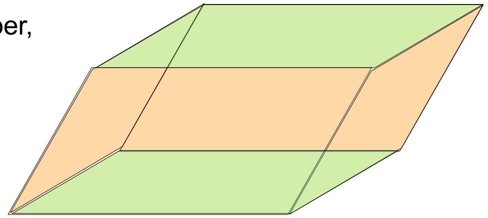
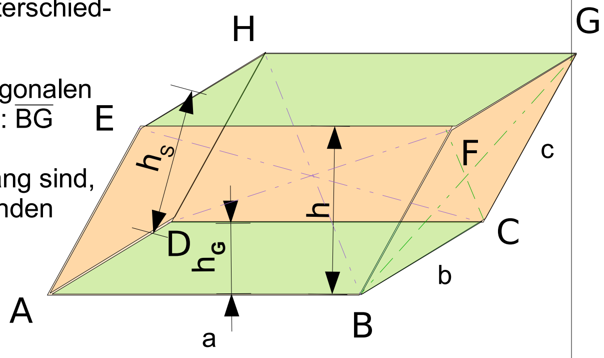
Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Körper	**Prisma**	



Ein Prisma ist ein geschlossener Körper, der aus
- 6 Parallelogrammen, bei denen je zwei gleich groß sind
- 8 Ecken
- 12 Kanten

besteht.
Die Seitenflächen stoßen in unterschiedlichen Winkeln aneinander.



Ein Prisma besitzt 6 Flächendiagonalen (zwei davon grün eingezeichnet: $\overline{BG}$ und $\overline{CF}$) von denen jeweils zwei gleich lang sind, nämlich die auf gegenüberliegenden Seiten.

und 4 Raumdiagonalen. (drei davon pink eingezeichnet: $\overline{DF}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$) von denen jeweils zwei gleich lang sind, $\overline{CE}$, $\overline{BH}$ und $\overline{DF}$, $\overline{AG}$,

Die Raumdiagonalen treffen sich in einem Punkt und halbieren sich in diesem Schnittpunkt. Raumdiagonalen und Flächendiagonalen bilden **keine** rechtwinkligen Dreiecke.

Die **Oberfläche** eines Prismas ergibt sich aus 6 Paralleogrammen, die jeweils paarweise gleich sind:

Grundfläche + Deckfläche + Umfang der Grundfläche * Höhe der Seitenflächen

$$O = a \cdot h_G + a \cdot h_G + 2 \cdot (a + b) \cdot h_S$$
$$= 2\,(a \cdot h_G + (a+b) \cdot h_S)$$

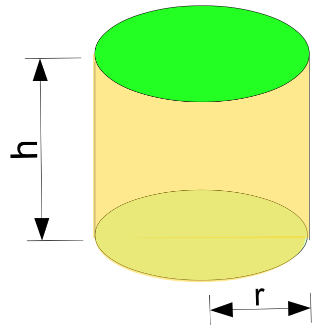
Da die Höhe der Parallelogramm auf der Vorder- und Rückseite gleich der Höhe der Parallelogramme an den Seitenflächen sind, kann man den Umfang der Grundfläche a + b + a + b mit der gleiche Höhe Multilpizieren das Volumen ergibt sich aus der Grundfläche und der Höhe des Prismas, nicht der Seitenlänge von c !

$$V = a \cdot h_G \cdot h$$

Mathematik – Intensivkurs: Körper		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Körper		

Zylinder

Wenn ein Rechteck um eine seiner Seiten rotiert, entsteht ein Zylinder.



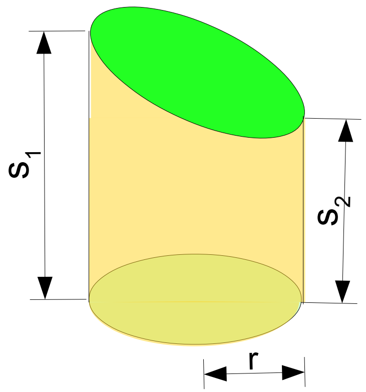
$V = \pi r^2 h$

Mantelfläche

$M = 2\pi r h = \pi d$

$O = 2 \pi r (r + h)$

Schief abgeschnittener gerader Kreiszylinder



$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 (s_1 + s_2)$$

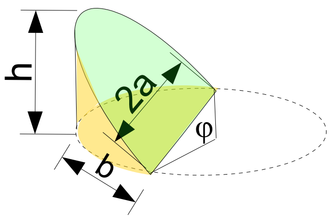
Mantelfläche

$$M = \pi r (s_1 + s_2)$$

$$O = \pi r \left[s_1 + s_2 + r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2} \right]$$

Zylinderabschnitt (Zylinderhuf)

φ Mittelpunktswinkel des Grundrisses im Bogenmaß
2a Hufkante
h Längste Mantellinie
b Lot von Fußpunkt von h auf die Hufkante



$$V = \frac{h}{3b} \left[a(3r^2 - a^2) + 3r^2 (b - r) \frac{\varphi}{2} \right]$$

$$M = \frac{2rh}{b} \left[(b - r) \frac{\varphi}{2} + a \right]$$

Für a=b=r ergibt sich: $V = \frac{2}{3} r^2 h \quad M = 2rh$

Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Körper		

Pyramide

Von der Grundfläche eines n-Eck treffen sich alle ausgehenden Strahlen in einem Punkt S, dem Scheitel.
Während die Grundfläche ein beliebiges n-Eck sein kann entstehen als Seitenflächen immer Dreiecke.

Die **Oberfläche** der Pyramide errechnet sich aus der Grundfläche und den vorhandenen Seitenflächen.

$$O = A_G + A_{S1} + A_{S2} + \ldots A_{Sn}$$

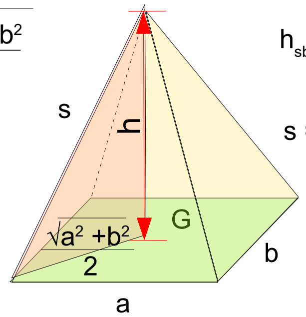
Das **Volumen** aller solcher Pyramiden ergibt sich aus

$$V = \frac{1}{3} A_G \; h$$

Daraus folgt, dass alle Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe das gleiche Volumen haben.

