Aufgabe	Lösung	Erläuterung

Exponentialfunktionen

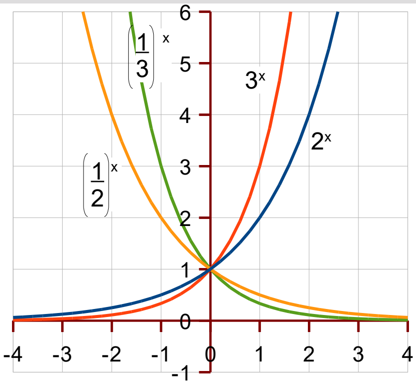
Bei Funktionen wie $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ und $f_3(x) = 1{,}5 \cdot 2^x$ steht die Variable im Exponenten.
Funktionen der Form $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ heißen Exponentialfunktionen.
Wegen $a > 0$ ist a^x für jede reelle Zahl x definiert und es ist $a^x > 0$. Es gilt also: $D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}^+$
Von Exponentialfunktionen spricht man auch bei Funktionen der Form $f(x) = b \cdot a^x$ mit $b > 0$.
Exponentialfunktionen bzw. ihre Graphen haben folgende Eigenschaften:

Eigenschaften

$f(x) = a^x$

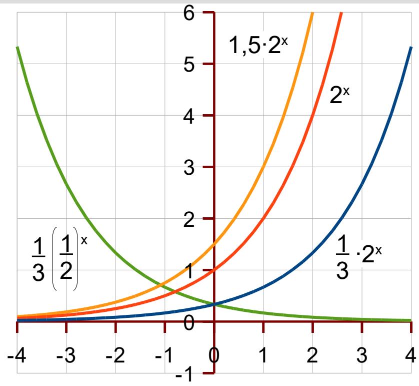
$f(x) = b\,a^x$

$f(x) = a^x$



- $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}_+$
- f ist monoton steigend für $a > 1$ und monoton fallend für $0 < a < 1$
- Für $a > 1$ gilt: Je größer a, desto schneller wächst f. Für $0 < a < 1$ gilt: Je kleiner a, desto schneller fällt f.
- Der Graph geht durch die Punkte P(0|1) und P(1 I a)
- Die Graphen zu $f(x) = a^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen spiegelbildlich zur y-Achse.
- Die x-Achse ist Asymptote des Graphen.

$f(x) = b \cdot a^x$



- $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}_+$
- f ist monoton steigend für $a > 1$ und monoton fallend für $0 < a < 1$
- Der Graph geht durch die Punkte P(0|b) und P(1 I b · a)
- Der Graph ist gegenüber dem zu $g(x) = a^x$ in y-Richtung gestreckt (b > 1) bzw. gestaucht (0<b<1).
- Die Graphen zu $f(x) = a^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen spiegelbildlich zur y-Achse.
- Die x-Achse ist Asymptote des Graphen.

Grundeigenschaft

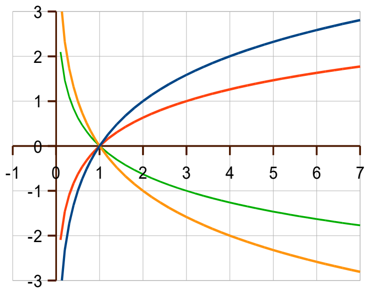
Mit $f(x) = b \cdot a^x$ und $h \in \mathbb{R}$ folgt: $f(x + h) = b \cdot a^{x+h} = b \cdot a^x \cdot a^h = a^h \cdot b \cdot a^x = a^h \cdot f(x)$.
Exponentialfunktionen haben also **unabhängig vom Vorfaktor b** die folgende Eigenschaft:

> **Wachsen die x-Werte in gleichen Abständen h, so wachsen oder fallen die y-Werte stets mit dem gleichen Faktor a^h. Es gilt: $f(x + h) = a^h \cdot f(x)$**

Für $a > 1$ wachsen die y-Werte, für $0 < a < 1$ fallen die y-Werte.
Beispiele: ❶ $f(x) = 3^x$; $h = 4$: $f(x + 4) = 3^4 \cdot f(x) = 81 \cdot f(x)$
❷ $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$; $h = 3$: $f(x + 3) = 0{,}5^3 \cdot f(x) = 0{,}125 \cdot f(x)$

