullet 3 - (\, 1 \bullet (-1) \bullet 3 + 3 \bullet (-1) \bullet 3 + 2 \bullet 2 \bullet 4)$$

$$= -6 - 4 + 18 + 3 + 9 - 16 = 4$$

Adjunkte A_{11}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\,(-2+3) = 1$

Adjunkte A_{21}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\,(4+1) = -5$

Adjunkte A_{31}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\,(6+1) = 7$

Adjunkte A_{12}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\,(8-9) = 1$

Adjunkte A_{22}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\,(6-3) = 3$

Adjunkte A_{32}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\,(9-4) = -5$

Adjunkte A_{12}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\,(-4+3) = -1$

Adjunkte A_{22}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\,(-3-6) = 9$

Adjunkte A_{32}

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\,(-3-8) = -11$

Matrix der Adjunkten

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 9 & -11 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix der Adjunkten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 9 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix :
Transponierte Matrix der Adjunkten dividiert durch die Determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 9 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

4. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eine besondere Anwendung von Matrizen besteht im Lösen von Gleichungssystemen. Unter einem Ausdruck A x = y kann an z.B. verstehen: gesucht ist ein Vektor x damit bei einer Multiplikation mit der Matrix A der Vektor y herauskommt. Genau das ist die Lösung eines Gleichungssystems.
In diesem Zusammenhang spielen Gleichungssysteme der folgenden Art eine besondere Rolle: $A\,x = \lambda\,x$.
„Wie muss der Vektor x aussehen, so dass bei einer Multiplikation mit x als Ergebnis ein Vielfaches des Vektors x herauskommt.“ Die Vervielfachungswerte λ (ist eine reelle Zahl) werden als **Eigenwerte** bezeichnet und die Vektoren x, die eine solche Bedingung erfüllen als **Eigenvektoren**. Diese Eigenvektoren besitzen eine ganze Reihe interessanter Eigenschaften bezüglich der Matrix A, die uns hier aber nicht weiter interessieren sollen.

Von den hier betrachteten stochastischen Matrizen sind die Eigenwerte und Eigenvektoren interessant, ohne, dass die Begriff wieder mal in irgend einem Kontext auftreten.
Eigenwerte gibt es so viele wie Zeilen oder Spalten in der Matrix vorhanden sind.
Eigenwerte gibt es nur bei quadratischen Matrizen.
Die Eigenwerte erzeugen aus der Matrix die Eigenvektoren.

Die Berechnungen, die hier mit den stochastischen Matrizen durchgeführt werden , laufen genau auf die Berechnung der Eigenvektoren hinaus. Die bei den stochastischen Matrizen auftretenden stationären Lösungen sind genau die Eigenvektoren zum Eingenwert $\lambda = 1$.

5. Einstufige Prozesse

Zur Beschreibung einstufiger Prozesse durch Matrizen ist lediglich nur eine Matrix nötig. Dabei beschreibt diese Matrix A den Prozess eines Endprodukts zu dessen Ausgangsprodukt:

$$\text{Endprodukte} \xrightarrow{\textit{Prozess (A)}} \text{Ausgangsprodukte}$$

Mittels eines Gozintographen („goes into“ = „was hineingeht“) kann eine Tabelle und aus dieser die notwendige Matrix A erstellt werden. Dabei besteht eine solche Matrix immer aus m Zeilen und n Spalten (m x n-Matrix):

$$A = \begin{array}{c} \text{Endprodukte.} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \text{Ausgangsprodukte}$$

Diese Matrix A wird häufig auch als **Prozess-** oder **Bedarfsmatrix** bezeichnet.

Die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ für die Produktion von so und so viel Endprodukten x benötigt man y Mengen aus Ausgangsprodukten. Damit rechnet man „von“ Endprodukten „nach“ Ausgangsprodukten, so dass mit der Prozessmatrix immer aus <u>vorhandenen Zahlen für Endprodukte</u> die <u>Zahlen für die Ausgangsprodukte</u> ermittelt werden.
Die Matrix gibt an, für ein Endprodukt aus Spalte i benötigt man eine Anzahl Ausgangs-produkte aus Zeile j.

Die Interpretation „von“ und „nach“ ist entgegengesetzt zu den Pfeilen des Gozinto Graphen

Der Vektor, mit dem die Matrix multipliziert werden muss hat die gleiche Struktur wie die Spalten der Matrix. In diesem Fall Anzahl der Endprodukte. Die Multiplikation des Spaltenvektors mit der Matrix liefert in jeder Zeile <u>die Menge des Ausgangsproduktes Zeile,</u> die benötigt um <u>alle Mengen Endprodukte</u> herzustellen. Das Ergebnis ist damit wieder eine Spalte in der Struktur der Matrixzeilen.

Die umgekehrte Gleichung $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$ berechnet die Anzahl der Endprodukte x, die man aus den Ausgangsprodukten y herstellen kann.

$$\text{Endprodukte} \xrightarrow{\textit{Prozess } (A^{-1})} \text{Ausgangsprodukte}$$

Merkmale:
- Die Matrizen haben in Zeilen und Spalten verschiedene Merkmale (Rohstoffe, Zwischenprodukte, Endprodukte)
- Die Elemente der Matrizen sind meist ganzzahlig, wenn es sich um Stückzahlen handelt,
- oder Dezimalzahlen, wenn es sich um „lose“ Mengen handelt.
- Inverse Matrizen sind möglich, wenn die Ausgangsmatrix eine quadratische Matrix ist und ermöglichen die Rückrechnung von vorhandenen Ausgangsprodukten auf die damit mögliche Anzahl herstellbarer Endprodukte.
- Spaltensummen oder Zeilensummen machen keinen Sinn.
- Potenzen von Matrizen machen ebenfalls keinen Sinn

Beispiel:

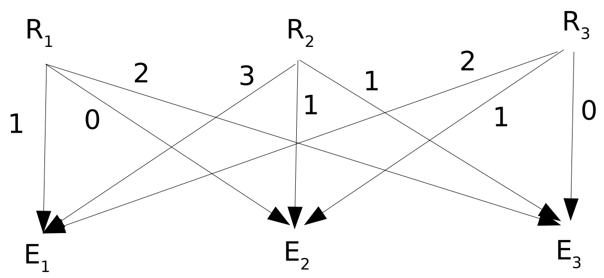
Drei Endprodukte (E_1 , E_2 und E_3) sollen aus drei Ausgangsprodukten/Rohstoffen (R_1, R_2 und R3) gewonnen werden.

- für E_1 sind 1 Einheit R_1, 3 Einheiten R_2 und 2 Einheiten R_3 nötig;
- für E_2 sind 0 Einheiten R_1, 1 Einheit R_2 und 1 Einheit R_3 zu verwenden; und
- für E_3 sind 2 Einheiten R_1, 1 Einheit R_2 und 0 Einheiten R_3 zu gebrauchen.

Nun soll aus diesen Informationen eine Matrix erstellt werden und die Bedeutung des Eintrags a_{32} erklärt werden.

Um eine Matrix A nun zu erstellen, kann aus einem Gozintographen eine Tabelle angefertigt werden.

Goesinto-Graph



Tabelle

	von		
nach		E_1	E_2	E_3
	R_1	1	0	2
	R_2	3	1	1
	R_3	2	1	0

Aus dieser Tabelle folgt unmittelbar die (Prozess-)Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei handelt es sich sogar um eine „quadratische Matrix“, da sie gleich viele Zeilen wie Spalten enthält.
Der Eintrag a_{32} (dritten Zeile und zweite Spalte) ist in dieser Matrix der Wert 1. Er bedeutet, dass für das Endprodukt 2 (E_2) eine Einheit des Rohstoffs 3 (R_3) benötigt wird.

