Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Abbildung

Abbildung

Der Begriff der Abbildung ist ein zentraler Begriff in der Mathematik, da er direkt zur Definition des Begriffs einer Funktion führt. Eine Abbildung ist zunächst ganz allgemein jede Vorschrift f, wie die Elemente einer Menge D auf die Elemente einer anderen Menge W abgebildet (zugeordnet) werden.

Für die Abbildung $f: D \to W$ und das Element $y \in W$ des Bildbereichs kann man die Menge

$$f\text{-}1(\{y\}) = \{x \in D \mid f(x) = y\}$$

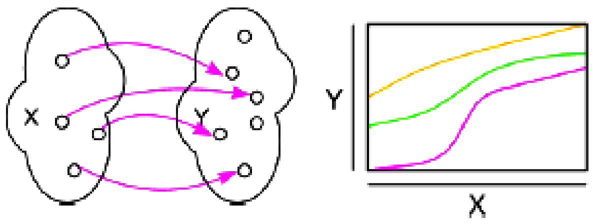
das sind alle die Elemente $x \in D$, die durch die Abbildung f auf y abgebildet werden. Dabei interessieren folgende Eigenschaften:
Gibt es zu $y \in W$.

- höchstens ein $x \in D$ mit $f(x) = y$
- mindestens ein $x \in D$ mit $f(x) = y$
- genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$

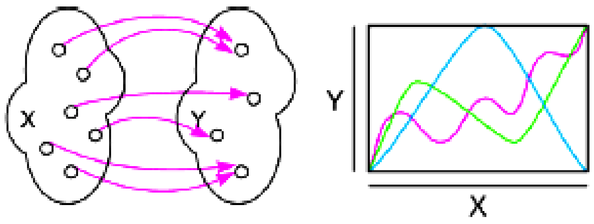
Abbildungen, die diese besonderen Eigenschaften erfülle, erhalten besondere Namen, Sei $f: D \to W$ eine Abbildung, dann heißt diese Abbildung f

1. **injektiv**, wenn für alle $x,y \in D$ gilt: "f(x)=f(y) ? x=y", wenn die Bilder gleich sind, sind dann auch die Urbilder gleich? Es dürfen keine zwei Urbilder aus D das gleiche Bild in W besitzen.
2. **surjektiv**, wenn $f(D) = W$ gilt; jedes Element des Bildbereichs hat mindestens ein Urbild, es können zwei oder mehr Urbilder zu einem Bild existieren, aber jedes Element im Bildbereich muss abgedeckt sein.
3. **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

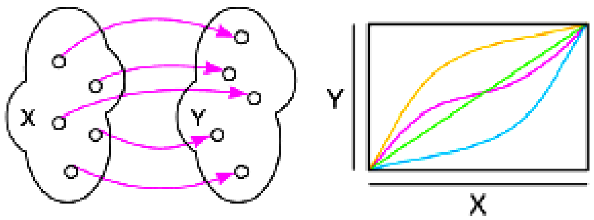
Musterbeispiele



Injektiv, da jedes Element des Bildbereichs höchstens ein Urbild hat



Surjektiv, da jedes Element der Bildbereichs mindestens ein Urbild hat.



Bijektiv, da sie injektiv und surjektiv ist, also jedes Element des Bildbereichs genau ein Urbild hat

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Funktionen

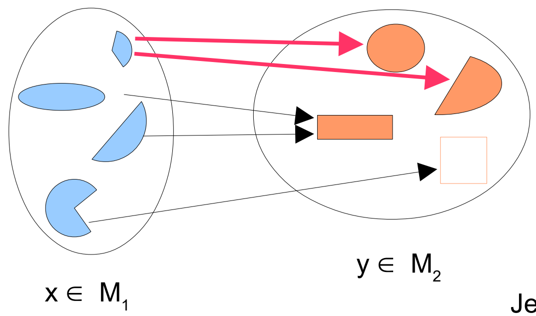
Was ist eine Funktion

Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung einer Menge auf eine andere, d.h. eine Menge geordneter Paare [x,y] mit der Eigenschaft:
jedem x ist **g e n a u e i n** y zugeordnet

Die Menge M_1 aller **Urbilder** x wird bei Funktionen **Definitionsbereich** genannt.

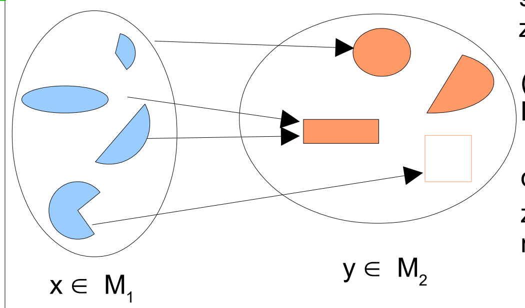
Die Menge M_2 aller **Bilder** y wird bei Funktionen **Wertebereich** genannt.

Keine Funktion



Einem Element aus M_1 sind zwei Elemente in M2 zugeordnet: **deshalb keine Funktion**

Funktion



Jedem Element aus M_1 ist genau ein Element aus M_2 zugeordnet.