Logarithmusfunktionen

Bei Funktionen wie $f_1(x) = \log_2 x$ und $f_2(x) = \log\ x$ steht die Variable im Argument des Logarithmus.
Funktionen der Form $f(x) = \log_a x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ heißen Logarithmusfunktionen.
Da a positiv ist, ist auch jede Potenz mit der Basis a positiv. $\log_a x$ ist also nur für $x > 0$ definiert:
$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$. Für $a > 1$ ist $\log_a x$ positiv für $x > 1$ und negativ für $0 < x < 1$.
Für $0 < a < 1$ ist der Verlauf umgekehrt.
Logarithmusfunktionen haben folgende Eigenschaften:



- $D = \mathbb{R}_+$; $W = \mathbb{R}$
- f ist monoton steigend für $a > 1$ und monoton fallend für $0 < a < 1$
- Für $a > 1$ gilt: Je größer a, desto schneller wächst f. Für $0 < a < 1$ gilt: Je kleiner a, desto schneller fällt f.
- Der Graph geht durch die Punkte P(1|0) und P(a I 1)
- Die Graphen zu $f(x) = \log_a x$ und $g(x) = \log\ x$ liegen spiegelbildlich zur x-Achse.
- Die y-Achse ist Asymptote des Graphen.

Spiegelt man einen der beiden Graphen zu $f(x) = a^x$ oder $f^{-1}(x) = \log_a x$ an der Geraden zu $y = x$, so erhält man jeweils den Graphen der anderen Funktion. Es gilt:
$f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log a x} = x$ und $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x \cdot \log_a a = x$.

Umkehrfunktion

Die Logarithmusfunktion zur Basis a und die Exponentialfunktion zur Basis a sind Umkehrfunktionen voneinander.
Beispiele: $f(x) = 3^x$, $f^{-1}(x) = \log_3 x$; $f(x)=$, $f^{-1}(x) = \log\ x$; $f(x) = 0{,}1^x$, $f^{-1}(x) = \log_{0,1} x$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

1. Exponentialfunktionen

1.1. Funktionsgraphen zeichnen

a) $f_1(x) = 3^x$

b) $f_2(x) = 0{,}5 \cdot 3^x$

c) $f_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $f_4(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Wertetabellen

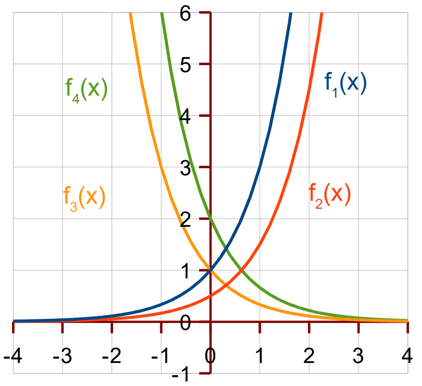
x	–1	0	1	1,5	2
$f_1(x)$	⅓	1	3	5,2	9

x	–1	0	1	2	2,5
$f_2(x)$	⅙	0,5	1,5	4,5	7,8

x	–2	–1,5	–1	0	1
$f_3(x)$	9	5,2	3	1	⅓

x	–1,5	–1	–0,5	0	1
$f_4(x)$	10,4	6	3,5	2	⅔

Graphen



Um die Graphen von Funktionen der Form $f(x) = b \cdot a^x$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$) zu zeichnen, gehe so vor:

1. Lege eine Wertetabelle an.
   Berücksichtige dabei die x-Werte –1, 0 und 1.

   Warum ?

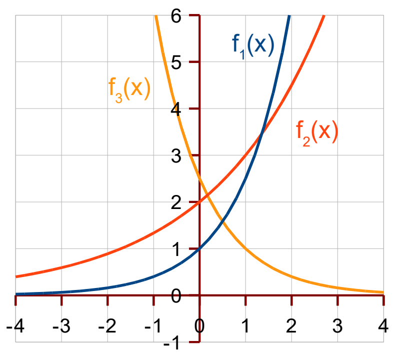
   Die Punkte P(0 I b), P(1 I a · b) und P(–1 I b/a) liegen auf dem Graphen von $f(x) = b \cdot a^x$.
2. Zeichne ein Koordinatensystem.
   Berücksichtige dabei nur die positive y-Achse.

   Warum ?