Die Rechteck-Pyramide

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2 + b^2}{4}}$$

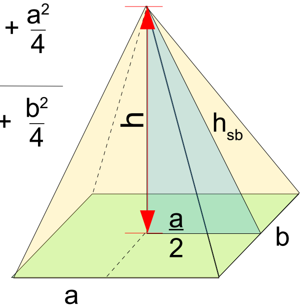


$$V = \frac{1}{3} \; a*b \; h$$

$$O = a*b + (a*h_{sa} + b*h_{sb})$$

$$h_{sb} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$s = \sqrt{h_{sb}^{\;2} + \frac{b^2}{4}}$$



analog gelten die Formeln für h_{sa}

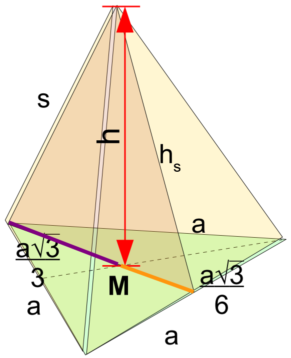
Die regelmäßige Dreieck-Pyramide

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} \qquad h_s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$$

$$h_s = \sqrt{h_s^{\;2} + \frac{a^2}{4}} \qquad h_G = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} A_G \; h = \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \; a \; a\sqrt{3}\right)}_{\text{Grundfläche}} h = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{12}$$

$$O = \frac{1}{2} (a*h_g + 3*a*h_s) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3ah_s}{2}$$



© Dipl.-Math. Armin Richter

Treff Lernen Christina Strauch

Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Körper

Die Quadratische – Pyramide

Mittelpunktswinkel : $\alpha = 90°$

Basiswinkel : $\beta = 45°$

Umkreisradius : $r = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$

Höhe Grundflächendreieck : $h_D = a/2$

$$V = \frac{1}{3} a^2 h$$

$$O = a^2 + 2 a{*}h_{MD} = 4 \left(\tfrac{1}{2} a\, h_D + \tfrac{1}{2} a\, h_{MD} \right) = 4 \quad \tfrac{1}{2} a \quad (h_D + h_{MD})$$

1. rechtwinkliges Dreieck $\boxed{s^2 = r^2 + h^2}$

$\sin \gamma = \frac{h}{s}$ $\cos \gamma = \frac{r}{s}$ $\tan \gamma = \frac{h}{r}$

$\sin \delta = \frac{r}{s}$ $\cos \delta = \frac{h}{s}$ $\tan \delta = \frac{r}{h}$

2. rechtwinkliges Dreieck $\boxed{h_{MD}^2 = h_D^2 + h^2}$

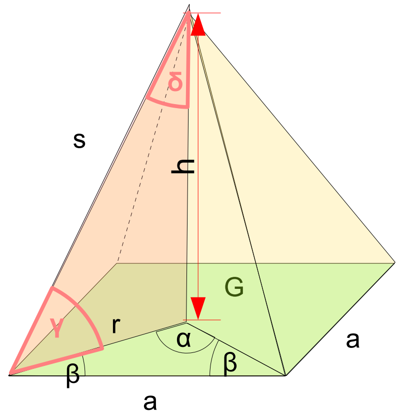
$\sin \varepsilon = \frac{h_D}{h_{MD}}$ $\cos \varepsilon = \frac{h}{h_{MD}}$ $\tan \varepsilon = \frac{h_D}{h}$

$\sin \eta = \frac{h}{h_{MD}}$ $\cos \eta = \frac{h_D}{h_{MD}}$ $\tan \eta = \frac{h}{h_D}$

3. rechtwinkliges Dreieck $\boxed{s^2 = h_{MD}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$\sin \varphi = \frac{h_{MD}}{s}$ $\cos \varphi = \frac{a}{2s}$ $\tan \varphi = \frac{2h_{MD}}{a}$

$\sin \omega = \frac{a}{2s}$ $\cos \omega = \frac{h_{MD}}{s}$ $\tan \omega = \frac{a}{2h_{MD}}$



Winkelfunktionen der Grundflächenwinkel

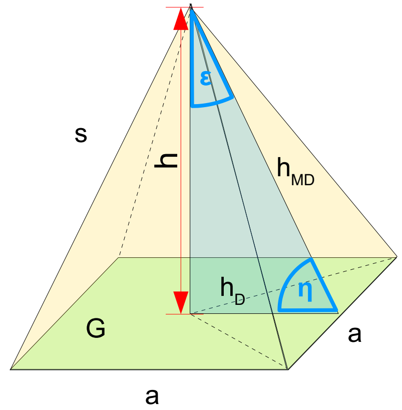
$\sin \alpha/2 = \frac{a}{2r}$ $\sin \beta = \frac{h_D}{r}$

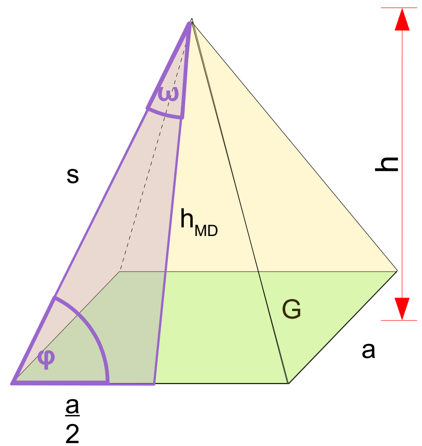
$\cos \alpha/2 = \frac{h_D}{r}$ $\cos \beta = \frac{a}{2r}$

$\tan \alpha/2 = \frac{a}{2h_D}$ $\tan \beta = \frac{2\,h_D}{a}$

Pythagoras der Grundfläche

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_D^2 = r^2$$





Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Körper	**Die 5 – seitige – Pyramide**	