Soll eine bestimmte Menge an Endprodukten hergestellt werden, gibt man diese in einem Spaltvektor $\vec{x}$ an. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y},$$

wobei $\vec{y}$ die Menge an Ausgangsprodukten angibt.

Beispiel:

Gesucht ist die benötigte Menge an Ausgangsprodukten, wenn im bereits beschriebenen Verfahren 20 Einheiten E_1, 30 Einheiten E_2 und 25 Einheiten E_3 gebraucht werden.

Um diesen Bedarf zu bestimmen, muss zunächst der Spaltenvektor $\vec{x}$ *bestimmt werden. Dieser ergibt sich zu:*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Gemäß des Ansatzes $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ *folgt für die Menge an Ausgangsprodukten:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix} = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdot 20 + 0 \cdot 30 + 2 \cdot 25 \\ 3 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 25 \\ 2 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 0 \cdot 25 \end{pmatrix} = \vec{y}, \quad \text{und somit:} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 70 \\ 115 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Folglich werden für den benötigten Bedarf von 20 Einheiten E_1, 30 Einheiten E_2 und 25 Einheiten E_3 also 70 Einheiten R_1, 115 Einheiten R_2 und 70 Einheiten R_3 gebraucht.

6. Mehrstufige Prozesse

Zur Beschreibung mehrstufiger Prozesse sind mindestens zwei Matrizen A und B (zweistufige Prozesse) nötig. Dabei beschreibt die Matrix A, wie aus bestimmten Ausgangsprodukten zunächst Zwischenprodukte entstehen:

$$\text{Ausgangsprodukte} \xrightarrow{\textit{Prozess (A)}} \text{Zwischenprodukte.}$$

Die Matrix B beschreibt, wie aus diesen Zwischenprodukten die Endprodukte entstehen:

$$\text{Zwischenprodukte.} \xrightarrow{\textit{Prozess (B)}} \text{Endprodukte}$$

Um zu wissen, wie viele Ausgangsprodukte nötig sind, um die Endprodukte herzustellen, muss man eine „Rohprodukt-Endprodukt-Matrix" C erstellen. Diese ergibt sich aus der Multiplikation der Matrizen A und B: $C = A \bullet B$

$$\text{Ausgangsprodukte} \xrightarrow{\textit{Prozess (C)}} \text{Endprodukte.}$$

Beispiel:

Gegeben sei zum einen die Gewinnung dreier Zwischenprodukte (Z_1, Z_2 und Z_3) aus drei Ausgangsprodukten/Rohstoffen (R_1, R_2 und R_3) und zum anderen die Gewinnung dreier Endprodukten (E_1, E_2 und E_3) aus den Zwischenprodukten. Den folgenden Tabellen können die Informationen zur Gewinnung der Zwischen- und der Endprodukte entnommen werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	4	6	5
R_2	1	3	0
R_3	5	2	4

Tab.1: Gewinnung der Zwischenprodukten

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	0
Z_2	6	4	0
Z_3	3	5	1

Tab.2: Gewinnung der Endprodukte

Gesucht ist nun, wie viele Rohstoffe man für die einzelnen Endprodukte benötigt.

Um herauszufinden, wie viele Rohstoffe die einzelnen Endprodukte bilden, müssen zunächst zwei Matrizen angefertigt werden. Aus der ersten Tabelle lässt sich eine Matrix A erstellen, die die Gewinnung der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen beschreibt:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Des Weiteren lässt sich aus der zweiten Tabelle eine Matrix B erstellen, die die Gewinnung der Endprodukte aus den Zwischenprodukten beschreibt:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun soll eine dritte Matrix C beschreiben, aus wie vielen Rohstoffen die einzelnen Endprodukte hergestellt werden. Diese „Rohstoff-Endprodukt-Matrix" C ergibt sich aus der Multiplikation der Matrizen A und B. Es folgt der allgemeine Ansatz:

$$C = A \bullet B$$

und somit :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix C ergibt sich also:

$$C = \begin{pmatrix} 59 & 53 & 5 \\ 20 & 13 & 0 \\ 34 & 33 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese gibt Aufschluss darüber, aus wie vielen Rohstoffen die jeweiligen Endprodukte nun hergestellt werden. E_1 zum Beispiel wird aus 59 Einheiten R_1, 20 Einheiten R_2 und 34 Einheiten R_3 hergestellt.

Geht man nun von einem Auftrag aus, der eine bestimmte Anzahl jeweiliger Endprodukte $\vec{x}$ benötigt, muss die „Rohprodukt-Endprodukt-Matrix“ C mit einem Spaltenvektor multipliziert werden: $C \cdot \vec{x} = \vec{y}$,

wobei $\vec{y}$ dann die notwendige Menge an Ausgangsprodukten/Rohstoffen darstellt, um den benötigten Bedarf an Endprodukten herstellen zu können.

Beispiel:

Gegeben sei bereits beschriebene Gewinnung an Zwischen- und Endprodukten. Im folgenden sei die Menge an Rohstoffen gesucht, um den Bedarf von 20 Einheiten E_1, 50 Einheiten E_2 und 35 Einheiten E_3 herstellen zu können.

Zunächst muss dazu die „Rohprodukt-Endprodukt-Matrix“ C bestimmt werden. Diese ergibt sich aus vorangegangenem Beispiel zu:

$$C = \begin{pmatrix} 59 & 53 & 5 \\ 20 & 13 & 0 \\ 34 & 33 & 4 \end{pmatrix}$$

Anhand des benötigten Bedarfs von 20 Einheiten E_1, 50 Einheiten E_2 und 35 Einheiten E_3, lässt sich ein Spaltenvektor $\vec{x}$ bestimmen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 35 \end{pmatrix}$.

Um nun herauszufinden, wie viele Rohstoffe denn für diesen Bedarf gebraucht werden, muss die „Rohprodukt-Endprodukt-Matrix“ C mit dem Spaltenvektor $\vec{x}$ multipliziert werden. Es ergibt sich nach dem Ansatz $C \cdot \vec{x} = \vec{y}$:

$$C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 59 & 53 & 5 \\ 20 & 13 & 0 \\ 34 & 33 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4005 \\ 1050 \\ 2470 \end{pmatrix}.$$

Für den beschriebenen Bedarf von 20 Einheiten E_1, 50 Einheiten E_2 und 35 Einheiten E_3 werden also 4005 Einheiten R_1, 1050 Einheiten R_2 und 2470 Einheiten R_3 benötigt.

Zusammenfassung

Verflechtungsmatrizen

A	in den Spalten dieser (m,p) – Matrix: Bedarf pro ME an Rohstoffen für die Zwischenprodukte
B	in den Spalten dieser (p,n) – Matrix: Bedarf pro ME an Zwischenprodukten für die Endprodukte
C	in den Spalten dieser (m,n) – Matrix: Bedarf pro ME an Rohstoffen für die Endprodukte

Verbrauchs- und Produktionsvektoren

r	für die Rohstoffe
z	für die Zwischenprodukte
p	für die Endprodukte

Es gilt:

$r = A\ z$

$z = B\ p$

$r = C\ p$

Rohstoff- Zwischenprodukt-Matrix $A_{[m \times p]}$

	Rohstoff je Zwischenprodukt			
Rohstoff	Z_1	Z_2	Z_3	... Z_p
R_1				
R_2				
R_3				
R_m				

Rohstoffverbrauch pro Rohstoff $r_{[m \times 1]}$

r_1

r_2

r_3

r_m

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B_{[p \times n]}$

	Zwischenp je Endprodukt			
Zwischenp.	E_1	E_2	E_3	... E_n
Z_1				
Z_2				
Z_3				
Z_p				

Anzahl der Zwischenprodukte $z_{[p \times 1]}$

z_1

z_2

z_3

z_p

Rohstoff- Endprodukt-Matrix $C_{[m \times n]}$

	Rohstoff je Endprodukt			
Rohstoff	E_1	E_2	E_3	... E_n
R_1				
R_2				
R_3				
R_m				

Anzahl der Endprodukte $p_{[n \times 1]}$

p_1

p_2

p_3

p_n

Die **Spalten** der Matrizen sind immer die Produkte die hergestellt werden,
die **Zeilen** sind immer die Produkte die man zum Herstellen braucht.

Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A

Multiplikation			Ergebnis		
Zeilenvektor	**Matrix A**	**Spaltenvektor**	**Zeilenvektor**	**Spaltenvektor**	**Reelle Zahl**
	$Z_1\ Z_2\ Z_3 \dots Z_p$ R_1, R_2, R_3, R_m Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A_{[m \times p]}$	z_1, z_2, z_3, z_p Anzahl der Zwischenprodukte $z_{[p \times 1]}$ aus Matrix B1		r_1, r_2, r_3, r_m Rohstoffe für alle Zwischenprodukte pro Rohstoff $r_{[m \times 1]}$	
$k_{R1}\ k_{R2}\ k_{R3}\ k_{Rm}$ Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}^{T}$	$Z_1\ Z_2\ Z_3 \dots Z_p$ R_1, R_2, R_3, R_m Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A_{[m \times p]}$		$Z_1k_R\ Z_2k_R\ Z_3k_R \dots Z_pk_R$ Rohstoffkosten pro Zwischenprodukt		
$k_{R1}\ k_{R2}\ k_{R3}\ k_{Rm}$ Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}^{T}$	$Z_1\ Z_2\ Z_3 \dots Z_p$ R_1, R_2, R_3, R_m Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A_{[m \times p]}$	z_1, z_2, z_3, z_p Anzahl der Zwischenprodukte $z_{[p \times 1]}$ aus Matrix B1			Rohstoffkosten für alle Zwischenprodukte
$k_{R1}\ k_{R2}\ k_{R3}\ k_{Rm}$ Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}^{T}$		r_1, r_2, r_3, r_m Rohstoffverbrauch pro Rohstoff für alle Zwischenprodukte $r_{[m \times 1]}$ aus Matrix A1			Rohstoffkosten für alle Zwischenprodukte

Rohstoffverbrauch für alle Zwischenprodukte aufgelistet nach Rohstoffen

$$A_{[m;p]}\ z_{[p;1]} = r_{[m;1]}$$

Rohstoffkosten für alle Zwischenprodukte aufgelistet nach Zwischenprodukten

$$k_R^{T}{}_{[1;m]}\ A_{[m;p]} = k_{RZ}^{T}{}_{[1;p]}$$

Rohstoffkosten für alle benötigten Rohstoffe

$$K_{R[1;1]} = k_{RZ}^{T}{}_{[1;p]}\ z_{[p;1]}$$

$$= k_R^{T}{}_{[1;m]}\ A_{[m;p]}\ z_{[p;1]}$$

$$= k_R^{T}{}_{[1;m]}\ r_{[m;1]}$$

Bei der Dimension von Transponierten Vektoren ist folgendes zu beachten:

$$k_{R\,[m;1]}^{T} = k_R^{T}{}_{[1;m]}$$

durch das Transponieren ändern sich die Zeilen und Spaltenzahlen, deshalb ist darauf zu achten, ob das Transponierzeichen vor oder nach der Dimensionsangabe steht.

[m;1] : m Zeilen, 1 Spalte = Spaltenvektor
[1; m] : 1 Zeile , m Spalten = Zeilenvektor
[1;1] : reelle Zahl

Die **Spalten** der Matrizen sind immer die Produkte die hergestellt werden,
die **Zeilen** sind immer die Produkte die man zum Herstellen braucht.

Die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B

Multiplikation			Ergebnis		
Zeilenvektor	**Matrix B**	**Spaltenvektor**	**Zeilenvektor**	**Spaltenvektor**	**Reelle Zahl**
	E_1 E_2 E_3 … E_n Z_1 Z_2 Z_3 Z_p Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B_{[p \times n]}$	p_1 p_2 p_3 p_n Anzahl der Endprodukte $p_{[n \times 1]}$		z_1 z_2 z_3 z_p Zwischenprodukte für alle Endprodukte pro Zwischenprodukt $z_{[p \times 1]}$	
k_{Z1} k_{Z2} k_{Z3} … k_{Zp} Kosten pro Zwischenprodukt $k_{Z\,[p \times 1]}^{T}$	E_1 E_2 E_3 … E_n Z_1 Z_2 Z_3 Z_p Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B_{[p \times n]}$		E_1k_Z E_2k_Z E_3k_Z … E_nk_Z Gesamtkosten Zwischenprodukte pro Endprodukt		
k_{Z1} k_{Z2} k_{Z3} … k_{Zp} Kosten pro Zwischenprodukt $k_{Z\,[p \times 1]}^{T}$	E_1 E_2 E_3 … E_n Z_1 Z_2 Z_3 Z_p Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B_{[p \times n]}$	p_1 p_2 p_3 p_n Anzahl der Endprodukte $p_{[n \times 1]}$			Gesamtkosten Zwischenprodukte für alle Endprodukte
k_{Z1} k_{Z2} k_{Z3} … k_{Zp} Kosten pro Zwischenprodukt $k_{Z\,[p \times 1]}^{T}$		z_1 z_2 z_3 z_p Anzahl der Zwischenprodukte für alle Endprodukte $z_{[p \times 1]}$ aus Matrix B1			Gesamtkosten Zwischenprodukte für alle Endprodukte

Benötigte Zwischenprodukte für alle Endprodukte aufgelistet nach Zwischenprodukten

$$B_{[p;n]}\, p_{[n;1]} = z_{[p;1]}$$

Zwischenproduktkosten für alle Endprodukte aufgelistet nach Endprodukten

$$k_{Z\,[1;p]}^{T}\; B_{[p;n]} = k_{ZE\,[1;n]}^{T}$$

Zwischenproduktkosten für alle benötigten Endprodukte

$$K_{Z[1;1]} = k_{Z\,[1;p]}^{T}\; z_{[p;1]} = k_{Z\,[1;p]}^{T}\, B_{[p;n]}\, p_{[n;1]} = k_{ZE\,[1;n]}^{T}\; p_{[n;1]}$$

Die **Spalten** der Matrizen sind immer die Produkte die hergestellt werden,
die **Zeilen** sind immer die Produkte die man zum Herstellen braucht.

Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C

Multiplikation			Ergebnis		
Zeilenvektor	**Matrix C**	**Spaltenvektor**	**Zeilenvektor**	**Spaltenvektor**	**Reelle Zahl**
	$E_1\ E_2\ E_3\ \dots\ E_n$ R_1, R_2, R_3, R_m Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{[m \times n]}$	p_1, p_2, p_3, p_n Anzahl der Endprodukte $p_{[n \times 1]}$		r_{1E}, r_{2E}, r_{3E}, r_{mE} Anzahl der Rohstoffe für alle Endprodukte $r_{[m \times 1]}$	
$k_{R1}\ k_{R2}\ k_{R3}\ k_{Rm}$ Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}^{T}$	$E_1\ E_2\ E_3\ \dots\ E_n$ R_1, R_2, R_3, R_m Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{[m \times n]}$		$E_1k_R\ E_2k_R\ E_3k_R\ \dots\ E_nk_R$ Rohstoffkosten pro Endprodukt		
$k_{R1}\ k_{R2}\ k_{R3}\ k_{Rm}$ Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}^{T}$	$E_1\ E_2\ E_3\ \dots\ E_n$ R_1, R_2, R_3, R_m Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{[m \times n]}$	r_1, r_2, r_3, r_m Anzahl der Rohstoffe für alle Endprodukte $r_{[m \times 1]}$			Gesamtkosten Rohstoff für alle Endprodukte
$k_{R1}\ k_{R2}\ k_{R3}\ k_{Rm}$ Kosten pro Rohstoff $k_{R\,[m \times 1]}^{T}$		r_{1E}, r_{2E}, r_{3E}, r_{mE} Anzahl der Rohstoffe für alle Endprodukte $r_{[m \times 1]}$ aus Matrix C1			Gesamtkosten Rohstoff für alle Endprodukte
$k_{E1}\ k_{E2}\ k_{E3}\ k_{En}$ Kosten pro Endprodukt $k_{E\,[n;1]}^{T}$		p_1, p_2, p_3, p_n Anzahl der Endprodukte $p_{[n \times 1]}$			Gesamtkosten Endprodukte für alle Endprodukte