(dass zwei Elementen aus M_1 das gleiche Element in M_2 zugeordnet ist, widerspricht nicht der Definition)

Was ist eine lineare Funktion

Einer lineare Funktion ist gekennzeichnet durch
- einen Koeffizienten (Steigung) vor der Variablen x (bezeichnet mit m)
- die Variable x erscheint nur in der ersten Potenz
- es kann eine konstante Verschiebung addiert werden (bezeichnet mit n)

Lineare Funktionen besitzen folgende Eigenschaften:
- das Bild einer Linearen Funktion ist eine Gerade
- wenn m≠ 0 ist gibt es genau eine Schnittstelle mit der x-Ache
- wenn m≠ 0 ist gibt es genau eine Schnittstelle mit der y-Achse

Steigung der linearen Funktion : m

Wenn man diese Steigung als rationale Zahl in Form eines Bruches interpretiert, so kann man die Steigung als

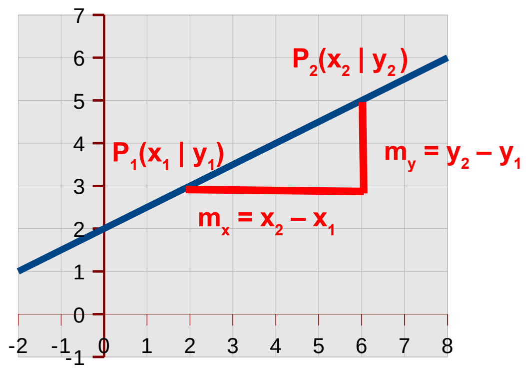
Quotient aus der Differenz der y-Werte zweier Punkte
dividiert durch die Differenz der x-Werte der gleichen Punkte

bestimmen.

$$m = m_y : m_x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m kann auch negativ sein, wenn bei $x_1 < x_2$ für die y-Werte $y_1 > y_2$ gilt

Für m=0 erhält man eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft. Auch diese Gerade erfüllt die Definition der Funktion und ist damit zulässig. Eine Parallele zur y-Achse erfüllt die Definition einer Funktion nicht ist damit nicht erlaubt. (In diesem Fall wäre $m = \infty$)



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

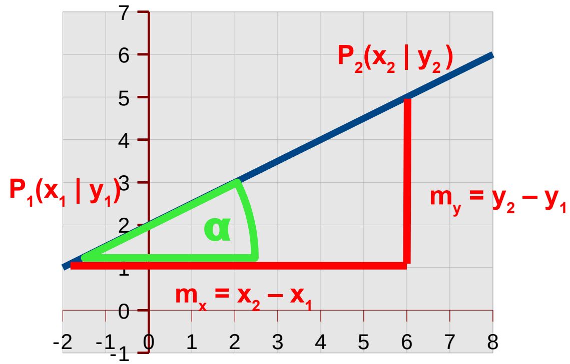
Lineare Funktionen

Der Neigungswinkel einer Geraden

Die beiden Teile m_y und m_x sind gleichzeitig die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks. Daraus lässt sich der Neigungswinkel der Geraden berechnen.

$$\tan(\alpha) = m_y : m_x$$

Der Neigungswinkel wird immer zwischen der Geraden und der positiven x-Achse. Damit werden Neigungswinkel zwischen 0^0 und 180^0 angegeben, oder zwischen $+ 90^0$ und $– 90^0$.



Parallele Geraden

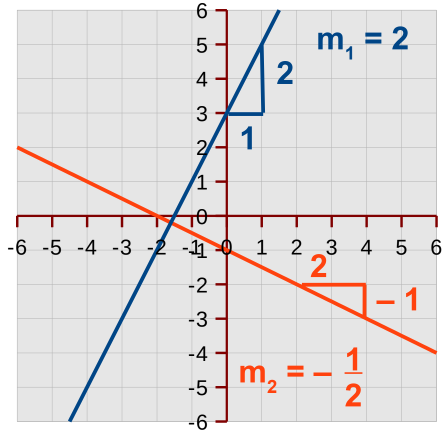
Für parallele Geraden gilt: Sie haben den gleichen Anstieg

$$m_1 = m_2$$

Senkrechte Geraden

Für senkrechte (orthogonale) Geraden gilt: Der Anstieg der zweiten Geraden ist der negative reziproke Wert des Anstiegs der ersten Geraden

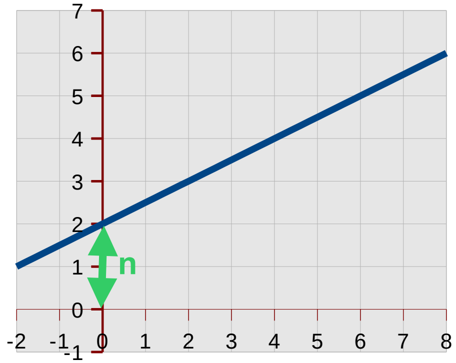
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$



Verschiebung in y-Richtung: n

Geraden als Graphen einer linearen Funktion müssen nicht immer durch den Koordinatenursprung verlaufen. Geraden können auch in Richtung der y-Achse in positiver oder negativer Richtung verschoben sein.

=> Der Wert von n entspricht genau dem Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse



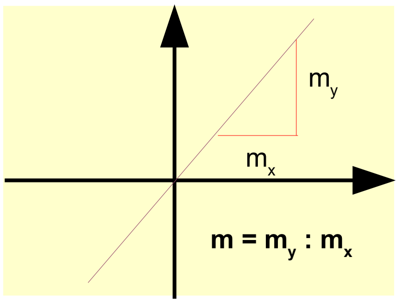
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Funktionen

Die proportionale Funktion y = m*x ; n = 0

Jeder direkte proportionale Zusammenhang zwischen zwei Größen x und y kann durch eine lineare Funktion dargestellt werden. Die Größe m stellt dabei den Proportionalitätsfaktor dar.