Mittelpunktswinkel : $\alpha = 72°$

Basiswinkel : $\beta = 54°$

Umkreisradius : $r = ½\, a / \sin 54°$

Höhe Grundflächendreieck : $h_D = r \ \sin 54°$

Grundfläche : $G = 5/2\, a \cdot h_D = 5/2\, a \cdot r \cdot \sin 54°$

$V = \frac{1}{3}\, G\, h$

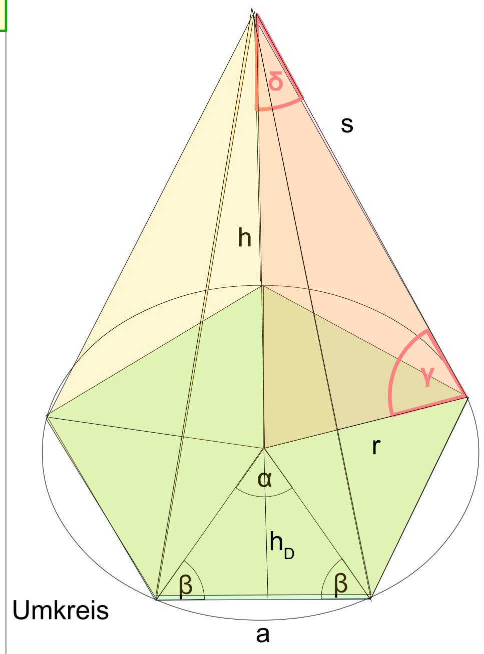
$O = G + 5/2 \cdot a \cdot h_{MD} = 5\,(½\, a\, h_D + ½\, a\, h_{MD}) = 5 \quad ½\, a \quad (h_D + h_{MD})$

1. rechtwinkliges Dreieck $\boxed{s^2 = r^2 + h^2}$

2. rechtwinkliges Dreieck $\boxed{h_{MD}^{\ 2} = h_D^{\ 2} + h^2}$

3. rechtwinkliges Dreieck $\boxed{s^2 = h_{MD}^{\ 2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Die trigonometrischen Beziehungen entsprechen denen der quadratischen Pyramide.



Winkelfunktionen der Grundflächenwinkel

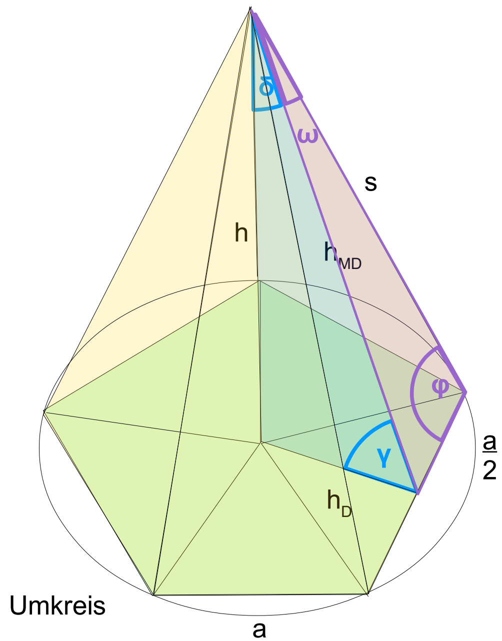
$\sin \alpha/2 = \frac{a}{2r}$ $\quad \sin \beta = \frac{h_D}{r}$

$\cos \alpha/2 = \frac{h_D}{r}$ $\quad \cos \beta = \frac{a}{2r}$

$\tan \alpha/2 = \frac{a}{2h_D}$ $\quad \tan \beta = \frac{2\, h_D}{a}$

Pythagoras der Grundfläche

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_D^{\ 2} = r^2$$



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Körper	see below	

Pyramidenstumpf (Obelisk)

Ein Pyramidenstumpf entsteht, wenn eine Ebenen parallel zur Grundfläche den oberen Teil der Pyramide abtrennt.

Die **Oberfläche** berechnet sich aus zwei Grundflächen und der stehen gebliebenen Mantelfläche. Die Mantelfläche setzt sich grundsätzlich aus Trapezen zusammen.

Das **Volumen** aller solcher Pyramiden berechnet sich aus der Differenz der beiden Pyramiden.

Die Rechteck-Pyramidenstumpf

Kantenlänge des Pyramidenstumpfes

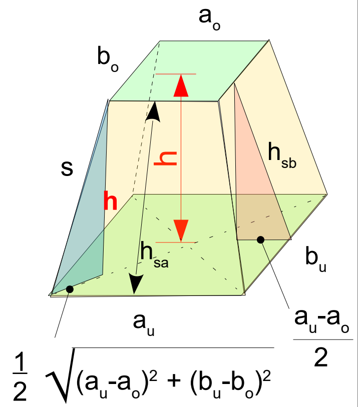
$$s = \sqrt{h^2 + \frac{(a_u-a_o)^2 + (b_u-b_o)^2}{4}}$$

Höhe des Trapezes der Seiten b

$$h_{sb} = \sqrt{h^2 + \frac{(a_u-a_o)^2}{4}}$$

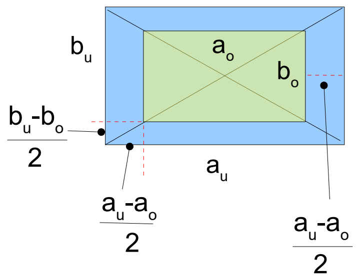
Höhe des Trapezes der Seiten a

$$h_{sa} = \sqrt{h^2 + \frac{(b_u-b_o)^2}{4}}$$



$$V = \frac{1}{6}\left(a_u b_u + (a_u+a_o)(b_u+b_o) + a_o b_o\right) h$$

$$O = a_u b_u + a_O b_O + (a_u + a_O)h_{sa} + (b_u + b_O)h_{sb}$$



Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Körper		

Kreiskegel

Durch einen festen Punkt S gehende und längs einer gekrümmten Linie, der Leitkurve, gleitende Gerade beschreibt eine Kegelfläche. Der Kegel ist ein Körper, der von einer Kegelfläche mit geschlossener Leitkurve und einer Ebene begrenzt wird.
Die Kegelfläche schneidet aus der Ebene die Grundfläche heraus.
Diese allgemeine Definition besagt, dass ein Kegel nicht notwendig eine Kreisfläche als Grundfläche haben muss, sich aber von einer Pyramide darin unterscheidet, dass er keine Begrenzungsflächen besitzt, sondern eine rotierende Gerade als Erzeugende.