   Alle Funktionswerte von $f(x) = b \cdot a^x$ sind positiv.
3. Markiere die Punkte aus der Wertetabelle und verbinde sie.
   Beachte dabei:

- ♦ Die x-Achse ist Asymptote des Graphen.
- ♦ Für $a > 1$ ist der Graph monoton steigend, für $0 < a < 1$ monoton fallend.
- ♦ Der Graph von $f(x) = b \cdot a^x$ ist gegenüber dem zu $f(x) = a^x$ in y-Richtung um den Faktor b
  – gestreckt, falls $b > 1$;
  – gestaucht, falls $0 < b < 1$.

1.2. Funktionsgleichung aufstellen



f_1: $f_1(x) = b \cdot a^x$
$f(0) = 1 \;\Rightarrow\; b = 1$
$f(1) = 2{,}5 \;\Rightarrow\; a = 2{,}5$
also: $f_1(x) = 2{,}5^x$

f_2: $f_2(x) = b \cdot a^x$
$f(0) = 2 \;\Rightarrow\; b = 2$
$f(1) = 3 \;\Rightarrow\; b \cdot a = 3 \Rightarrow\; a = \frac{3}{b}$
b einsetzen:
$a = 3/2 = 1{,}5$
also: $f_2(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$

f_3: $f_3(x) = b \cdot a^x$
$f(0) = 2{,}5 \Rightarrow\; b = 2{,}5$
$f(1) = 1 \;\Rightarrow\; b \cdot a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b}$
b einsetzen:
$a = 1/2{,}5 = 0{,}4$
also: $f_3(x) = 2{,}5 \cdot 0{,}4^x$

Ist der Graph gegeben und sollst du die Gleichung der Funktion $f(x) = b \cdot a^x$ ermitteln, gehe so vor:

1. Lies die y-Werte an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ ab. Es ist $f(0) = b$.
2. Setze die beiden y-Werte in die Gleichung $f(1) = b \cdot a$ ein und löse nach a auf.

Hinweis

Für Exponentialfunktionen der Form $f(x) = b \cdot a^x$ gilt:

f(0) = b und f(1) = a · b

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

1.3. Funktionsgleichung aufstellen der Form: $f(x) = a^x$

Aufgabe:

Der Punkt P liegt auf dem Graphen von $f(x) = a^x$. Bestimme a.

a) P(3 | 8)

b) P (–2 I 2,25)

c) P (0,2 I 0,1)

Lösung:

a) $f(3) = 8$:
$8 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2$
also: $f(x) = 2^x$

b) $f(-2) = 2{,}25$:
$2{,}25 = a^{-2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2{,}25}} = \frac{2}{3}$
also: $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $f(0{,}2) = 0{,}1$:
$10^{-1} = a \Rightarrow a = 10^{-5} = 0{,}000\,01$
also: $f(x) = 0{,}000\,01^x$

1.4. Funktionsgleichung aufstellen der Form: $f(x) = b\,a^x$

Aufgabe:

Die beiden Punkte P und Q liegen auf dem Graphen von $f(x) = b \cdot a^x$. Bestimme a und b.

a) P(0 I 2) Q(2 I 50)

b) P(-2 | 12) Q(2 | $\frac{3}{4}$)

Lösung:

a) $f(0) = 2$: $b \cdot a^\circ = 2 \Leftrightarrow b = 2$
$f(2) = 50$: $\cdot\, a^2 = 50$
b einsetzen in $b \cdot a^2 = 50$:
$2a^2 = 50 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5$
also: $f(x) = 2 \cdot 5^x$

b) $f(-2) = 12$: $b \cdot a^{-2} = 12$
$\Leftrightarrow b = 12a^2$

$f(2) = \frac{3}{4}$: $b \cdot a^2 = \frac{3}{4}$

b einsetzen in $b \cdot a^2 = \frac{3}{4}$

$12a^2 \cdot a^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

a einsetzen in $b = 12a^2$:

$b = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3$

also: $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Erläuterung:

Kennst du zwei Punkte $P(x_1 I y_1)$ und $Q(x_2 I y_2)$ des Graphen von $f(x) = b\,.\,a^x$, dann kannst du a und b berechnen, also die Funktionsgleichung aufstellen:

1. Setze x_1, y_1 und x_2, y_2 in die Gleichung $f(x) = b \cdot a^x$ ein und löse eine Gleichung nach b auf.
2. Setze den Term für b in die andere Gleichung ein und löse nach a auf.
3. Setze den Wert von a in eine der Gleichungen von 1. ein und berechne b.