Eigenschaften
1. Die grafische Darstellung einer solchen Funktion ist stets eine Gerade.
2. Diese Gerade verläuft immer durch den Koordinatenursprung.
3. Die Größe m bestimmt die Änderung eines Wertes y_1 auf y_2, wenn sich der x-Wert von x_1 auf x_2 ändert.
4. Für proportionale Funktionen gilt immer: y : x = constant (= m)



m kann positiv und negativ sein.

Wertetabelle einer proportionalen Funktion

Das siebenfache von 5 l ....

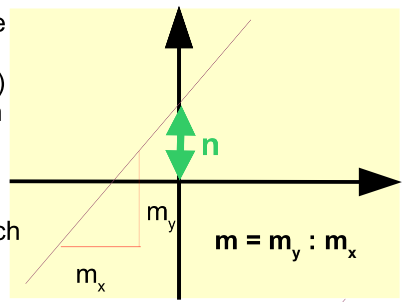
V in l	0	5	10	15	20	35	50	100
P in €	0	5,25	10,50	15,75	21,00	36,75	52,50	105,00
P/V		**1,05**	**1,05**	**1,05**	**1,05**	**1,05**	**1,05**	**1,05**

… ist gleich dem siebenfachen von 5,25 €

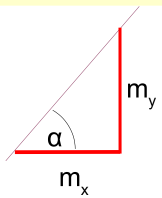
Für jedes Wertepaar in einer Spalte ist der Quotient gleich
5,25 € : 5 l = 1,05 €/l; 36,75 € / 35 l = 1,05 €/l

Die allgemeine lineare Funktion y = m * x + n

Die allgemeine lineare Funktion stellt eine Erweiterung der unter 1 angegebenen Funktion dar, deren Anfangswert (für x=0) nicht 0 ist, sondern einen festen positiven oder negativen Wert n besitzt.
z.B. Um Zinsen von einer Bank zu bekommen muss zunächst ein Betrag eingezahlt werden, danach berechnen sich die Zinsen als lineare Funktion.



Ergänzende Eigenschaften
1. Die grafische Darstellung einer solchen Funktion ist stets eine Gerade, die die y-Achse im Punkt y = n schneidet.
2. Diese Gerade verläuft immer duch den Punkt x=0 y=n.



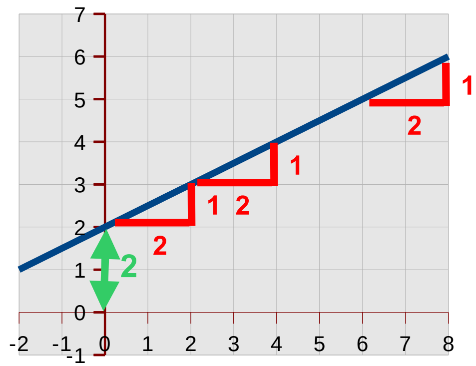
n kann positiv und negativ sein.

Jeder linearen Funktion kann ein rechtwinkliges **Steigungsdreieck** mit den Katheten m_y und m_x zugeordnet werden. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist ein Stück aus der Geraden selbst.

Durch das Verhältnis $m_y : m_x$ ist der **Steigungswinkel** α einer linearen Funktion eindeutig festgelegt. Es gilt die Beziehung:

Beispiel:

y = ½ * x + 2



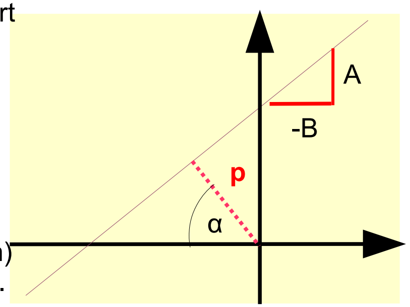
Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineare Funktionen		

Die Hessesche-Normalform Ax + By = C

Zum Normieren dieser Gleichung dividiert man den gesamten Ausdruck durch:
$\sqrt{A^2 + B^2}$
und erhält damit folgende Gleichung:
$x^{*}\cos\alpha + y^{*}\sin\alpha = p$
α ist in diesem Fall nicht der Steigungswinkel der Geraden, sondern der Winkel, wie er in der Skizze eingetragen ist. p stellt den (senkrechten) Abstand der Geraden zum Ursprung dar.

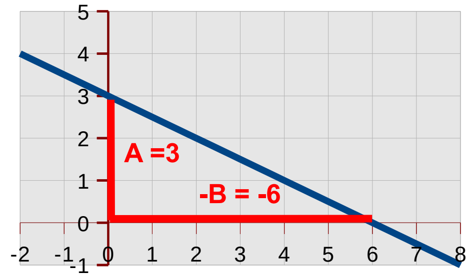


Eine Möglichkeit zur Bestimmung des Steigungsdreiecks: $m = m_y : m_x$ = **A : - B**

Beispiel:

3 x + 6 y = 18
A = 3
B = 6
C = 18

6y = - 3x + 18
y = - ½ x + 3



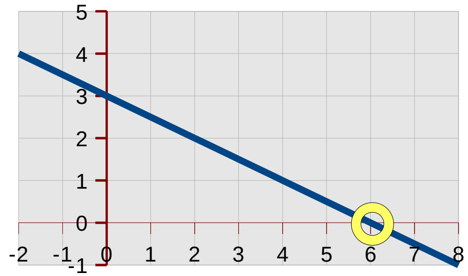
Faktorisierte Form $y = m * (x - x_0)$

Da eine Lineare Funktion ein Polynom 1. Ordnung ist, muss für diese Funktion auch der Wurzelsatz von Vieta gelten. Allerdings kommt er für lineare Funktionen selten zum Einsatz, aber man kann über Steigung und Schnittpunkt mit der x-Achse die Geradengleichung bestimmen.