Die **Oberfläche** des Kegels errechnet sich aus der Grundfläche und der Mantelfläche.

$$O = A_G + A_M$$

Das **Volumen** aller solcher Kegel ergibt sich aus

$$V = \frac{1}{3} A_G \; h$$

Daraus folgt, dass alle Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe das gleiche Volumen haben.

Gerader Kreiskegel

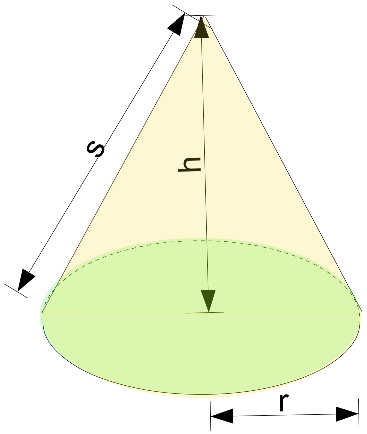
$$V = \frac{1}{3} \pi * r^2 \; h$$

$$O = \pi * r * r + \pi * r * s$$

$$= \pi * r * (r + s)$$

Dabei ist s die Mantellinie des Kegels, die nach dem Pythagoras

$$s = \sqrt{r^2+h^2}$$



Musterbeispiele

Formel für Kreissektoren

$$b = \frac{\alpha}{360^0} \; 2* \pi * r \qquad A = \frac{\alpha}{360^0} \; \pi * r^2 \qquad A = r * b /2$$

Für den Kegelmantel:

$$2* \pi * r = \frac{\alpha}{360^0} \; 2* \pi * s \qquad A = \frac{\alpha}{360^0} \; \pi * s^2$$

$$r = \frac{\alpha}{360^0} \; s$$

halber Winkel in der Spitze γ : $\sin\gamma = \frac{r}{s}$

$$\alpha = 360 * \sin\gamma$$

Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Körper		

Kegelstumpf

Ein Kegelstumpf entsteht, wenn eine Ebenen parallel zur Grundfläche den oberen Teil des Kegels abtrennt.

Das **Volumen** aller solcher Kegelstümpfe berechnet sich aus der Differenz der beiden Kegelvolumen.

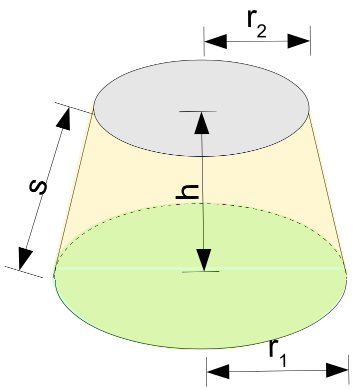
Gerader Kreiskegelstumpf

s ist die **Mantellinie** des Kegels, die nach dem Pythagoras

$s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$

$V = \frac{1}{3} \pi \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 \right) h$

$O = \pi * r_1^2 + \pi * r_2^2 + \pi * s (r_1 + r_2)$



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Oktaeder

Oktaeder

grundlegende Längen

$h1 = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$d = a \cdot \sqrt{2}$
$d/2 = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = h$
$h = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

h ist die Höhe einer Pyramide

Die Oberfläche

Fläche eines Dreiecks:
$A1 = a^2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Oberfläche
$O = a^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$

Das Volumen

Volumen einer Pyramide:
$V_P = \frac{1}{3}\ a^2\ a\ \frac{1}{2}\sqrt{2} = a^3\ \frac{1}{6}\sqrt{2}$

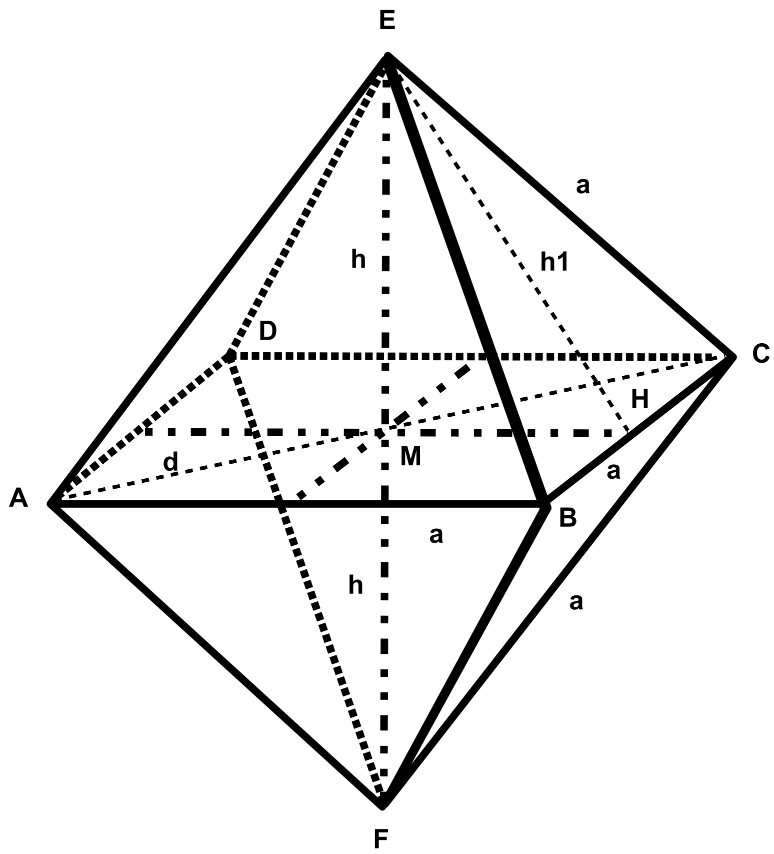
Volumen Oktaeder
$V = a^3\ \frac{1}{3}\sqrt{2}$

Der Umkugelradius

Gleichschenkliges – rechtwinkliges Dreieck
ΔAME ; ΔCME; …..

Der Radius der umschließenden Kugel ist identisch mit der halben Diagonalenlänge.