Rohstoffverbrauch für alle Endprodukte aufgelistet nach Rohstoffen

$$C_{[m;n]}\ p_{[n,1]} = r_{[m,1]}$$

Rohstoffkosten für alle Endprodukte aufgelistet nach Endprodukten

$$k_{R\ [1,m]}^{T}\ C_{[m;n]} = k_{RE\ [1,n]}^{T}$$

Rohstoffkosten für alle benötigten Rohstoffe

$$K_{R[1,1]} = k_{RE\ [1,n]}^{T}\ p_{[n,1]} \qquad = k_{R\ [1,m]}^{T}\ C_{[m;n]}\ p_{[n,1]} = k_{R\ [1,m]}^{T}\ r_{[m,1]}$$

Endproduktkosten

$$K_{E[1,1]} = k_{E\ [1,n]}^{T}\ p_{[n,1]}$$

Gesamtkosten

$$k_R^T\, C\, p + k_Z^T\, B\, p + k_E^T\, p =$$
$$(k_R^T\, C + k_Z^T\, B + k_E^T)\, p$$

Erlöse

$$e^T p$$

7. Stochastische Prozesse

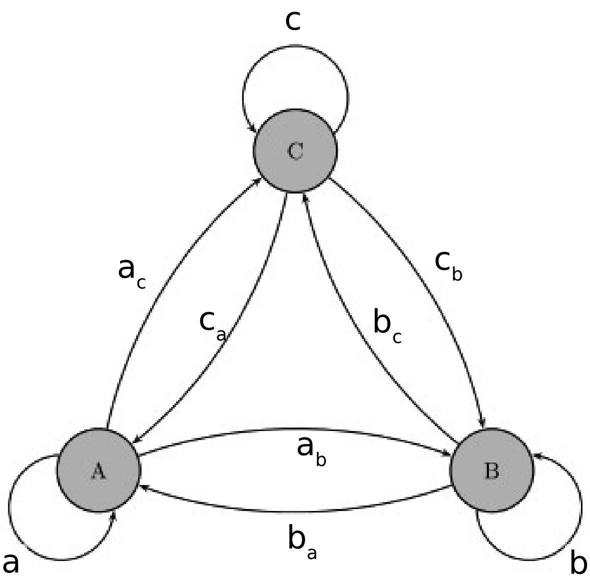
Ein stochastischer Prozess wird **Austauschprozess** genannt, da bei diesen Prozessen die Gesamtzahlen gleich bleiben (Summe der Elemente in jeder Spalte ist 1) und lediglich nur unter verschiedenen Kategorien getauscht wird. In diesen Austauschprozessen werden die Übergänge von Zuständen beschrieben. In den bisherigen Produktionsprozessen wurde aus einer Menge an Ausgangsprodukten eine andere Menge an Endprodukten gefertigt. Hier wird der Übergang von einem Zustand in den nächsten Zustand durch Matrizen beschrieben.
Die Matrizen sind demnach mit sogenannten Übergangswahrscheinlichkeiten gefüllt.
Da man bei Austauschprozessen oft an langfristigen Entwicklungen interessiert ist, wird immer dieselbe stochastische Matrix P verwendet.

7.1. Gozinto-Graph eines stochastischen Prozesses

Merkmale des Gozinto-Graphen:

- Alle Zahlen an den Pfeilen entsprechen einer Wahrscheinlichkeit des Übergangs von einem Zustand in einen anderen.
- Die Summe aller von einem Zustand ausgehenden Pfeile ist Eins.
- Nicht alle Pfeile müssen existieren.

Die an den Pfeilen eingeführte Bezeichnung führt dann bei der Austauschmatrix zu folgendem Aussehen:



7.2. Matrix eines stochastischen Prozesses

Bei einer Matrix P handelt es sich dann um eine **stochastische Matrix** (auch **Übergangsmatrix** genannt), wenn

Hierzu gibt es einen Startvektor $\vec{x}$ der die Verteilung am Tag 0 zeigt.

Multipliziert mit der stochastischen Matrix P ergibt sich die Verteilung am 1. Tag.

Dies wieder mit P multipliziert ergibt die Verteilung am 2. Tag; usw. (**Markoff´sche Kette**).

Für die Verteilung zu einem bestimmten Tag kann auch mit $P^t \vec{x}$ (t in Tagen) gerechnet werden.

$$\begin{array}{cc} & \text{nach: } \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{von:} \\ A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} a & b_a & c_a \\ a_b & b & c_b \\ a_c & b_c & c \end{pmatrix} \end{array}$$

Zu einem Austauschprozess gehört die stochastische Matrix, für die gilt:

- die Matrix quadratisch ist,
- für jedes Element a der Matrix < ≤ a ≤ 1 gilt und
- die Summe der Elemente in jeder Spalte 1 beträgt.
- Die Matrizen haben in Zeilen und Spalten gleiche Merkmale (Eigenschaften), die Matrizen sind immer quadratisch
- Die Elemente der Matrizen sind positiv und liegen zwischen 0 und 1, da alle Objekte nach der Transformation noch vorhanden sind, es sind aber auch keine dazugekommen.
- Eine jeweilige „von“ Spalte teilt sich in die „nach“ Zeilen auf. Aus diesem Grund muss jede Spaltensumme gleich 1 sein, da alle sich irgendwo wiederfinden müssen.
- Inverse Matrizen sind möglich, nicht jede quadratische Matrix muss eine Inverse besitzen.
- Potenzen von Matrizen stelle eine Mehrfachdurchführung des Prozesses dar.

7.3. Grenzmatrix eines stochastischen Prozesses

Des weiteren gehört zu einem Austauschprozess eine sogenannte Grenzmatrix G und eine Grenzverteilung $\vec{g}$. Diese stabile Grenzverteilung existiert, wenn es unter den stochastischen Matrizen P, P^2 ,P^3 ,... eine Matrix gibt, in der eine Zeile aus ausschließlich positiven Elementen besteht.

Streben die Potenzen von P gegen eine Matrix G, so ist G die **Grenzmatrix**:

$$\lim_{t\to\infty} P^t = G .$$

Ist dies der Fall, existieren auch **stabile Verteilungen** $\vec{x}^*$, die auch **Grenzverteilung** genannt wird. Für diese gilt:

$$P \bullet \vec{x}^* = \vec{x}^*$$

Die Elemente des **Fixvektors** $\vec{x}^*$ sind Vielfache der Elemente der Spalte der Grenzmatrix.