1.5. Funktionen der Form: $f(x) = a^{cx + d}$

Aufgabe:

Schreibe die Funktionsgleichungen in der Form $f(x) = b \cdot a^x$.

a) $f(x) = 2^{x-1}$

b) $f(x) = 2^{3x}$

c) $f(x) = 2^{-3x}$

d) $f(x) = 2^{3x-1}$

Lösung:

a) $f(x) = 2^{x-1} = 2^{-1} \cdot 2^x = 0{,}5 \cdot 2^x$

b) $f(x) = 2^{3x} = (2^3)x = 8^x$

c) $f(x) = 2^{-3x} = (2^{-3})^x = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

d) $f(x) = 2^{3x-1} = 2^{-1} \cdot (2^3)^x = 0{,}5 \cdot 8^x$

Erläuterung:

Jede Funktion der Form $f(x)=a^{cx+d}$ lässt sich durch Anwenden der Potenzgesetze auf die Form $f(x) = b_2 \cdot a_2^x$ bringen:

$f(x) = a_1^{cx+d} = a_1^d \cdot (a_1^c)^x = b_2 \cdot a_2^x$

mit $b_2 = a_2\, a_1^d$ und $a_2 = a_1 c$

1.6. Graphen verschieben

Aufgabe:

Verschiebe den Graphen von $f(x) = {}^{4x}$

❶ um drei Einheiten nach rechts.
❷ um drei Einheiten nach links.

Schreibe die neuen Funktionen in der Form $f(x) = b \cdot a^x$.

Lösung:

$f_1(x) = 4^{x-3} = 4^{-3} \cdot 4^x = \frac{1}{4^3} \cdot 4^x = \frac{1}{64} \cdot 4^x$

$f_2(x) = 4^{x-3} = 4^3 \cdot 4^x =$

$= 64 \cdot 4^x$

Erläuterung:

Durch Verschieben des Graphen von $f(x) = a^x$ um d Einheiten nach links I rechts erhält man den Graphen von
$f_1(x) = a^{x+d}$ I $f_2(x) = a^{x-d}$
Durch Umformen ergibt sich:
$f_1(x) = a^d \cdot a^x$ I $f_2(x) = a^{-d} \cdot a^x$

Das Verschieben des Graphen von $f(x) = a^x$ um d Einheiten nach
links I rechts
bedeutet dasselbe wie Strecken (Stauchen) in y-Richtung mit dem Faktor
a^d I a^{-d}

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

1.7. Änderung der Funktionswerte

Wie ändert sich der Funktionswert einer Funktion $f(x) = b \cdot a^x$, wenn man den x – Wert

a) um zwei vergrößert ?

b) um drei verkleinert ?

c) um 0,1 vergrößert ?

a) $f(x+2) = b \cdot a^{x+2}$
$= b \cdot a^x \cdot a^2$
$= a^2\,(b \cdot a^x)$
$= a^2 \cdot f(x)$

b) $f(x-3) = b \cdot a^{x-3}$
$= b \cdot a^x \cdot a^{-3}$
$= a^{-3} \cdot (b \cdot a^x)$
$= a^{-3} \cdot f(x)$

c) $f(x+0{,}1) = b \cdot a^{x+0{,}1}$
$= b \cdot a^x \cdot a^{0{,}1}$
$= a^{0{,}1} \cdot (b \cdot a^x)$
$= \sqrt[10]{a} \cdot f(x)$

Exponentialfunktionen der Form $f(x) = b \cdot a^x$ haben unabhängig von b eine grundlegende Eigenschaft:

♦ Wird der x-Wert um eine feste Zahl h größer bzw. kleiner, so ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor a^h bzw. a^{-h}:

$$\mathbf{f(x+h) = a^h \cdot f(x)}$$

$$\mathbf{f(x-h) = a^{-h} \cdot f(x)}$$

1.8. Basis ermitteln

Bestimme von der Funktion $f(x) = b \cdot a^x$ die Basis a.

f_1: Wird x um 1 größer, ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor 5.

f_2: Wird x um 2 kleiner, ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor 9 .

f_3: Wird x um 3 größer, ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor 1,331.

f_4: Wird x um 2 größer, ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor 0,8.