$R_U = \frac{1}{2}\ a\ \sqrt{2}$



Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Oktaeder

Winkel Seitenfläche - Grundfläche

Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber der Grundfläche

Winkel ∢ MHE

$$\sin \sphericalangle MHE = \frac{h}{h1} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\approx 0{,}816496$$

$$\cos \sphericalangle MHE = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\boxed{\sphericalangle MHE \approx 54{,}73°}$$

Winkel zwischen oberer und unterer Seitenfläche 109,46°

Winkel Höhe – Seitenfläche

Winkel ∢ MEH

$$\sin \sphericalangle MEH = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cos \sphericalangle MEH = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$$

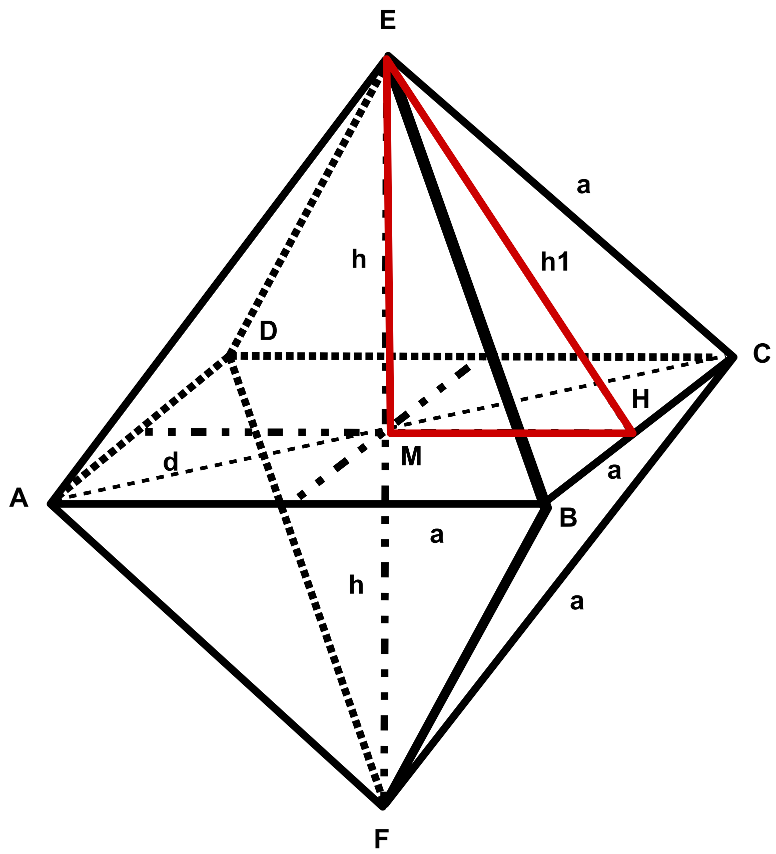
$$\boxed{\sphericalangle MEH \approx 35{,}27°}$$

Winkel gegenüberliegender Seitenflächen: 70,54°

Inkugelradius

$$\sin \sphericalangle MHE = \frac{r_I}{a/2} \qquad r_I = a/2 \cdot \sin \sphericalangle MHE = a/2 \sqrt{\tfrac{2}{3}} = a\sqrt{\tfrac{1}{6}}$$

$$\boxed{r_I = a \ \tfrac{1}{6}\sqrt{6}}$$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Oktaeder

Winkel Seitenkante - Grundfläche

Neigungswinkel der Seitenkanten gegenüber der Grundfläche

Winkel ∢ MAE

Gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, damit
sind die beiden verbleibenden Winkel 45°

Winkel Höhe – Seitenkante

Winkel ∢ MEA

Gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, damit
sind die beiden verbleibenden Winkel 45°

Winkel ∢ AEC

Neigungswinkel gegenüberliegender Seitenkanten 90°

Winkel benachbarter Seitenflächen

Ebene ABE: A $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ a/2\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

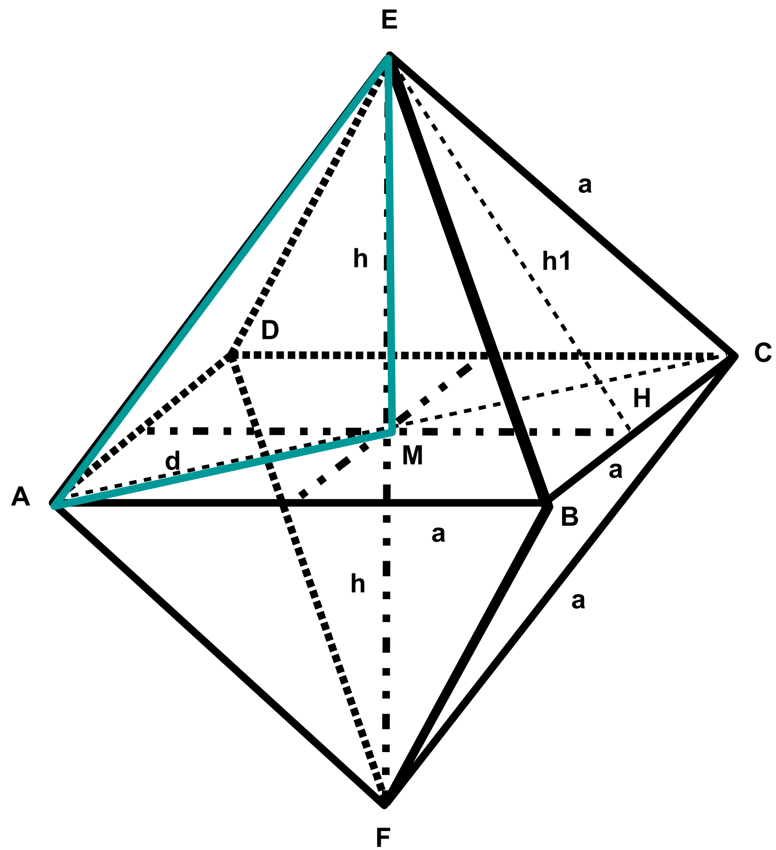
AB $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ AE $\begin{pmatrix} -\ a/2 \\ a/2 \\ a/2\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ n $\begin{pmatrix} a^2/2\ \sqrt{2} \\ 0 \\ a^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