Noch einige Anmerkungen und Spezialfälle

- Eine Verteilung für die M x = x gilt nennt man stationäre Verteilung (bzw. Eigenvektor der Matrix M zum Eigenwert 1). Allgemein nennt man nämlich einen Vektor x ≠ 0 , der die Gleichung M x = λ x (mit λ einer reellen Zahl) erfüllt, einen „Eigenvektor“ der Matrix M zum „Eigenwert“ λ.
- Wiederholt man die Anwendung einer Übergangsmatrix auf einen Vektor kann sich unab-hängig vom Startvektor eine stabile Verteilung ergeben – man nennt sie Grenzverteilung. Symbolisch: M x_n = x_{n+1} und lim x_n = g. Für diesen Vektor gilt also:
  M g = g . Die Grenzverteilung ist also ebenfalls eine stationäre Verteilung. Da die wieder-holte Anwendung des Vektors auch als Anwendung des Startvektors auf das n - fache Produkt der Übergangsmatrix ausgedrückt werden kann, gilt ebenso:
  $\lim_{n\to\infty} M^n = G$ mit G der „Grenzmatrix“, die die Bedingung G x_0 = g erfüllt. Dies bedeutet, dass ein beliebiger Startvektor auf den Grenzvektor abgebildet wird! Allerdings muss dieser Grenzwert nicht immer existieren bzw. nicht jede Übergangsmatrix besitzt eine Grenzmatrix. Es gilt der mathematische Satz: Wenn in irgendeiner Potenz der Übergangsmatrix M alle Elemente von Null verschieden sind, existiert die Grenzmatrix und besteht aus lauter gleichen Spalten.
- Wie oben schon erwähnt, besitzt nicht jede Übergangsmatrix eine Grenzmatrix bzw. eine zugehörige Grenzverteilung.

7.3.1. Grenzmatrix einer 2 x 2 Matrix

Für ein stabile Verteilung $\vec{x}^*$ muss die Gleichung M $\vec{x}^*$ = $\vec{x}^*$ oder umgeschrieben

$$\boxed{(M - E)\,\vec{x}^* = 0}$$

oder als Eigenwertgleichung : $(M - \lambda E)\,\vec{x}^* = 0$

Interpretation: Gesucht ist der Eigenvektor $\vec{x}^*$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Aus der Theorie zu den Eigenwerten ist bekannt : Die Eigenvektoren sind niemals eindeutig, sondern sie stellen immer eine Parameterlösung dar. Für jeden Eigenvektor ist auch jedes beliebige Vielfache wieder Eigenvektor

Mit jedem Vektor $\vec{x}^*$ erfüllt auch jeder Vektor k • $\vec{x}^*$ die Gleichung für den Eigenvektor.

Aus der Theorie zur Lösung von Gleichungssystemen weiß man, dass bei einem Gleichungs-system nur dann eine Parameterlösung entstehen kann, wenn nach dem Gauß'schen Algorithmus die letzte Zeile zu Null wird. Das bedeutet auch, dass man die letzte Zeile gleich ignorieren kann und nur mit den verbleibenden Zeilen arbeiten muss.

Für eine zweireihige stochastische Matrix sieht das Bild folgendermaßen aus:

$$M = \begin{array}{cc} & \text{von :} \\ & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \text{nach: } \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix} \end{array}$$

p ist die Wahrscheinlichkeit, die von A wieder nach A führt und q die Wahrscheinlichkeit, die von B nach b führt. Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von A nach B 1 – p und für den Übergang von B nach A 1 – q .
Außerdem geht es um den Eigenwert = 1, der eingesetzt werden kann:

$$(M - 1 \bullet E) = 0$$

$$\begin{pmatrix} p - 1 & q \\ 1-p & 1-q-1 \end{pmatrix} \vec{x}^* = 0$$

Da man die letzte Zeile prinzipiell vernachlässigen kann, reicht es, wenn man die erste Zeile betrachtet:

$$(p - 1)\, x^*_1 + q\, x^*_2 = 0$$

oder umgestellt und

$$q\, x^*_2 = -(p - 1)\, x^*_1$$
$$q\, x^*_2 = (1 - p)\, x^*_1$$

An dieser einfachen Gleichung sieht man sofort, dass <u>eine</u> Lösung ist :

$$x^*_2 = 1 - p \quad \text{und } x^*_1 = q$$

Für eine solche Matrix ergibt sich als stationärer Zustand der Vektor $\begin{pmatrix} q \\ 1-p \end{pmatrix}$

Dieser stationäre Zustandsvektor ist dann noch mit einem Faktor zu multiplizieren, so dass die Summe der Spalte 1 ergibt.

7.3.2. Grenzmatrix einer 3 x 3 Matrix

Auch für eine 3 x 3 Matrix gelten die gleichen Überlegungen:

Für ein stabile Verteilung $\vec{x}^*$ muss die Gleichung $M\,\vec{x}^* = \vec{x}^*$ oder umgeschrieben

$$\boxed{(M - E)\,\vec{x}^* = 0}$$

oder als Eigenwertgleichung : $(M - \lambda E)\,\vec{x}^* = 0$

Interpretation: Gesucht ist der Eigenvektor $\vec{x}^*$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Für diese Berechnungen wird die in 5.1. eingeführte 3 x 3 Matrix benutzt:

$$M = \begin{pmatrix} a & b_a & c_a \\ a_b & b & c_b \\ a_c & b_c & c \end{pmatrix}$$

umgewandelt in eine Matrix für den Eigenwert 1 ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} a-1 & b_a & c_a \\ a_b & b-1 & c_b \\ a_c & b_c & c-1 \end{pmatrix}$$

Die Spaltensumme der Matrix M beträgt 1. Jetzt wird in jeder Spalte in einem Element eine 1 subtrahiert, so dass die Spaltensumme jetzt 0 beträgt. Vor her hatte die Matrix M linear unabhängige Zeilen, jetzt nicht mehr, da die Summe aller Spalten 0 ergibt, lässt sich das Gleichungssystem umformen: III' = I + II + III

$$\begin{pmatrix} a-1 & b_a & c_a \\ a_b & b-1 & c_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit zu einem Gleichungssystem, das noch einmal mit dem Gauß'schen Algorithmus bearbeitet werden muss.

$$\begin{array}{r|l} (a-1)\,x_1 + \quad b_a\,x_2 + c_a\,x_3 = 0 & \cdot\ (-a_b) \\ a_b\,x_1 + (b-1)\,x_2 + c_b\,x_3 = 0 & \cdot\ (a-1) \end{array} \quad +$$

$$(a-1)\,x_1 + \qquad b_a\,x_2 + \qquad c_a\,x_3 = 0$$

$$\left(-a_b\,b_a + (b-1)(a-1)\right) x_2 + \left((-a_b)c_a + c_b(a-1)\right) x_3 = 0$$

Da rechts eine 0 steht und es eine Parameterlösung mit $x_3 = t$ geben muss, kann man auch x_3 gleich 1 setzen, da keine konstanten Lösungsteile dazukommen werden. Für konstante Lösungsteile muß die rechte Seite von 0 verschieden sein. Der Parameter t kann dann an den Lösungsvektor einfach angefügt werden.

$$(a-1)\,x_1 + b_a\,x_2 + c_a\,x_3 = 0$$

$$\left(-a_b\,b_a + (b-1)(a-1)\right)x_2 + \left((-a_b)c_a + c_b(a-1)\right)x_3 = 0$$

die zweite Zeile muss jetzt für $x_3 = 1$ nach x_2 aufgelöst werden.

$$\left(-a_b\,b_a + (b-1)(a-1)\right)x_2 = -\left((-a_b)c_a + c_b(a-1)\right)$$

Aus Gründen, die später klar werden werden in die Inhalte der Klammern in eine andere Reihenfolge umgeschrieben:

$$\left((b-1)(a-1) - a_b\,b_a\right)x_2 = -\left(c_b(a-1) - a_b\,c_a\right)$$

aufgelöst nach x_2 ergibt sich :

$$\boxed{x_2 = -\frac{c_b(a-1) - a_b\,c_a}{(b-1)(a-1) - a_b\,b_a}}$$

Diese Formel kann sich auf diese Weise niemand merken, aber auf eine andere Weise.