Aus der Gleichung y = mx + n folgt für die Nullstelle: $x_0 = -n/m$; $y_0 = 0$
Setzt man diesen x-Wert in die Formel des Vieta ein erhält man:
y = m * (x - (-n/m)) = m * x + n
womit wieder die allgemeine Geradengleichung erreicht ist.

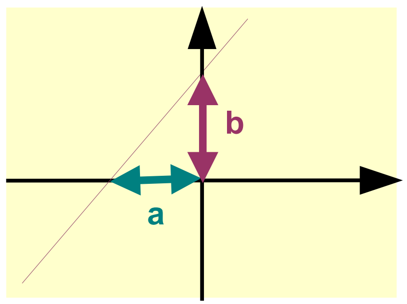
Beispiel:
Nullstelle bei x=6
m = ½

y = - ½ (x – 6)
y = - ½ x + 3



Die Achsenabschnittsgleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Eigenschaften
In der Achsenabschnittsgleichung sind die Schnittpunkte der Geraden mit der x- bzw. y-Achse explizit ausgewiesen. Die Schnittpunkte mit den Achsen stellen jeweils die Nenner der Brüche dar, deren betreffende Achse im Zähler angegeben ist.



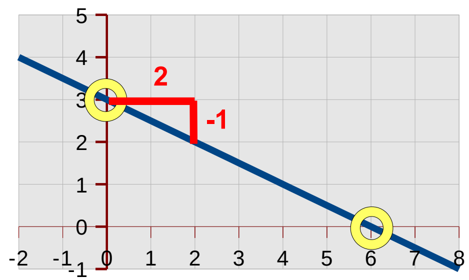
Eine Möglichkeit zur Bestimmung des Steigungsdreiecks: $m = m_y : m_x$
= **b : a**

Sind die Schnittpunkte mit den Achsen bekannt, kann so die Geradengleichung bestimmt werden. In obenstehender Skizze ist a als negative Zahl zu verwenden.

Beispiel: P_1 = (0, 3)
P_2 = (6, 0)

$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$

3 x + 6 y = 18
6y = - 3x + 18
y = - ½ x + 3



Treff Lernen
Christina Strauch

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Funktionen

Bestimmung der Geradengleichung aus Punkt und Anstieg

Durch die Kenntnis eines Punktes und des Anstieges ist eine Gerade eindeutig festgelegt. Deshalb kann man aus diesen Angaben die zugehörige Geradengleichung erstellen.

Gegeben: $P_0\ (x_0, y_0)$
m

$$\boxed{y - y_0 = m * (x - x_0)}$$

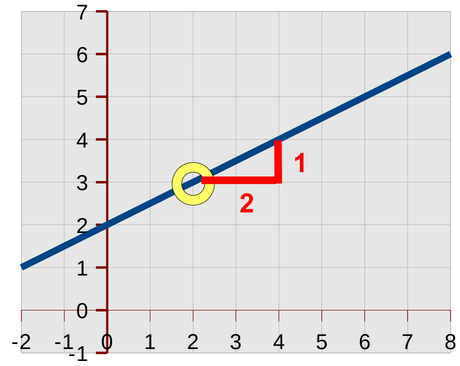
oder aus: $y_0 = m * x_0 + b$ folgt $b = y_0 - m * x_0$

$$y = m * x \underbrace{+ y_0 - m * x_0}_{b}$$

Für den Anstieg m ist der Wert über dem Bruchstrich die y-Differenz, der Wert unter dem Bruchstrich die x-Differenz. Ist m ganzzahlig, ist als x-Differenz 1 anzusetzen.
Für negatives m ist entweder der x-Wert in positive Richtung und der y-Wert in negative Richtung (vom festen Punkt aus gesehen) abzutragen, wie in der nebenstehenden Skizze rot, oder in negative x-Richtung und positive y-Richtung, wie in nebenstehender Skizze grün. Beides führt zu Erfolg.

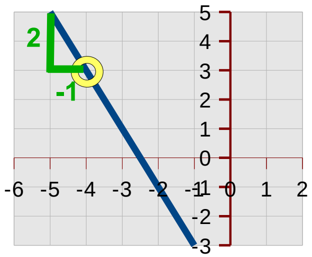
Beispiel: $P_0 = (2, 3)$
$m = ½$

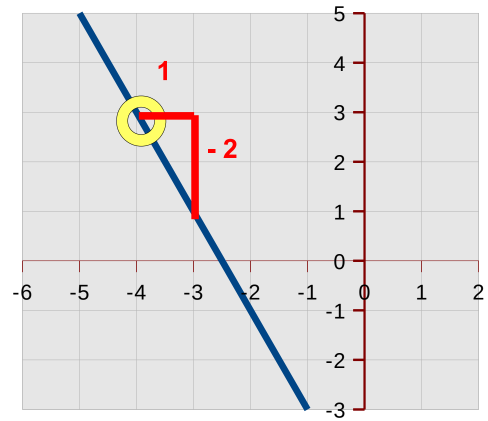
$y - 3 = ½ * (x - 2)$
$y = ½ * x + 2$



Beispiel: $P_0 = (-4, 3)$
$m = -2$

$y - 3 = -2 * (x + 4)$
$y = -2*x - 5$





Bestimmung der Geradengleichung aus zwei Punkten

Durch die Kenntnis zwei Punkten ist eine Gerade eindeutig festgelegt. Deshalb kann man aus diesen Angaben die zugehörige Geradengleichung erstellen.

