| Aufgabe | Lösung | Erläuterung |
|---|---|---|

## Logarithmus

Fragt man bei der Gleichung $2^5 = 32$ nach dem Exponenten 5, so spricht man vom "Logarithmus von 32 zur Basis 2" und schreibt: $\log_2 32 = 5$.

**Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Zahl c, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten. Für a > 0, a ≠ 1 und b > 0 wird definiert:**

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Beispiele: ❶ $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$; ❷ $\log_2 = \frac{1}{8}$ denn $2^{-3} = \frac{1}{8}$; ❸ $\log_2 (-8)$ ist nicht definiert

Zehnerlogarithmen

Für Logarithmen zur Basis 10 schreibt man lg b. Zehnerpotenzen und Zehnerlogarithmen haben eine besondere Bedeutung, weil die Zehnerpotenzen die Stufenzahlen unseres Zahlsystems sind.
Mithilfe der lg -Taste bzw. log -Taste des Taschenrechners lassen sich Zehnerlogarithmen direkt bestimmen.

Beispiele: ❶ $\lg 100 = 2$; ❷ $\lg 0{,}1 = -1$; ❸ $\lg 2 = 0{,}301$; ❹ $\lg 20 = 1{,}301$; ❺ $\lg \frac{1}{2000} = -3{,}301$

Will man das Potenzieren $a^c = b$ umkehren, so hat man zwei Möglichkeiten. Man kann nach der Basis a oder dem Exponenten c fragen. Die Basis a erhält man durch Radizieren: $a = \sqrt[c]{b}$. Den Exponenten c erhält man durch Logarithmieren: $c = \log_a b$.

Umkehren des Potenzierens

**Das Potenzieren hat zwei Umkehrungen: das Radizieren und das Logarithmieren.**

| | **Potenzieren: $a^c = b$** | **Radizieren: $a = \sqrt[c]{b}$** | **Logarithmieren: $\log_a b = c$** |
|---|---|---|---|
| Beispiele: | $2^3 = 8$; | $2 = \sqrt[3]{8}$ ; | $\log_2 8 = 3$ |

## Logarithmengesetze

Aus den Potenzgesetzen lassen sich unmittelbar Regeln für das Rechnen mit Logarithmen ableiten. Im Folgenden sei $r \in \mathbb{R}$, $a^x = b$ und $a^y = c$, also $\log_a b = x$ und $\log_a c = y$.

| | Potenzgesetz | Folgerung für Logarithmen |
|---|---|---|
| ❶ | $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ | $\mathbf{\log_a(b \cdot c)} = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y = \mathbf{\log_a b + \log_a c}$ |
| ❷ | $a^x : a^y = a^{x-y}$ | $\mathbf{\log a(b : c)} = \log_a(a^x : a^y) = \log_a a^{x-y} = x - y = \mathbf{\log_a b - \log_a c}$ |
| ❸ | $(a^x)^r = a^{r \cdot x}$ | $\log_a b^r = \log_a (a^x)^r = \log_a a^{r \cdot x} = r \cdot x = r \cdot \log_a b$ |

Aus den Potenzgesetzen ergeben sich die drei folgenden Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen:

Logarithmus

... eines Produktes

... eines Quotienten

... einer Potenz

❶ Für den Logarithmus eines Produktes gilt : $\mathbf{\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$

❷ Für den Logarithmus eines Quotienten gilt: $\mathbf{\log a(b : c) = \log_a b - \log_a c}$

❸ Für den Logarithmus einer Potenz gilt: $\mathbf{\log_a b^r = r \cdot \log_a b}$

Beispiele:

Zu ❶ : $\log_2 (5a) = \log_2 5 + \log_2 a$; $\lg (8x) = \lg 8 + \lg x$

Zu ❷ : $\log_2 \frac{5}{a} = \log_2 5 - \log_2 a$; $\lg (x : 8) = \lg x - \lg 8$

Zu ❸ : $\log_2 a^5 = 5 \cdot \log_2 a$; $\lg x^{-8} = -8 \cdot \lg x$

Senkung der Rechenstufen

Beim Logarithmieren werden die Rechenarten um eine Stufe gesenkt:
- Aus dem Logarithmus eines Produktes wird eine Summe von Logarithmen.
- Aus dem Logarithmus eines Quotienten wird eine Differenz von Logarithmen.
- Aus dem Logarithmus einer Potenz wird ein Produkt aus Exponent und Logarithmus.