Die Matrix des Gleichungssystems hatte ursprünglich folgendes Aussehen:

$$\begin{pmatrix} a-1 & b_a & c_a \\ a_b & b-1 & c_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dabei wurde noch nicht die Bedingung berücksichtigt, dass die Summe aller xi zusammen 1 sein muss: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Diese Gleichung kann man jetzt als dritte Gleichung hinzufügen, so dass folgende Matrix entsteht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & b_a & c_a & 0 \\ a_b & b-1 & c_b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

denn die rechten Seiten der ersten beiden Zeilen sind 0. Außerdem ist jetzt gesichert, dass die Summe der einzelnen Werte 1 ergibt.

Für eindeutig lösbare Gleichungssysteme gibt es die sogenannte Cramersche Regel, mit der man solche Gleichungssysteme lösen kann:

1. Berechne die Determinante der Koeffizientenmatrix (ohne rechte Seite)
2. Setze die rechte Seite spaltenweise in jede Spalte ein und berechne die drei Determinanten.
3. Dividiere diese drei Determinanten durch die Determinante der Koeffizientenmatrix

Das Ergebnis dieser Division ist die Lösung für x_1, x_2 und x_3.

Für diese Zwecke wird zunächst auf die Berechnung der Koeffizientenmatrix verzichtet. Die Berechnung erfolgt auf einem anderen Weg.

Es soll zunächst der Zähler des Bruches betrachtet werden:

$$c_b(a-1) - a_b\,c_a = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & c_a \\ a_b & 0 & c_b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Setzt man in die zweite Spalte die rechte Seite der Gleichung ein, erhält man die obige Matrix. Man streicht in der Ausgangsmatrix **die letzte Zeile** und die **x_2 Spalte** und berechnet von der verbleibenden Adjunkten die (2 – reihige) Determinante. (Laplace'scher Entwicklungssatz für Determinanten)

Jetzt wird der Nenner des Bruches betrachtet:

$$(b-1)(a-1) - a_b\,b_a = \begin{vmatrix} a-1 & b_a & 0 \\ a_b & b-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Jetzt setzt man in die dritte Spalte die rechte Seite ein.
Man streicht in der Ausgangsmatrix **die letzte Zeile** und die **x_3 Spalte** und berechnet von der verbleibenden Adjunkten die (2 – reihige) Determinante.

Aus diesem Zusammenhang kann man für die x_1 Komponente das analoge Lösungsschema anwenden:

Man streicht in der Ausgangsmatrix **die letzte Zeile** und die **x_1 Spalte** und berechnet von der verbleibenden Adjunkten die (2 – reihige) Determinante.

$$\begin{vmatrix} 0 & b_a & c_a \\ 0 & b-1 & c_b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b_a\,c_b - (b-1)\,c_a$$

als Zähler des Bruches für x_1. Der Nenner bleibt gleich. Damit kann man sich die Lösungen über die Berechnung der Adjunkten Determinanten merken:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_a & c_a \\ 0 & b-1 & c_b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & b_a & 0 \\ a_b & b-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_a & c_a \\ b-1 & c_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & b_a \\ a_b & b-1 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a-1 & 0 & c_a \\ a_b & 0 & c_b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & b_a & 0 \\ a_b & b-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a-1 & c_a \\ a_b & c_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & b_a \\ a_b & b-1 \end{vmatrix}}$$

$x_3 = 1$

Bei dem Wert von x_2 das Minuszeichen nicht vergessen, bei x_1 steht kein Minuszeichen !

Jeder Vielfache von einem Eigenvektor ist wieder ein Eigenvektor. Deshalb kann man diese Lösung mit einem Faktor multiplizieren und erhält wieder einen Eigenvektor. Es sollen alle x Werte mit dem Nenner der ersten beiden Brüche multipliziert werden. das ergibt dann folgende Lösung:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & b_a & c_a \\ 0 & b-1 & c_b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad x_2 = -\begin{vmatrix} a-1 & 0 & c_a \\ a_b & 0 & c_b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad x_3 = \begin{vmatrix} a-1 & b_a & 0 \\ a_b & b-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Diese Lösung kann man sich gut merken.

Jeder dieser Werte multipliziert mit einem Faktor liefert einen Eigenvektor für die Matrix und damit eine stationäre Lösung, wenn der Faktor so gewählt wird, dass die Summe der drei Werte 1 ergibt.

(Der Hintergrund dieses Lösungsweges ist die Cramersche Regel zum Lösen von Gleichungs-systemen. Statt der Nullzeile ergänzt man die Zeile $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
Damit wird das Gleichungssystem wieder eindeutig lösbar. Bei den angegebenen Determinanten handelt es sich um die Determinanten des Zählers, die entstehen, wenn man die rechte Seite spaltenweise in die Matrix einsetzt. Würde man auch noch die Hauptdeterminante berechnen, durch die zu dividieren ist, hätte man sofort eine Lösung deren Summe 1 ist. Diese Berechnung und die Division kann man sich hier sparen, dafür muss man das Ergebnis noch so normieren, dass die Summe 1 ergibt. Der Faktor, der dabei benötigt wird, entspricht genau dem Wert der Koeffizientendeterminante.)

7.4. Inverse Matrizen

Möglicherweise werden zur Berechnung von Aufgaben Inverse Matrizen benötigt. z.B. dann, wenn ein vorhergehender Zustand bestimmt werden soll. Die Matrizen sind voll besetzt und die einzelnen Elemente sind alles Dezimalzahlen, da es sich um Wahrscheinlichkeiten handelt. Das erschwert die Berechnung über den Gaußschen Algorithmus, da die Berechnung dadurch anfällig auf Kommafehler wird. Die Berechnung über Adjunkten vom Anfang des Dokuments ist dabei nur eine kleine Verbesserung.
Hier soll eine mögliche Abwandlung vorgestellt werden, die mit ganzen Zahlen arbeitet.

Dazu wird (wahllos) die Matrix benutzt, die auch im nächsten Beispiel auftritt:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Man kann aus einer Matrix einen **Faktor** ausklammern, wenn er **in allen Elementen** der Matrix vorhanden ist. Deshalb stellt am sich auf den Standpunkt, in allen Elementen ist der Faktor 1/100 vorhanden. Dann ändert sich die Matrix in folgender Weise:

$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 50 & 25 & 20 \\ 25 & 50 & 0 \\ 25 & 25 & 80 \end{pmatrix}$$

Bei dieser speziellen Matrix, das geht nicht immer, kann man sogar noch den Faktor 5 ausklammern:

$$\frac{5}{100}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 5 & 10 & 0 \\ 5 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Von der Matrix $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix}$ ist laut GTR $\begin{pmatrix} \frac{32}{11} & -\frac{12}{11} & -\frac{8}{11} \\ -\frac{16}{11} & \frac{28}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{15}{11} \end{pmatrix}$

oder in obiger Schreibweise: $\boxed{\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 32 & -12 & -8 \\ -16 & 28 & 4 \\ -5 & -5 & 15 \end{pmatrix}}$

von der umgestellten Matrix $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 5 & 10 & 0 \\ 5 & 5 & 16 \end{pmatrix}$ laut GTR $\begin{pmatrix} \frac{8}{55} & -\frac{3}{55} & -\frac{2}{55} \\ -\frac{4}{55} & \frac{7}{55} & \frac{1}{55} \\ -\frac{1}{44} & -\frac{1}{44} & \frac{3}{44} \end{pmatrix} = A'^{-1}$

Die Lösung eines Gleichungssystems erfolgt in folgender Weise: $A\,x = y$
$x = A^{-1}\,y$

Wird aus der Matrix A ein Faktor ausgeklammert und dann von der verbliebenen Matrix die Inverse gebildet, sieht die Lösung des Gleichungssystems folgendermaßen aus:

$$A\,x = y$$
$$t\ A'\,x = y$$
$$t\ x = A'^{-1}\,y$$
$$x = 1/t\ \ A'^{-1}\,y$$

vergleicht man die beiden Ergebnisse, muß folgendes gelten: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{t}\,A'^{-1}}$