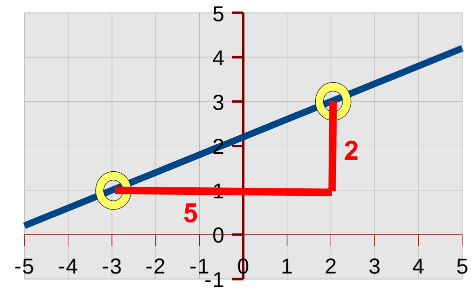
Gegeben: $P_1\ (x_1, y_1)$
$P_2\ (x_2, y_2)$

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Beispiel: $P_1 = (2, 3)$
$P_2 = (-3, 1)$

$$\frac{y - 3}{x - 2} = \frac{1 - 3}{-3 - 2}$$

$y - 3 = -2/-5 * (x - 2)$
$y = 2/5*x + 11/5$



Treff Lernen
Christina Strauch

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem heißt dann linear, wenn alle Variablen nur in der ersten Potenz auftreten.
Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems

$$a_1\,x + b_1\,y = c_1$$
$$a_2\,x + b_2\,y = c_2$$

Gesucht sind diejenigen Werte x und y, für die sowohl die erste Zeile, wie auch die zweite Zeile eine richtige Gleichung ergibt.

Beispiel:

$$3\,x + 6\,y = 12$$
$$-4\,x + 2\,y = 4$$

Dieses Beispiel wird auf den folgenden Seiten mit allen Methoden gerechnet !

Die Lösungsmöglichkeiten

Es gibt drei verschieden Lösungsmöglichkeiten:

1. Es gibt genau eine Lösung x_0 und y_0 die die beiden Gleichungen erfüllt. (Normalfall)

2. Es gibt unendlich viele x und y, wobei für alle richtigen Lösungen x_0 und y_0 (die beiden Gleichungen unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor)

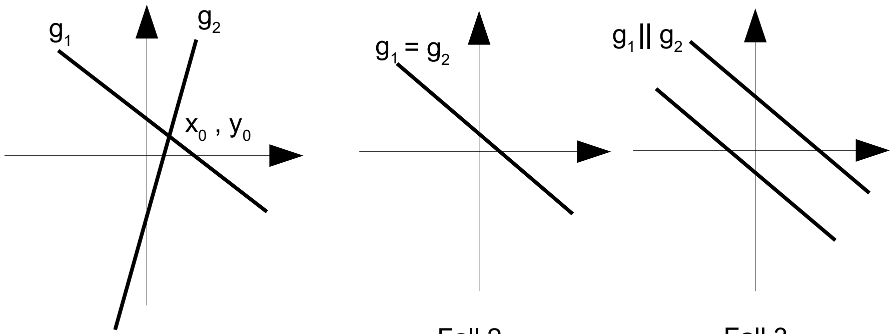
$$a_1\,x + b_1\,y = c_1$$
$$t^*a_1\,x + t^*b_1\,y = t^*c_1$$

Beispiel: $3\,x + 6\,y = 12$
$9\,x + 18\,y = 36$
(Die zweite Zeile ist das dreifache der ersten)

3. Es gibt keine Lösung des Gleichungssystems. (Die Gleichungen widersprechen sich)

$$a_1\,x + b_1\,y = c_1$$
$$a_1\,x + b_1\,y = c_2$$

Beispiel: $3\,x + 7\,y = 12$
$3\,x + 7\,y = 15$
(Es können keine x_0 y_0 existieren, die beide Gleichungen erfüllen)



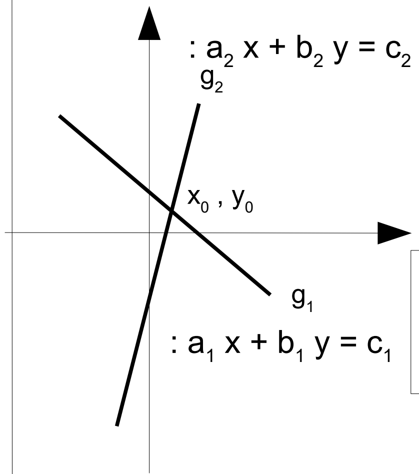
Fall 1 Fall 2 Fall 3

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineare Gleichungs-systeme	**Lösungsmöglichkeiten für den Normalfall**	

Lösungsmöglichkeiten für den Normalfall

Graphische Lösung



Jede Gleichung repräsentiert eine Gerade im Koordinatensystem

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

Die Lösung ist der Schnittpunkt der beiden Geraden:
Nur dieser Punkt genügt sowohl der ersten als auch der zweiten Gleichung.