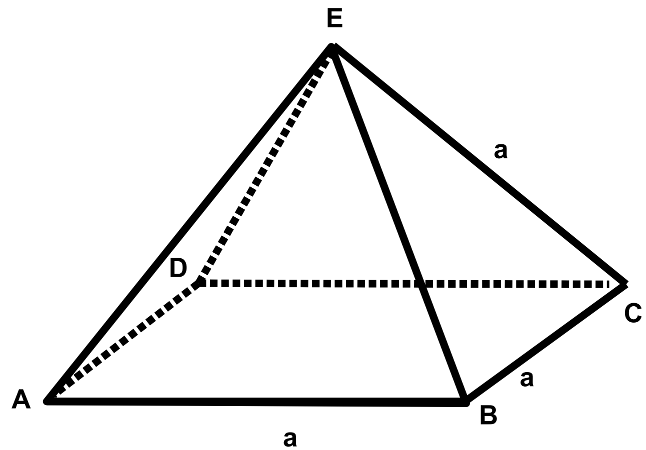
Ebene BCE: C $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ a/2\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

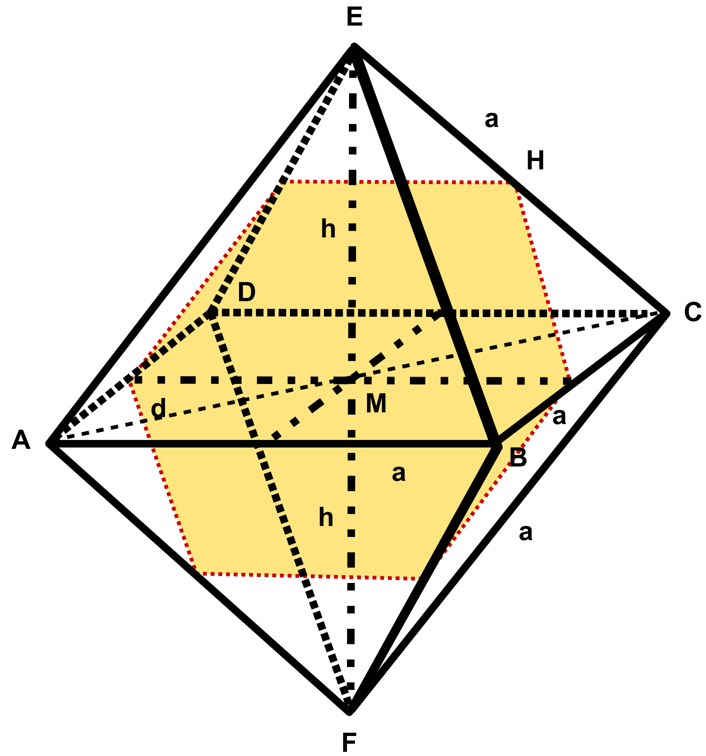
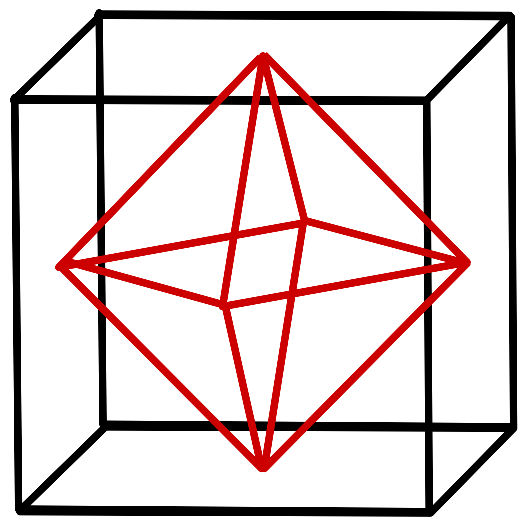
CB $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ CE $\begin{pmatrix} a/2 \\ -\ a/2 \\ a/2\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ n = $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen den Ebenen

$\cos\varphi = \frac{1}{3}$ $\boxed{\varphi = 70{,}53°}$





Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Oktaeder	**Sechseck im Oktaeder** Die Seitenlänge des Sechsecks ist nach dem Strahlensatz ½ a	
	Umschreibender Würfel Da die Diagonale der Grundfläche gleich der Gesamthöhe des Oktaeders ist, läßt sich das Oktaeder über die Diagonalen in einen Würfel einbeschreiben. Die Eckpunkte des Oktaeders sind die Seitenmittelpunkte des Würfels.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

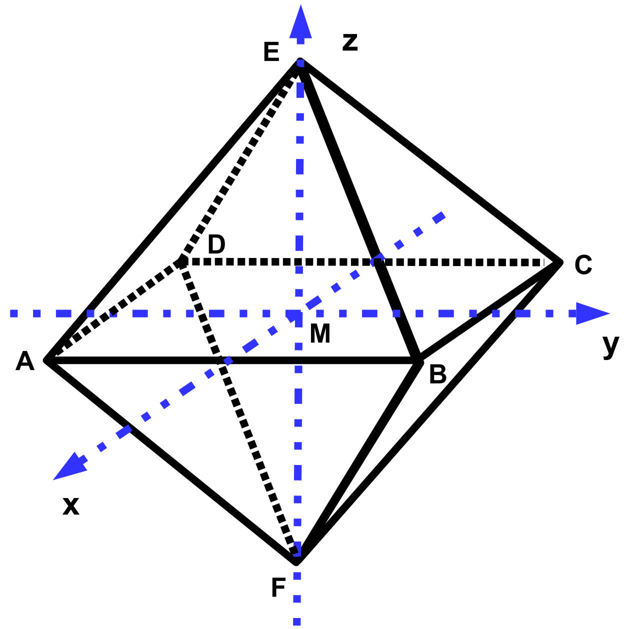
Oktaeder

Eckpunktkoordinaten

Der Mittelpunkt des Oktaeders liegt im Koordinatenursprung.
Die nachfolgenden Faktoren sind mit der Kantenlänge a zu multiplizieren und damit ergeben sich die dreidimensionalen Koordinaten der Eckpunkte.