Basiswechsel

Ist $a^x = c$ und $b > 0$, $b \neq 1$, dann folgt $\log_b c = \log_b ax = x \log_b a = \log_a c \log_b a$. Also $\mathbf{\log_a c =} \frac{\log_b c}{\log_b a}$

Kennt man den Logarithmus zu einer bestimmten Basis b, dann lässt sich daraus der Logarithmus zu jeder anderen Basis a ermitteln. Speziell gilt für b = 10:
**Der Logarithmus von c zur Basis a lässt sich bestimmen, wenn die Zehnerlogarithmen**

$$\mathbf{\log_a c = \frac{\lg c}{\lg a}}$$

Dank dieser Beziehung lassen sich mithilfe der lg -Taste bzw. log -Taste des Taschenrechners Näherungswerte für Logarithmen zu beliebigen Basen a berechnen.

$\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} = 2{,}3219$ $\log_8 10 = \frac{\lg 10}{\lg 8} = 1{,}1073$

## Exponentialgleichungen

Bei Gleichungen der Form $2^{x+1} = 2^{2x}$ oder $5^x = 3$ steht die Variable im Exponenten einer Potenz. Gleichungen, bei denen die Variable im Exponenten einer Potenz steht, heißen "Exponentialgleichungen“:
Viele Exponentialgleichungen lassen sich durch Exponentenvergleich, Logarithmieren oder durch Substitution lösen.

| Aufgabe | Lösung | Erläuterung |
|---|---|---|

## 1. Logarithmen bestimmen ohne Taschenrechner

### 1.1. Bestimme den Logarithmus durch Umformen des Ausdrucks

a) $\log_2 16$ b) $\log_4 16$

c) $\log_{0,5} 16$ d) $\log_{16} 0,5$

e) $\log_4 \sqrt{2}$ f) $\log_2(-8)$

g) $\log_{-2} 8$ h) $\log_2 1$

i) $\log_1 1,8$

a) $\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2x = 16$
$\Leftrightarrow 2x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$
also: $\log_2 16 = 4$

b) $\log_4 16 = x \Leftrightarrow 4^x = 16$
$\Leftrightarrow 4^x = 4^2 \Leftrightarrow x = 2$
also: $\log_4 16 = 2$

c) $\log_{0,5} 16 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$
$\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^4 \Leftrightarrow -x = 4 \Leftrightarrow x = -4;$
also: $\log_{0,5} 16 = -4$

d) $\log_{16} 0,5 = x \Leftrightarrow 16^x = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{-1} \Leftrightarrow 4x = -1$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ also: $\log_{16} 0,5 = -4$

e) $\log_4 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 4^x = \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$
also: $\log_4 \sqrt{2} =$

f), g) nicht definiert
h) $\log_2 1 = 0$
i) nicht definiert

Sollst du $\log_a b$ bestimmen, so ist nach dem Exponenten x gefragt, mit dem du a potenzieren musst, um b zu erhalten. Für $a > 0$, $a \neq 1$ und $b > 0$ ist definiert:

$$\mathbf{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Lassen sich a und b durch Anwenden der Potenzgesetze als Potenzen mit derselben Basis darstellen, dann kannst du $\log_a b$ ohne Hilfe des Taschenrechners durch Umformen bestimmen.
Gehe so vor:
1. Nenne den gesuchten Logarithmus x.
2. Schreibe die Gleichung $\log_a b = x$ in der Form $a^x = b$.
3. Forme so um, dass auf beiden Seiten der Gleichung Potenzen mit derselben Basis stehen.
4. Setze die beiden Exponenten gleich und löse nach x auf.

**Hinweis**

- ► Logarithmen von negativen Zahlen sind nicht definiert [Aufgabe 1f)].
- ► Logarithmen mit negativer Basis sind nicht definiert [Aufgabe 1 g)].
- ► Logarithmen zur Basis 1 sind nicht definiert [Aufgabe 1 i)].
- ► Der Logarithmus von 1 ist immer 0 - unabhängig von der Basis [Aufg. 1 h), 2d), 3f)]: $\log_a 1 = 0$
- ► Der Logarithmus der Basis ist immer 1 [Aufgabe 2c), 3g)]: $\log_a a = 1$
- ► Für jede reelle Zahl r gilt: $\log_a a^r = r$
- ► lg a ist eine Abkürzung für den Logarithmus zur Basis 10: $\lg a = \log_{10} a$