Musterbeispiele

Treten bei den Gleichungen in den Koeffizienten Brüche auf, so kann man zeilenweise die Gleichungen mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren, ohne den Lösungsmenge zu verändern:

$$\frac{1}{3} x + \frac{3}{4} y = \frac{13}{6} \quad | * 12$$

$$\frac{2}{5} x + \frac{1}{3} y = 4 \quad | * 15$$

$$4x + 9y = 26$$

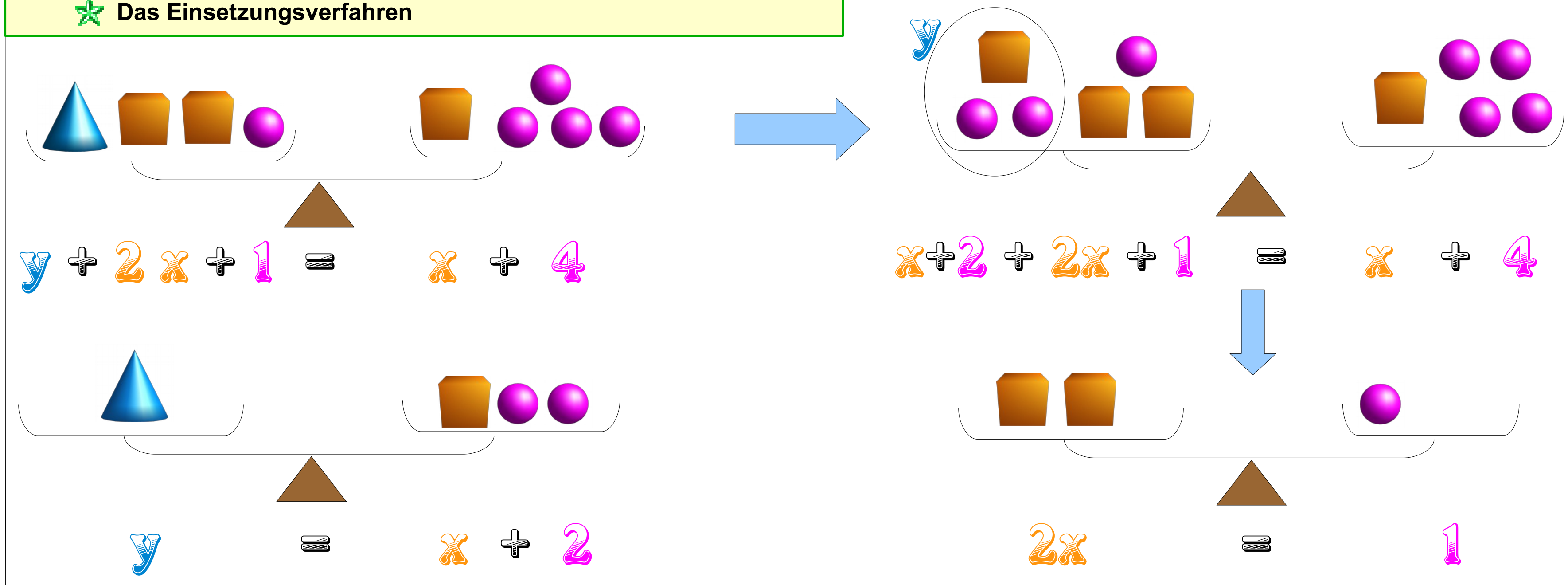
$$6x + 5y = 60$$

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Lineare Gleichungs-systeme

Das Einsetzungsverfahren



Eine der beiden Gleichungen wird nach x oder y aufgelöst und in die andere Gleichung eingesetzt:

$a_1\ x + b_1\ y = c_1$

$a_2\ x + b_2\ y = c_2$

$$x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}\ y$$

$$\boxed{a_2 * \left(\frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}\ y \right) + b_2\ y = c_2}$$

Eine Gleichung mit einer Unbekannten.
=> y berechnen

Das berechnete y in eine der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
Damit entsteht wieder eine Gleichung mit einer Unbekannten, diesmal x.
=> x berechnen

Mit der zweiten Gleichung die Probe machen !

Musterbeispiele

Beispiel:

$3\ x + 6\ y = 12$

$-4\ x + 2\ y = 4$

$$x = \frac{12}{3} - \frac{6}{3}\ y$$

$$\boxed{-4 * \left(\frac{12}{3} - \frac{6}{3}\ y \right) + 2\ y = 4}$$

=> y berechnen: $\underline{\underline{y = 2}}$

$3\ x + 6 * 2 = 12$

=> x berechnen: $\underline{\underline{x = 0}}$

$-4 * 0 + 2 * 2 = 4$

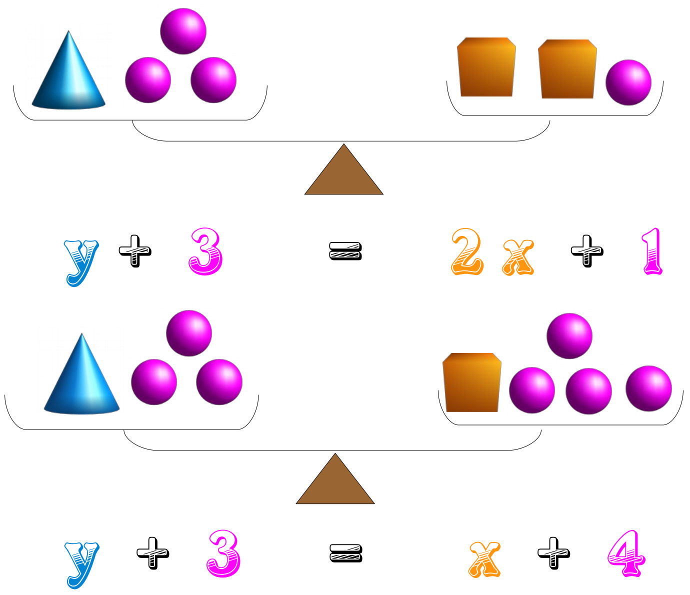
Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Gesetze und Regeln