f_1: $f(x+1) = 5 \cdot f(x)$
$f(x+1) = a \cdot f(x)$; also:
$5 \cdot f(x) = a \cdot f(x) \Rightarrow a = 5$

f_2: $f(x-2) = 1/9 \cdot f(x)$
$f(x-2) = a^{-2} \cdot f(x)$; also:
$1/9 \cdot f(x) = a^{-2} \cdot f(x)$
$1/9 = a^{-2} \Rightarrow a = 3$ (da $a > 0$)

f_3: $f(x+3) = 1{,}331 \cdot f(x)$
$f(x+3) = a^3 \cdot f(x)$; also:
$1{,}331 \cdot f(x) = a^3 \cdot f(x)$
$1{,}331 = a^3 \Rightarrow a = 1{,}1$

f_4: $f(x+\frac{1}{2}) = 0{,}8 \cdot f(x)$
$f(x+\frac{1}{2}) = a^{½} \cdot f(x)$; also:
$0{,}8 \cdot f(x) = a^{½} \cdot f(x)$
$0{,}8 = a^{½} \Rightarrow a = 0{,}64$

Oft ist nach der Basis a einer Funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gefragt, wobei die folgende Beziehung bekannt ist:

♦ Wird der x-Wert um eine feste Zahl h größer oder kleiner, so ändert sich der Funktionswert mit einem bestimmten Faktor c.

Gehe so vor:

1. Stelle für $f(x \pm h)$ zwei Gleichungen auf:
   I. $f(x \pm h) = c \cdot f(x)$
   II. f(x ± hj = $a^{\pm h} \cdot f(x)$ (vgl. Aufg. 1.4)
2. Setze die rechten Terme gleich und dividiere durch f(x). Du erhältst die Gleichung $c = a^{\pm h}$.
3. Löse nach a auf.

1.9. Abstände ermitteln

Gegeben ist die Funktion $f(x) = b \cdot a^x$.

a) Es ist a = 0,98. In welchem Abstand von x ist der Funktionswert halb so groß wie an der Stelle x?

b) Wenn x um 2 größer wird, ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor 1,1025. In welchem Abstand von x ist der Funktionswert doppelt so groß wie an der Stelle x?

a) $f(x+h) = 0{,}5 \cdot f(x)$
$f(x+h) = 0{,}98^h \cdot f(x)$; also:
$0{,}5 \cdot f(x) = 0{,}98^h \cdot f(x)$

$0{,}5 = 0{,}98^h \Rightarrow h = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}98}$
$h = 34{,}3$

b) $f(x+2) = 1{,}1025 \cdot f(x)$
$f(x+2) = a^2 \cdot f(x)$; also:
$1{,}1025 \cdot f(x) = a^2 \cdot f(x)$
$1{,}1025 = a^2$
$a = 1{,}05$ (da $a > 0$)

$f(x+h) = 2 \cdot f(x)$
$f(x+h) = 1{,}05^h \cdot f(x)$; also:
$2 \cdot f(x) = 1{,}05^h \cdot f(x)$

$2 = 1{,}05^h \Rightarrow h = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05}$
$\Rightarrow h = 14{,}2$

Oft ist bei Funktionen $f(x) = b \cdot a^x$ nach einer festen Zah) h gefragt, um die ein x-Wert kleiner oder größer werden muss, sodass sich der Funktionswert mit einem Faktor c ändert. Dabei ist die Basis a bekannt [Aufg. a)] oder kann aus den gegebenen Informationen berechnet werden [Aufg. b)]. Gehe so vor:

1. Stelle für $f(x \pm h)$ zwei Gleichungen auf:
   I. $f(x \pm h) = c \cdot f(x)$
   II. $f(x \pm h) = a^{\pm h}$. f(x) (vgl. Aufg. 1.4)
2. Setze die rechten Terme gleich und dividiere durch f(x). Du erhältst die Gleichung $c = a^{\pm h}$.
3. Löse nach h auf.

Alle Beziehungen und Umformungen bei den Aufgaben dieser Seite sind unabhängig vom Vorfaktor b gültig.