Rechenweg:

$$\underbrace{\frac{1}{t}}_{}\ \bullet\ \overbrace{}^{A'^{-1}}$$

$$\frac{100}{5} \bullet \frac{1}{11} \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{20}{11} \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

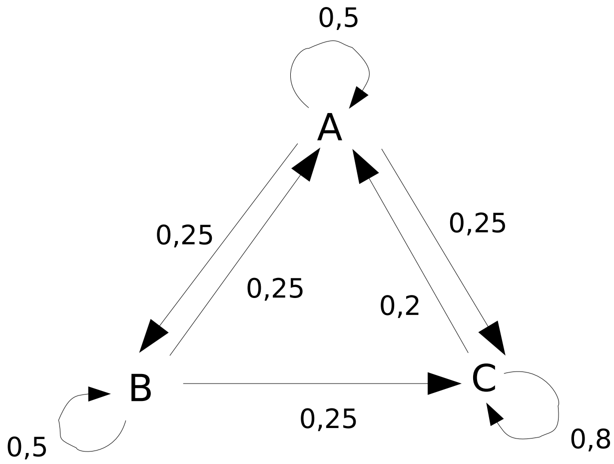
$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} \frac{160}{5} & -\frac{60}{5} & -\frac{40}{5} \\ -\frac{80}{5} & \frac{140}{5} & \frac{20}{5} \\ -\frac{20}{4} & -\frac{20}{4} & \frac{60}{4} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 32 & -12 & -8 \\ -16 & 28 & 4 \\ -5 & -5 & 15 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Womit die Gültigkeit der Formel zumindest für dieses Beispiel noch einmal nachgewiesen ist, Man kann also erst aus der Matrix einen Faktor ausklammern, von der geänderten Matrix die Inverse berechnen und dann die Inverse mit dem Kehrwert des ausgeklammerten Wertes multiplizieren

Beispiel:

Für drei Tankstellen A, B und C sollen die folgenden Annahmen getroffen werden: Die Kunden von A verteilen sich beim nächsten Tanken auf die Tankstellen A, B und C im Verhältnis 2 : 1 : 1. Die Kunden von B wechseln das nächste Mal je 25% zu A und zu C. 80% der Kunden von C wählen diese Tankstelle auch das nächste Mal, der Rest fährt zu A. Jeder Kunde tankt pro Woche genau ein Mal.
Anhand dieser dieser Aufgabe, soll nun
(1) eine Übergangsmatrix P bestimmt werden,
(2) die Verteilung der Autofahrer auf die drei Tankstellen für die nächsten beiden Wochen [für zehn Wochen] berechnet werden, wenn von den 1000 Autofahrer insgesamt in einer Woche 400 bei B und jeweils 300 bei A und bei C tanken,
(3) ein zu der Übergangsmatrix P passender Fixvektor P bestimmt werden und die zugehörige Grenzmatrix ermittelt werden und
(4) die Verteilung berechnet werden, die sich auf lange Sicht einstellt.

(1a) Darstellung der Daten in einem Gozinto Graphen, aus dem man dann die Tabelle erhält.



(1b) Stellt man sich die nebenstehende Tabelle vor, ergibt sich für die Übergangsmatrix P :

		von		
		A	B	C
nach	A	0,5	0,25	0,2
	B	0,25	0,5	0
	C	0,25	0,25	0,8

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

(2) Zunächst einmal wird der Startvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$ *angegeben. Dieser mit der Übergangsmatrix P multipliziert ergibt die Verteilung der Autofahrer auf die drei Tankstelle nach einer Woche. Es ergibt sich demnach:*

$$P \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 275 \\ 415 \end{pmatrix}$$

Folglich tanken nach einer Woche 310 Autofahrer bei A, 275 Autofahrer bei B und 415 Autofahrer bei C.

Multipliziert man diesen ermittelten Vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 310 \\ 275 \\ 415 \end{pmatrix}$ *nun erneut mit der Übergangsmatrix P, so ergibt sich die Verteilung für die zweite Woche:*

$$P \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 310 \\ 275 \\ 415 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 306,75 \\ 275 \\ 478,25 \end{pmatrix}.$$

Demzufolge tanken in der zweiten Woche bereits etwa 306 Autofahrer bei A, 275 Autofahrer bei B und etwa 478 Autofahrer bei C.

Um die Verteilung nach zehn Wochen zu bestimmen, kann die Übergangsmatrix zehn Mal mit sich selbst und dann mit dem Startvektor $\vec{x}$ *multipliziert werden. Es folgt:*

$$P^{10} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 296,4 \\ 148,7 \\ 554,9 \end{pmatrix}.$$

Also tanken nach zehn Wochen etwa 296 Autofahrer bei A, etwa 148 Autofahrer bei B und etwa 554 Autofahrer bei C.

(3) Um einen Fixvektor zu bestimmen, gilt der grundsätzliche Ansatz:
$P \cdot \vec{x}^* = \vec{x}^*$. *Es folgt also:*

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}^* = \vec{x}^*, \quad \text{bzw.:} \quad \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Für das LGS und dessen Lösung ergibt sich somit:

$$\begin{array}{l} 0{,}5\ x_1 + 0{,}25\ x_2 + 0{,}2\ x_3 = x_1 \\ 0{,}25\ x_1 + 0{,}5\ x_2 = x_2 \\ 0{,}25\ x_1 + 0{,}25\ x_2 + 0{,}8\ x_3 = x_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 - \frac{8}{15} x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{4}{15} x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{15} t \\ x_2 = \frac{4}{15} t \\ x_3 = t \end{array}.$$

Da eben diese 1000 die gesamte Anzahl an Autofahrern meint, müssen die Einträge des Fixvektors in der Summe auch 1000 ergeben. Somit folgt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000.$$

Und setzt man die Werte des LGS ein, ergibt sich:

$$\frac{8}{15} t + \frac{4}{15} t + t = 1000,$$

und demnach:

$$t = 555\tfrac{5}{9}.$$

Wenn für t = $555\frac{5}{9}$ *folgt, kann auch* x_1 *zu* $296\frac{8}{27}$ *und x2 zu* $148\frac{4}{27}$ *bestimmt werden, wenn man das Ergebnis für t in* x_1 *und* x_2 *einsetzt.*

Folglich ergibt sich der Fixvektor $\vec{x}^*$ *:*

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 296\frac{8}{27} \\ 148\frac{4}{27} \\ 555\frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

Um nun noch die Grenzmatrix zu erhalten, kann ausgeklammert werden, so dass sich ergibt:

$$\begin{pmatrix} 296\frac{8}{27} \\ 148\frac{4}{27} \\ 555\frac{5}{9} \end{pmatrix} = 1000 \begin{pmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

Da die Elemente in den Spalten der Grenzmatrix den Elementen des Fixvektors entsprechen, muss für die jeweilige Spalte des Grenzmatrix $\begin{pmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ *gelten.*

Für die Grenzmatrix folgt also: $G = \begin{pmatrix} \frac{8}{27} & \frac{8}{27} & \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$

Berechnung des Fixvektors ohne Lösen des Gleichungssystems auf der Grundlage der erstellten Formeln

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \qquad P - E = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}2 \end{pmatrix}$$

dritte Zeile ignorieren: $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und ersetzen.