Das Gleichsetzungsverfahren



Beide Gleichungen werden nach x oder y aufgelöst und anschließend geichgesetzt

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

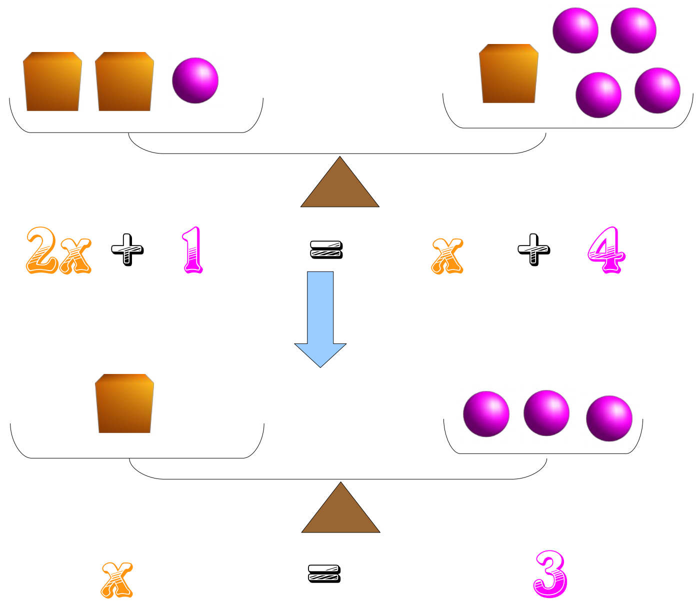
$x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} y$ Erste Gleichung nach x aufgelöst

$x = \frac{c_2}{a_2} - \frac{b_2}{a_2} y$ Zweite Gleichung nach x aufgelöst

$$\boxed{\frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} y = \frac{c_2}{a_2} - \frac{b_2}{a_2} y}$$

Weiter wie beim Einsetzungsverfahren

Musterbeispiele



Beispiel:

$$3 x + 6 y = 12$$
$$-4 x + 2 y = 4$$

$x = \frac{12}{3} - \frac{6}{3} y$ Erste Gleichung nach x aufgelöst

$x = \frac{-4}{4} + \frac{2}{4} y$ Zweite Gleichung nach x aufgelöst

$$\frac{12}{3} - \frac{6}{3} y = \frac{-4}{4} + \frac{2}{4} y$$

$$4 - 2 y = -1 + \frac{1}{2} y$$

$$5 = 2 y + \frac{1}{2} y$$

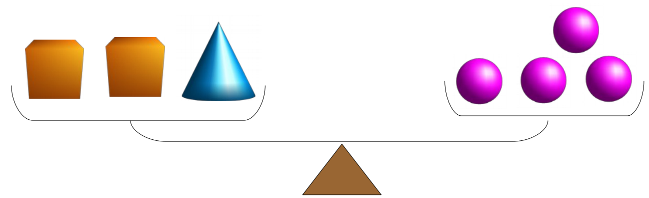
$$\underline{\underline{y = 2}}$$

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

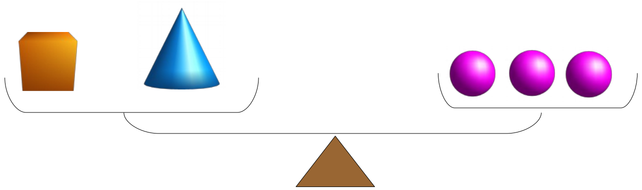
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Das Additions- und Subtraktionsverfahren



$2x + y = 4$



$x + y = 3$

Eine Gleichung oder beide werden mit einem Faktor so Multipliziert, dass beim Addieren der beiden Gleichungen eine Variable verschwindet:

$$a_1\,x + b_1\,y = c_1 \quad |\, * a_2$$
$$a_2\,x + b_2\,y = c_2 \quad |\, * -a_1$$

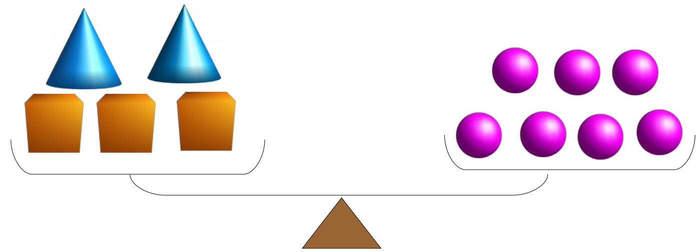
$$a_2 * a_1\,x + a_2 * b_1\,y = a_2 * c_1$$
$$-a_1 * a_2\,x + (-a_1) * b_2\,y = (-a_1) * c_2 \quad |\, +$$