### 1.2. Bestimme den Logarithmus durch Umformen des Ausdrucks

a) lg 1000 b) lg 0,01

c) lg 10 d) lg 1

a) $\lg 1\,000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1000$
$\Leftrightarrow 10^x = 10^3 \Leftrightarrow x = 3$
also: $\lg 1000 = 3$

b) $\lg 0,01 = x \Leftrightarrow 10x = 0,01$
$\Leftrightarrow 10^x = 10^{-2} \Leftrightarrow x = -2$
also: $\lg 0,01 = -2$

c) $\lg 10 = 1$ d) $\lg 1 = 0$

### 1.3. Bestimme den Logarithmus durch Umformen des Ausdrucks

a) $\log_a a^3$ b) $\log_a \frac{1}{a^2}$

c) $\log_a \sqrt{a}$ d) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$

e) $\log_{a^2} a$ f) $\log_a 1$

g) $\log_{2a} 2a$

a) $\log_a a^3 = x \quad a^x = a^3$
$x = 3$; also: $\log_a a^3 = 3$

b) $\log_a \frac{1}{a^2} = x \quad a^x =$
$a^x = a^{-2} \quad x = -2$
also: $\log_a \frac{1}{a^2} = -2$

c) $\log_a \sqrt{a} = x \quad a^x = a^{\frac{1}{2}}$
$x = \frac{1}{2}$; also: $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2$
$a^{-x} = a^2 \quad -x = 2 \quad x = -2;$
also: $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = -2$

e) $\log_{a^2} a = x \quad (a^2)^x = a$
$a^{2x} = a^1 \quad 2x = 1 \quad x = \frac{1}{2};$
also: $\log_{a^2} a = \frac{1}{2}$

f) $\log_a 1 = 0$ g) $\log_{2a} 2a = 1$

| Aufgabe | Lösung | Erläuterung |
| --- | --- | --- |

1.4. Schreibe als Quotient von Logarithmen zur angegebenen Basis a

a) $\log_2 4$; a = 5
b) $\log_{0,5} 15$; a = 2
c) $\log_7 32$; a = 10
d) $\log_8 100$; a = 10

a) $\log_2 4 = \frac{\log_5 4}{\log_5 2}$
b) $\log_{0,5} 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 0,5}$
c) $\log_7 32 = \frac{\log_{10} 32}{\log_{10} 7}$
d) $\log_8 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 8}$

Einen Logarithmus zur Basis a kannst du als Quotient von Logarithmen zu jeder anderen Basis b schreiben ("Basiswechsel"). Für a, b, c > 0 und a, b ≠ 1 gilt:

log c

Für b = 10 folgt daraus speziell:

lg c

Dank dieser Beziehung kannst du mithilfe der lg – Taste bzw. log – Taste deines Taschenrechners Näherungswerte für Logarithmen zu beliebigen Basen a bestimmen.

## 2. Logarithmen bestimmen mit Taschenrechner

2.1. Bestimme den Logarithmus auf vier Dezimalstellen gerundet

a) lg 2 b) lg 20
c) lg 0,75 d) lg 1500
e) $\log_7 32$ f) $\log_{0,1} 20$
g) $\log_{100} 0.8$ h) $\log_8 2,5$

a) lg 2 ≈ 0,3010
b) lg 20 ≈ 1,3010
c) lg 0,75 ≈ – 0,1249
d) lg 1500 ≈ 3,1761
e) $\log_7 32 = \frac{\lg 32}{\lg 7} \approx 1,7810$
f) $\log_{0,1} 20 = \frac{\lg 20}{\lg 0,1} \approx -1,3010$
g) $\log_{100} 0.8 = \frac{\lg 0,8}{\lg 100} \approx -0,0485$
h) $\log_8 2,5 = \frac{\lg 2,5}{\lg 8} \approx 0,4406$