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad x_2 = -\begin{vmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad x_3 = \begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0{,}25 & 0{,}2 \\ -0{,}5 & 0 \end{vmatrix} \qquad = -\begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0 \end{vmatrix} \qquad = \begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & -0{,}5 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}1 = \frac{1}{10} \qquad = 0{,}05 = \frac{1}{20} \qquad = 0{,}1875 = \frac{3}{16}$$

als Dezimalzahl

$$t\,(0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}1875) = 1$$
$$t \cdot 0{,}3375 = 1$$
$$t = 2{,}96296$$

als Bruch

$$t \cdot \frac{27}{80} = 1$$
$$t = \frac{80}{27}$$

$$= 0{,}1 \cdot 2{,}9630 = \frac{1}{10}\,\frac{80}{27} \qquad = 0{,}05 \cdot 2{,}9630 = \frac{1}{20}\,\frac{80}{27} \qquad = 0{,}1875 \cdot 2{,}9630 = \frac{3}{16}\,\frac{80}{27}$$

$$= 0{,}2963 = \frac{8}{27} \qquad = 0{,}148148 = \frac{4}{27} \qquad = 0{,}555555 = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$$

Die Summe der drei Werte ergibt 1, vergleiche das Ergebnis mit der vorhergehenden Seite.

(4) Da die Grenzmatrix nun bekannt ist, kann diese mit dem Startvektor $\vec{x}$ *multipliziert werden. Es ergibt sich also:*

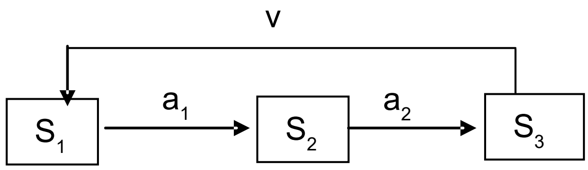
$$G \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{8}{27} & \frac{8}{27} & \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 269 \\ 148 \\ 556 \end{pmatrix}$$

Auf lange Sicht werden also etwa 269 Autofahrer bei A, etwa 148 Autofahrer bei B und etwa 556 Autofahrer bei C tanken.

8. Zyklischer Prozess

8.1. Gozinto-Graph eines zyklischen Prozesses

Merkmale des Gozinto-Graphen:



- Alle Zahlen an den Pfeilen entsprechen dem Überleben der einen Generation in die nächste
- Der rückwärts gerichtete Pfeil gibt die Anzahl der neuen Individuen an, die aus der Generation S_3 entstehen. Es ist auch möglich, dass von der Generation S_2 neue Individuen entstehen.
- Alle Pfeile bilden ein sich wiederholenden Zyklus

Je nach der individuellen Art der betrachteten Lebewesen kann der Graph davon auch abweichen. Die hier dargestellt Form ist die Grundform der durch die Leslie Matrizen dargestellten Populationsentwicklung.

8.2. Matrix eines zyklischen Prozesses

Über ein Übergangsdiagramm erhält man für Populationsentwicklungen eine Übergangsmatrix U. Diese ist immer nach einem klassischen Schema aufgebaut.
Solche Populationsmatrizen bezeichnet man auch als Leslie Matrizen, da sie von Leslie 1945 entwickelt wurden. Sie besitzen eine ganz klare Struktur:

(*Für eine Population, die sich in 3 Generationen wiederholt.*)

$$U = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Werte der Matrix haben folgende Bedeutung:

- Es handelt sich um eine Population, die sich in 3 Generationen wiederholt.
- Die v Werte sind die Zuwächse der Population in jeder Generation
- Die a Wert sind die Prozentzahlen des Wechsels von einer Generation zu einer anderen angibt.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Spezialfall dieser allgemeinen Matrix ist die nebenstehende. Bei dieser Matrix gibt es nur eine Generation (die letzte), die einen Zuwachs der Population erzeugt. Das trifft sehr häufig bei Populationen aus dem Tierreich zu (Insekten usw.). Die einzelnen Generationen unterscheiden sich dann etwas in: Eier, Maden, ausgewachsene Tiere, wobei die Vermehrungsrate $v > 0$ ist und die Überlebensraten $0 < a_1, a_2 \leq 1$ sind.

Des Weiteren gilt, wenn

- ➢ $a_1 \cdot a_2 \cdot v < 1$ ist, stirbt die Population aus.
- ➢ $a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1$ ist, entwickelt sich die Population zyklisch.
- ➢ $a_1 \cdot a_2 \cdot v > 1$ ist, nimmt die Population zu.

Dabei sei darauf zu achten, dass der Zyklus drei Zeiteinheiten beträgt.
Die Anzahl der Zeilen oder Spalten dieser Matrix gibt an, wann sich ein Zyklus wiederholt. Bei einer dreireihigen Matrix ist nach 3 Zyklen die gleiche Population wie am Anfang vorhanden, bei einer vierreihigen Matrix nach 4 Zyklen. Dabei handelt es sich immer um eine Diagonalmatrix, bei der die Diagonalelemente aus dem Produkt der einzelnen werte bestehen.

In Aufgabenstellungen sind aber auch andere Populationsmatrizen vorhanden. Diese genügen dann auch nicht den Gesetzen dieser Lesli Matrix. Es sind dann nicht die entsprechenden Schlußfolgerungen möglich.

8.3. Inverse einer zyklischen Matrix

Möglicherweise sind auch von zyklischen Matrizen inverse Matrizen zu berechnen, z.B. zur Berechnung vergangener Populationen, dann ist die Berechnung über den Gauß‘ schen Algorithmus etwas schwierig, das die meisten Element gleich 0 sind und sich für den Gauß‘schen Algorithmus nicht eignen.
Andererseits kann man die „dünne“ Besetzung der Matrix mit Werten auch ausnutzen zur Berechnung der Inversen. Dazu erstellt man aus der Matrix ein Gleichungssystem mit einer allgemeinen Seite y :

Zu diesem Zweck soll die Matrix des folgenden Beispiels benutzt werden:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

Denkt man sich die Variablen der linken Seite als x und die rechte Seite als y entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 25x_3 &= y_1 \\ 0{,}1x_1 &= y_2 \\ 0{,}4\,x_2 &= y_3 \end{aligned}$$

Das Erstellen einer Inversen Matrix bedeutet nichts anders als das Auflösen des Gleichungssystems nach x:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1/25\; y_1 \\ x_1 &= 10\; y_2 \\ x_2 &= 10/4\; y_3 \end{aligned}$$

als Matrix in der richtigen Reihenfolge der Zeilen geschrieben:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}04 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}04 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

womit nachgewiesen ist, dass es sich tatsächlich um die Inverse Matrix handelt.

Beispiel:

Ein Käfer, der kurz nach der Eiablage stirbt, legt so viele Eier, dass im nächsten Jahr daraus wieder 25 Larven (L) schlüpfen. Nur 10% dieser Larven überleben das erste Jahr und verpuppen sich. Nach einem weiteren Jahr werden 40% dieser Puppen (P) wieder zu Käfern (K). Anhand dieser Aufgabe soll nun
(1) eine Übergangsmatrix ermittelt werden und
(2) überprüft werden, wie sich die Population entwickelt.

(1) Um eine Übergangsmatrix anzugeben, kann am besten zunächst ein Übergangsdiagramm erstellt werden:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "0{,}1"] & P \arrow[r, "0{,}4"] & K \arrow[ll, bend right, "25"'] \end{tikzcd}$$

Hieraus lässt sich über eine Tabelle (siehe nebenstehend) annähernd eine Übergangsmatrix anfertigen. Letztlich ergibt sich diese somit zu:

		von		
nach		*L*	*P*	*K*
	L	*0*	*0*	*25*
	P	*0,1*	*0*	*0*
	K	*0*	*0,4*	*0*

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Aus dieser Übergangsmatrix lässt sich für, v = 25 für a = 0,1 und für b = 0,4 ablesen. Um nun zu überprüfen, wie sich diese Population denn entwickeln wird, wird a • b • v berechnet:

$$a \bullet b \bullet v = 0{,}1 \bullet 0{,}4 \bullet 25 = 1$$

Da a • b • v = 1 gilt, handelt es sich bei der Populationsentwicklung um ein zyklisches Verhalten.