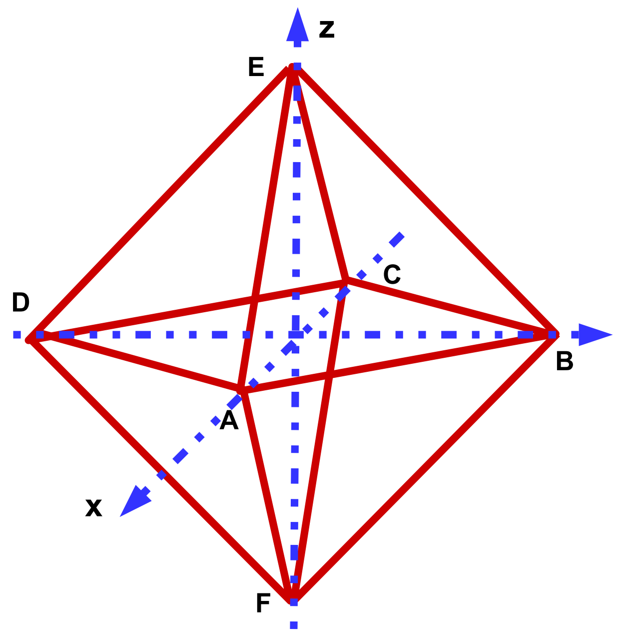
Die ersten Koordinatenangaben gelten, wenn die Kanten der Grundfläche parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Eckpunkte	x	y	z
A	0,5	- 0,5	0
B	0,5	0,5	0
C	-0,5	0,5	0
D	-0,5	-0,0	0
E	0	0	½ √2
F	0	0	- ½ √2



Die zweiten Koordinatenangaben gelten, wenn die Diagonalen der Grundfläche auf den Koordinatenachsen liegen

Eckpunkte	x	y	z
A	½√2	0	0
B	0	½√2	0
C	- ½√2	0	0
D	0	- ½√2	0
E	0	0	½√2
F	0	0	- ½√2



Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Oktaeder

Winkel zwischen Höhen benachbarter Seitenflächen

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

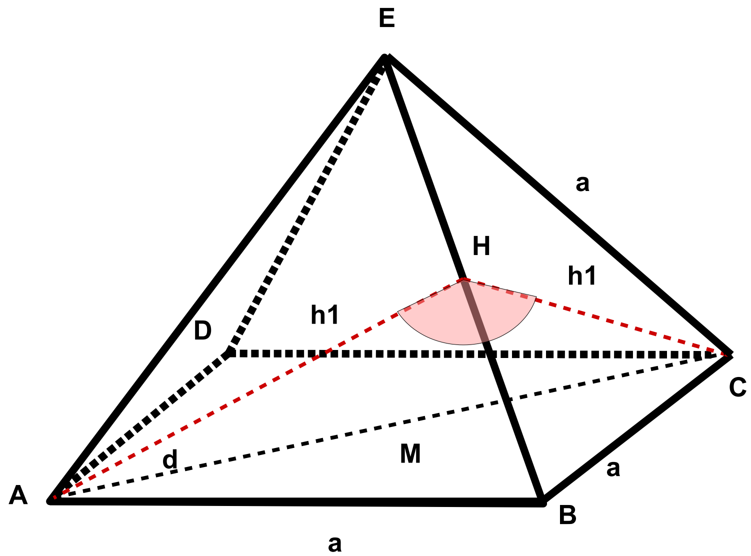
$h1 = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$d = a \cdot \sqrt{2}$

In der nebenstehenden Pyramide auf ΔAHC bezogen:

$d^2 = (h1)^2 + (h1)^2 - 2\,(h1)^2 \cos\varphi$

$2a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2\cdot\frac{3}{4}a^2 \cos(\varphi)$
$2 = 6/4 - 3/2\cos(\varphi)$
$\frac{1}{2} = -3/2\cos(\varphi)$
$-\frac{1}{3} = \cos(\varphi)$

$\boxed{\varphi = 109{,}56°}$



Berührpunkt der Innenkugel

$\cos\psi = \dfrac{r_I}{a/2} = \dfrac{a\,\frac{1}{6}\sqrt{6}}{a/2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ $\sin\psi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$L_y = r_I\cos\psi = a \cdot \frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6} = a\,\frac{1}{3}$

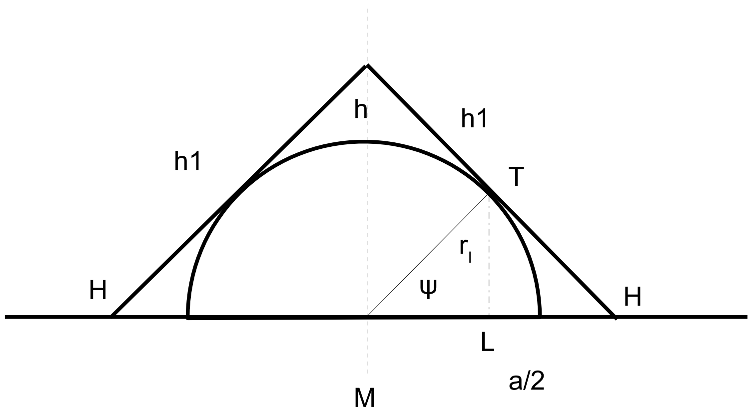
Setzt man den Koordinatenursprung in M, ist die Komponente $L_x = 0$

Die x1 – x2 Koordinaten des Punktes T sind mit denen des Punktes L identisch.

$T_z = r_I\sin\psi = a \cdot \frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = a\,\frac{1}{6}\sqrt{2}$

$T = a\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ unter der Bedingung, daß M im Koordinatenursprung liegt.

Für die andern drei Punkte oberhalb der x1 – x2 – Ebene vertauschen sich jeweils die x1 und x2 Koordinaten, bzw. erhalten ein Minuszeichen. Die x3 Koordinate bleibt für alle vier Punkte oberhalb der Grundfläche gleich.