$$\boxed{a_2 * b_1\,y - a_1 * b_2\,y = a_2 * c_1 - a_1 * c_2}$$

Weiter wie beim Einsetzungsverfahren

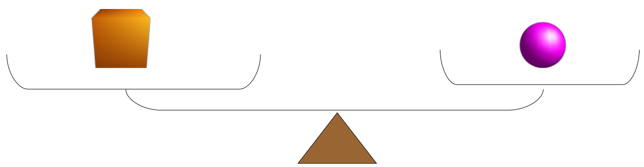
Musterbeispiele

I + II



$3x + 2y = 7$

I – II



$x = 1$

Beispiel:

$$3x + 6y = 12 \quad |\, * 4$$
$$-4x + 2y = 4 \quad |\, * 3$$

$$12x + 24y = 48$$
$$-12x + 6y = 12 \quad |\, +$$

$$24y + 6y = 48 + 12$$
$$30y = 60$$
$$\underline{\underline{y = 2}}$$

Treff Lernen Christina Strauch

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Das Diagonalverfahren

Das Diagonalverfahren ist eine Fortsetzung des Additionsverfahrens.

$$
\begin{array}{ll}
a_1 x + b_1 y = c_1 & | * a_2 \\
a_2 x + b_2 y = c_2 & | * -a_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
a_2 \cdot a_1 x + a_2 \cdot b_1 y = a_2 \cdot c_1 & \\
-a_1 \cdot a_2 x + (-a_1) \cdot b_2 y = (-a_1) \cdot c_2 & | +
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a_1 x + b_1 y = c_1 \\
+ (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) y = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2
\end{array}
$$

Bis zu dieser Stelle ist es das normale Additionsverfahren. Jetzt wird beginnend mit der untersten Zeile das Additionsverfahren so fortgesetzt, dass die Variable in der ersten Zeile verschwindet. Der Vorteil besteht darin, dass danach in der ersten Zeile nur noch die Variable x und in der zweiten Zeile nur die Variable y auftritt

$$
\begin{array}{ll}
a_1 x + b_1 y = c_1 & | \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \\
+ (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) y = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2 & | \cdot - b_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a_1 \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)\, \mathbf{x} = c_1 \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) - b_1 (a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2) \\
(a_2 * b_1 - a_1 * b_2)\, \mathbf{y} = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a_1 \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)\, \mathbf{x} = -a_1 \cdot b_2 \cdot c_1 + a_1 \cdot b_1 \cdot c_2 \\
(a_2 * b_1 - a_1 * b_2)\, \mathbf{y} = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a_1 \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)\, \mathbf{x} = a_1 \cdot (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1) \\
(a_2 * b_1 - a_1 * b_2)\, \mathbf{y} = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2
\end{array}
$$

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}} \qquad \boxed{\mathbf{y} = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}}$$

(Im Zähler und Nenner sind die Vorzeichen vertauscht, damit eine Übereinstimmung mit dem Ergebnis der nächsten Seite gegeben ist.)

Musterbeispiele

Beispiel:

$$
\begin{array}{ll}
3x + 6y = 12 & | * 4 \\
-4x + 2y = 4 & | * 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
12x + 24y = 48 & \\
-12x + 6y = 12 & | +
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
3x + 6y = 12 \\
30y = 60
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
12x + 24y = 48 & | * 30 \\
30y = 60 & | * (-24)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
36x = 0 & \\
30y = 60 & | : 30
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x = 0 \\
y = 2
\end{array}
$$

Mathematik – Intensivkurs: Lineare Funktionen und Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Gesetze und Regeln

Das Determinantenverfahren (Cramersche Regel)

Als Determinante bezeichnet man ein mathematisches Konstrukt, das nur aus den Koeffizienten des Gleichungssystems besteht.

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Koeffizientendeterminate: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Berechnung einer zweireihigen Determinante:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Ersetze in der ersten Spalte die Werte a_i durch die Werte c_i

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

Ersetze in der zweiten Spalte die Werte b_i durch die Werte c_i

$$\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$x = \frac{\mathbf{D_x}}{\mathbf{D}} = \frac{0}{30}$$

Die Determinante, in der die rechte Seite in die erste Spalte eingesetzt wird(D_x), wird durch die Determinante dividiert, die aus den Koeffizienten errechnet wurde. Das Ergebnis ist die Variable x.

$$y = \frac{\mathbf{D_y}}{\mathbf{D}} = \frac{60}{30}$$

Die Determinante, in der die rechte Seite in die zweite Spalte eingesetzt wird(D_y), wird durch die Determinante dividiert, die aus den Koeffizienten errechnet wurde. Das Ergebnis ist die Variable y.

> Dieses Verfahren ist auch für größere Gleichungssysteme anwendbar, allerdings ist dann die Berechnung der Determinanten etwas aufwändiger.

Musterbeispiele

Beispiel:

$$3x + 6y = 12$$
$$-4x + 2y = 4$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3*2 + 4*6 = 30$$

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12*2 - 4*6 = 0$$

$$\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 3*4 + 4*12 = 60$$

Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten spiegeln sich auch bei der Berechnung über Determinanten wider:

1. Eindeutige Lösung: D ist von 0 verschieden
2. Unendlich viele Lösungen: $D = D_x = D_y = 0$; alle drei Determinanten haben den Wert 0.
3. Nicht Lösbar: D = 0 und mindesten eine der anderen Determinanten ist verschieden von 0