## 3. Logarithmen von Produkten und Quotienten

3.1. Schreibe als Summe bzw. Differenz von Logarithmen

a) $\log_2(4 \cdot 7)$ b) $\log_3 \frac{3}{4}$
c) lg (5 · 100) d) $\lg \frac{1}{8}$
e) $\log_a(4a)$ f) $\log_a \frac{1}{c}$
g) $\log_a(3a^4b)$ h) $\log_a \frac{2}{bc}$

a) $= \log_2 4 + \log_2 7 = 2 + \log_2 7$
b) $= \log_3 3 - \log_3 4 = 1 - \log_3 4$
c) = lg 5 + lg 100 = lg 5 + 2
d) = lg1 – lg8 = 0 – lg8 = – lg8
e) $= \log_a 4 + \log_a a = \log_a 4 + 1$
f) $= \log_a 1 - \log_a c = 0 - \log_a c = \log_a c$
g) $= \log_a 3 + \log_a a^4 + \log_a b$
$= \log_a 3 + 4 + \log_a b$
h) $= \log_a 2 - \log_a bc$
$= \log_a 2 - (\log_a b + \log_a c)$
$= \log_a 2 - \log_a b - \log_a c$

Für Logarithmen von Produkten bzw. Quotienten gilt:

$\mathbf{\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$

$\mathbf{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$

Mithilfe dieser Regeln kannst du
- den Logarithmus eines Produkts (bzw. Quotienten) ats Summe (bzw. Differenz) von Logarithmen zur gleichen Basis schreiben und dadurch eventuell vereinfachen (Aufgabe 3.1).
- eine Summe (bzw. Differenz) von Logarithmen zur gleichen Basis zu einem Logarithmus zusammenfassen (Aufgabe 3.2).

3.2. Fasse zu einem Logarithmus zusammen

a) $\log_2 5 + \log_2 10$
b) $\log_5 27 - \log_5 135$
c) $\log_a b - \log_a c + \log_a d$
d) $\log_a b - \log_a c - \log_a d$
e) $4 + \log_a 5 - \log_a 10$

a) $= \log_2(5 \cdot 10) = \log_2 50$
b) $\log_5 \frac{27}{135} = \log_5 \frac{1}{5} = -1$
c) $= \log_a \frac{b}{c} + \log_a d = \log_a(\frac{b \cdot d}{c})$
d) $= \log_a b - (\log_a c + \log_a d)$
$= \log_a b - \log_a cd = \log_a(\frac{b}{c \cdot d})$
e) $= \log_a a^4 + \log_a 5 - \log_a 10$
$= \log_a 5a^4 - \log_a 10$
$= \log_a \frac{5a^4}{10} = \log_a \frac{a^4}{2}$

**Hinweis**

Jede Zahl r kannst du als Logarithmus zu einer beliebigen positiven Basis a (a ≠ 1) schreiben (Aufgabe 3.2.e). Nutze dabei die Beziehung:

$\mathbf{r = \log_a a^r}$

| Aufgabe | Lösung | Erläuterung |
|---|---|---|

## 4. Logarithmen von Potenzen

### 4.1. Schreibe als Produkt

a) $\log_2 5^3$  b) $\log_5 x^5$
c) $\lg \frac{1}{5^6}$  d) $\log_8 \sqrt{15}$
e) $\lg x^{-0,5}$  f) $\log_a x^5$
g) $\log_a \frac{1}{x^4}$  h) $\log_a \sqrt[5]{x^9}$

a) $\log_2 5^3 = 3 \cdot \log_2 5$
b) $\log_5 x^5 = 5 \cdot \log_5 x$
c) $\lg \frac{1}{5^6} = \lg 5^{-6} = -6 \lg 5$
d) $\log_8 \sqrt{15} = \log_8 15^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_8 15$
e) $\lg x^{-0,5} = -0,5 \cdot \lg x$
f) $\log_a x^5 = 5 \cdot \log_a x$
g) $\log_a \frac{1}{x^4} = \log_a x^{-4} = -4 \cdot \log_a x$
h) $\log_a \sqrt[5]{x^9} = \log_a x^{\frac{9}{5}} = 5 \cdot \log_a x^9$

Für Logarithmen von Potenzen gilt:

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

Mithilfe dieser Regel kannst du
- den Logarithmus einer Potenz in ein Produkt umformen (Aufgabe 4.1).
- ein Produkt, dessen einer Faktor ein Logarithmus ist, in den Logarithmus einer Potenz umformen (Aufgabe 4.2).