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

2. Logarithmusfunktionen

2.1. Funktionsgraphen zeichnen

a) $f_1(x) = \log_3 x$

b) $f_2(x) = \log_{1,5} x$

c) $f_3(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $f_4(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$

Wertetabellen

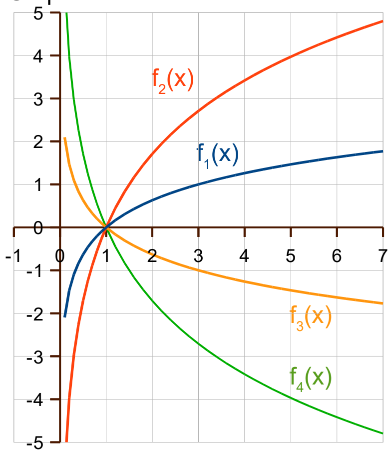
x	1/9	⅓	1	3	9
$f_1(x)$	–2	–1	0	1	2

x	0,2	⅔	1	1,5	6
$f_2(x)$	–4	–1	0	1	4,4

x	1/9	⅓	1	3	9
$f_3(x)$	2	1	0	–1	–2

x	0,2	⅔	1	1,5	6
$f_4(x)$	4	1	0	–1	– 4,4

Graphen



Um die Graphen von Funktionen der Form $f(x) = \log_a x$ ($a, x \in \mathbb{R}^+$; $a \neq 1$) zu zeichnen, gehe so vor:

1. Erstelle eine Wertetabelle. Berücksichtige die x-Werte 1, a und 1/a.

Warum ?

Die Punkte P(1 | 0), P(a I 1) und P(1/a I –1) liegen immer auf dem Graphen von $f(x) = \log_a x$.

2. Zeichne ein Koordinatensystem. Berücksichtige dabei nur die positive x-Achse.

Warum ?

Die Logarithmusfunktion ist nur für positive x-Werte definiert: $D = \mathbb{R}^+$.

3. Markiere die Punkte aus der Wertetabelle und verbinde sie. Beachte dabei:
   - ♦ Die y-Achse ist Asymptote des Graphen.
   - ♦ Für a > 1 ist der Graph monoton steigend, für 0 < a < 1 monoton fallend.

2.2. Funktionsgleichung aufstellen

Bestimme die Gleichung der Funktion $f(x) = \log_a x$, auf derem Graphen der Punkt P liegt.

a) P (81 I 2)

b) P (6 I 0,5)

c) P(4 | –2)

a) $\log_a 81 = 2$ ⇨ $a^2 = 81$
⇨ a = 9; also: $f(x) = \log_9 x$

b) $\log_a 6 = 0,5$ ⇨ $a^2 = 6$
⇨ a = 36; also: $f(x) = \log_{36} x$

c) $\log_a 4 = –2$ ⇨ $a^{-2} = 4$
⇨ a = 0,5; also: $f(x) = \log^{0,5} x$

Ist $x_1 > 0$, $x_1 \neq 1$ und $y \neq 0$, dann gibt es für den Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$ genau eine Funktion $f(x) = \log_a x$, auf derem Graphen er liegt. Du findest die Basis a so:

- ♦ Setze die Koordinaten von P in die Gleichung $\log_a x = y$ ein und löse nach a auf. Beachte dabei, dass a positiv ist.

2.3. Umkehrfunktion ermitteln

Gib die Gleichung der Umkehrfunktion an.

a) $f(x) = 5^x$

b) $f(x) = ¼ \cdot 5^x$

c) $f(x) = \log_3 (x – 4)$

a) $y = 5^x$;
x und y vertauschen, auflösen:
$x = 5y$ ⇨ $y = \log_5 x$
⇨ $f^{-1}(x) = \log_5 x$

b) $y = ¼ \cdot 5^x$;
x und y vertauschen, auflösen:
$x = ¼ \cdot 5^y$ ⇨ $4x = 5^y$
$y = \log_5 4x$; ⇨ $f^{-1}(x) = \log_5 4x$

c) y = log 3 (x - 4);
x und y vertauschen, auflösen:
$x = \log_3(y – 4)$ ⇨ $3^x = y – 4$
$y = 3^x + 4$; ⇨ $f^{-1}(x) = 3^x + 4$

Die Gleichung der Umkehrfunktion einer Funktion f erhältst du so:

- ♦ Vertausche in der Gleichung y = f(x) die Variablen x und y und löse nach y auf

Hinweis

Die beiden Funktionen $f(x) = a^x$ und $f^{-1}(x) = \log_a x$ sind Umkehrfunktionen voneinander, d. h. es gilt:

❶ $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x$

❷ $f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log a x} = x$