### 4.2. Schreibe als Potenz

a) $6 \cdot \log_3 2$  b) $-2 \cdot \lg 5$
c) $\frac{2}{3} \cdot \log_4 6$  d) $3 \cdot \log_a x$
e) $-\frac{1}{4} \cdot \log_a (1-x)$

a) $6 \cdot \log_3 2 = \log_3 2^6 = \log_3 64$
b) $-2 \cdot \lg 5 = \lg 5^{-2} = \lg \frac{1}{25}$
c) $\frac{2}{3} \cdot \log_4 6 = \log_4 6^{\frac{2}{3}} = \log_4 \sqrt[3]{6^2}$
d) $3 \cdot \log_a x = \log_a x^3$
e) $-\frac{1}{4} \cdot \log_a (1-x) = \log_a (1-x)^{-\frac{1}{4}}$
$= \log_a \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)}}$

### 4.3. Zerlege in einzelne Logarithmen

a) $\log_a 3x^2$
b) $\log_a \frac{2x^3 y}{z^4}$
c) $\log_a 5a^5b^6$
d) $\lg \frac{(a+b)^2}{10a^5}$

a) $= \log_a 3 + \log_a x^2 = \log_a 3 + 2 \log_a x$
b) $= \log_a 2 + \log_a x^3 + \log_a y - \log_a z^4$
$= \log_a 2 + 3 \log_a x + \log_a y - 4 \log_a z$
c) $= \log_a 5 + \log_a a^5 + \log_a b^6$
$= \log_a 5 + 5 + 6 \log_a b$
d) $= \lg (a+b)^2 - (\lg 10 + \lg a^5)$
$= \lg (a+b)^2 - \lg 10 - \lg a^5$
$= 2 \lg (a+b) - 1 - 5 \lg a$

Mithilfe der drei Logarithmengesetze kannst du viele Logarithmenterme mit "einfacheren" Logarithmen schreiben (Aufgabe 4.3) oder - umgekehrt - zu einem Logarithmus zusammenfassen (Aufgabe 4.4 ).
Ob das eine oder das andere zweckdienlich ist, kann sich nur aus dem jeweiligen Zusammenhang ergeben.

### 4.4. Fasse zu einem Logarithmus zusammen

a) $2 \lg 3 + 3 \lg 4$
b) $\log_3 (2x + 1) - 1$
c) $2 \lg (1 + x) - \lg (1 - x^2)$
d) $3 - 2 \log_a ab + 4 \log_a b$

a) $2 \lg 3 + 3 \lg 4 = \lg (3^2 \cdot 4^3)$
b) $\log_3 (2x + 1) - \log_3 3$
$= \log_3 \frac{2x+1}{3}$
c) $= \lg (1 + x)^2 - \lg (1 - x^2)$
$= \lg \frac{(1+x)^2}{1-x^2} = \lg \frac{1+x}{1-x}$
d) $= \log_a a^3 - \log_a (ab)^2 + \log_a b^4$
$= \log_a \frac{a^3b^4}{a^2 b^2} = \log_a ab^2$

**Logarithmengesetze**

❶ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

❷ $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$

❸ $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

| Aufgabe | Lösung | Erläuterung |
|---|---|---|

## 5. Exponentialgleichungen

### 5.1. Löse durch Vergleich der Exponenten

a) $3^x \cdot 3^5 = 27$

b) $5^{x+3} \cdot 25^{x+1} - \left(\frac{1}{25}\right)^x = 0$

a) $3^x \cdot 3^5 = 27 \Leftrightarrow 3^{x+5} = 3^3$

$\Leftrightarrow x+5 = 3 \Leftrightarrow x = -2$

**L = {–2}**

b) $5^{x+3} \cdot 25^{x+1} - \left(\frac{1}{25}\right)^x = 0$

$\Leftrightarrow 5^{x+3} \cdot 25^{x+1} - 5^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 5^{x+3} \cdot 25^{x+1} = 5^{-2x}$

$\Leftrightarrow \quad 3x+5 = -2x \Leftrightarrow x = -1$

**L = {–1}**

Gleichungen, bei denen die Variable im Exponenten steht, nennt man "Exponentialgleichungen".
Viele Exponentialgleichungen lassen sich durch Exponentenvergleich, durch Logarithmieren oder durch Substitution lösen.

**❶ Exponentenvergleich**

Lässt sich die Gleichung so umformen, dass auf beiden Seiten je eine Potenz mit derselben Basis steht, dann kannst du sie durch Gleichsetzen der Exponenten lösen (Aufgabe 1 ).
Für a > 0 und a ≠ 1 gilt:

$\mathbf{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$

### 5.2. Löse durch Logarithmieren

a) $6^x = 4$

b) $3^x \cdot 3^5 = 27$

c) $3^x \cdot 3^5 = 19$

d) $2^{2x} - 4 \cdot 3^x = 0$

a) $6^x = 4 \Leftrightarrow \lg(6^x) = \lg 4$

$\Leftrightarrow x \cdot \lg 6 = \lg 4 \Leftrightarrow x =$

$\Leftrightarrow x = 0{,}77$

**L = {0,77}**

b) $3^x \cdot 3^5 = 27 \Leftrightarrow 3^{x+5} = 27$

$\Leftrightarrow \log_3 3^{x+5} = \log_3 27$

$\Leftrightarrow (x+5)\log_3 3 = \log_3 27$

$\Leftrightarrow x+5 = 3 \Leftrightarrow x = -2$

**L = {-2 }**

c) $3^x \cdot 3^5 = 19 \Leftrightarrow 3^{x+5} = 19$

$\Leftrightarrow \lg 3^{x+5} = \lg 19$

$\Leftrightarrow (x+5)\lg 3 = \lg 19$

$\Leftrightarrow x+5 = \frac{\lg 19}{\lg 3} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 19}{\lg 3} - 5$

$\Leftrightarrow x = -2{,}32;$

**L = {-2,32}**

d) $2^{2x} = 4 \cdot 3^x$

$\Leftrightarrow \lg(2^{2x}) = \lg(4 \cdot 3^x)$

$\Leftrightarrow 2x \cdot \lg 2 = \lg 4 + x \cdot \lg 3$

$\Leftrightarrow x(2\lg 2 - \lg 3) = \lg 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{\lg 4}{2\lg 2 - \lg 3} \Leftrightarrow x = 4{,}82$

**L = {4,82}**

**❷ Logarithmieren**
Lässt sich die Gleichung auf die Form $a^{f(x)} = c$ oder auf die Form $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ bringen, dann kannst du sie durch Logarithmieren lösen (Aufgabe 2). Dabei ist es unerheblich, zu welcher Basis du logarithmierst. Geeignet sind meist die Basen a, b oder 10.
Für a, b, c > 0 und a, b ≠ 1 gilt:

$\mathbf{a^{f(x)} = c \Leftrightarrow f(x)\log a = \log c}$

und

$\mathbf{a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b}$

Übrigens: Jede Exponentialgleichung, die du durch Exponentenvergleich lösen kannst, lässt sich natürlich auch durch Logarithmieren lösen.

### 5.3. Löse durch Substitution

a) $10^{-2x} - 9 \cdot 10^{-x} = 10$

b) $2^{-x} - 7 = 2^{x+3}$

a) $10^{-2x} - 9 \,.\, 10^{-x} = 10$

$(10-x)^2 - 9 \cdot 10^{-x} - 10 = 0$

Substituieren: $10^{-x} = z$

$z^2 - 9z - 10 = 0$

$z = -1$ oder $z = 10$

Rücksubstituieren: $z = 10^{-x}$

$10^{-x} = -1$: nicht definiert

$10^{-x} = 10 \sim 10^{-x} = 10^1$

$x = -1;$

**L = { –1}**

b) $2^{-x} - 7 = 2^{x+3}$

$\frac{1}{2^x} - 2^3 \cdot 2^x - 7 = 0$

Substituieren: $2^x = z$

$\frac{1}{z} - 8z - 7 = 0$

$8z^2 + 7z - 1 = 0$

$z = -1$ oder $z =$

Rücksubstituieren: $z = 2^x$

$2^x = -1$: nicht definiert

$2^x = \frac{1}{8} \quad 2^x = 2^{-3}$

$x = -3;$

**L = { –3 }**

**❸ Substituieren**

Ersetzt man im Verlauf einer Gleichungsumformung einen geeigneten Term, der die Lösungsvariable x enthält, durch eine Hilfsvariable (z. B. z), so spricht man von Substitution. Eine Substitution hat den Vorteil, dass man die Gleichungsumformung übersichtlicher gestalten kann. Ist die Lösung für z gefunden, so wird die Substitution wieder rückgängig gemacht und nach x aufgelöst.
Aufgabe 3 a): $10^{-x} = z$
Aufgabe 3 b): $2^x = z$