L : Lotfußpunkt

Mathematik – Intensivkurs: Körper

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Oktaeder

Einbeschriebener Würfel

Der Abstand jedes Punktes Ti vom Koordinatenursprung beträgt die Größe des Inkugelradius. Damit liegen die Punkte auf der Inkugel, aber auch auf den Seitenflächen. Damit sind sie die Berührpunkte.

$$r_I^2 = 1/9 + 2/36 = 3/18 = 1/6$$

$$r_I = 1/6\ \sqrt{6}$$

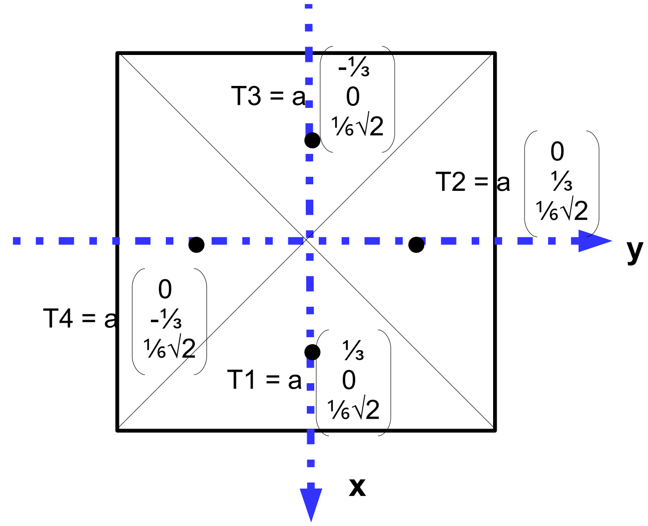
Der horizontale Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten Ti beträgt:

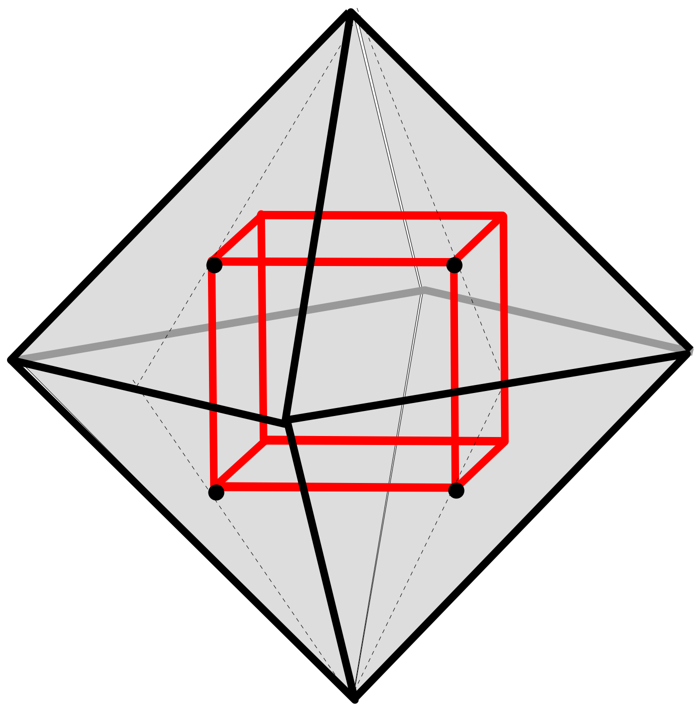
$$\Delta T_{ij}^2 = 1/9 + 1/9 = 2/9$$

$$\Delta T_{ij} = ⅓\ \sqrt{2}$$

Betrachtet man zwei übereinander liegende T Punkte, muß man deren z Koordinaten addieren. Dabei kommt ebenfalls ⅓ √2 heraus.

Die acht Berührpunkte der Inkugel mit den Seitenflächen bilden einen Würfel.





Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Oktaeder	**Berührpunkte und Seitenflächen**	

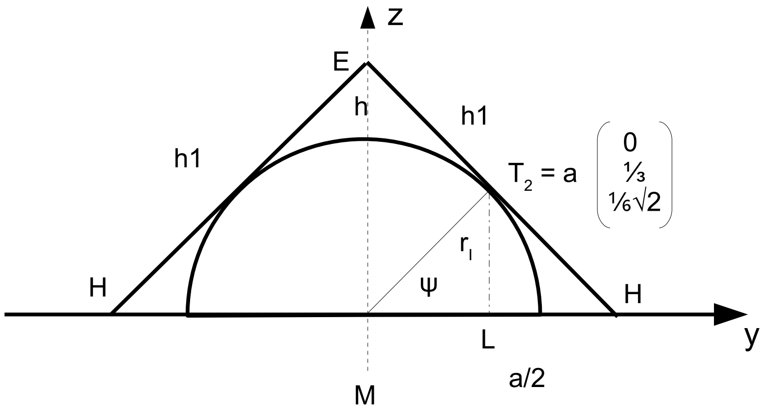
$\cos\psi = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ $\sin\psi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Als nächstes soll die Länge von der Spitze E bis zum Punkt T und die Länge vom Punkt T bist zum Punkt H berechnet werden. Das ist die Teilung der Höhe h1 des Seitenflächendreiecks durch den Berührpunkt der Inkugel.

$$\sin\psi = \frac{HT_2}{a/2} \qquad HT_2 = \tfrac{1}{2}\,a\,\sin\psi = \tfrac{1}{2}\,a \cdot \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = a \cdot \tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$

Die Strecke h1 beträgt $a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Damit ist die Länge HT_2 genau $\frac{1}{3}$ h1 .
H1 ist wegen des gleichseitigen Dreiecks Höhe, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende gleichzeitig. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, der Schwerpunkt, teilt die Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1 . Dabei ist der größere Anteil in Richtung des Eckpunktes. Die Punkte T teilen genau die Seitenhalbierenden in diesem Verhältnis.

> Die acht Berührpunkte der Inkugel mit den Seitenflächen bilden einen Würfel. Diese Berührpunkte sind genau die Schwerpunkte der Seitendreiecke.



L : Lotfußpunkt

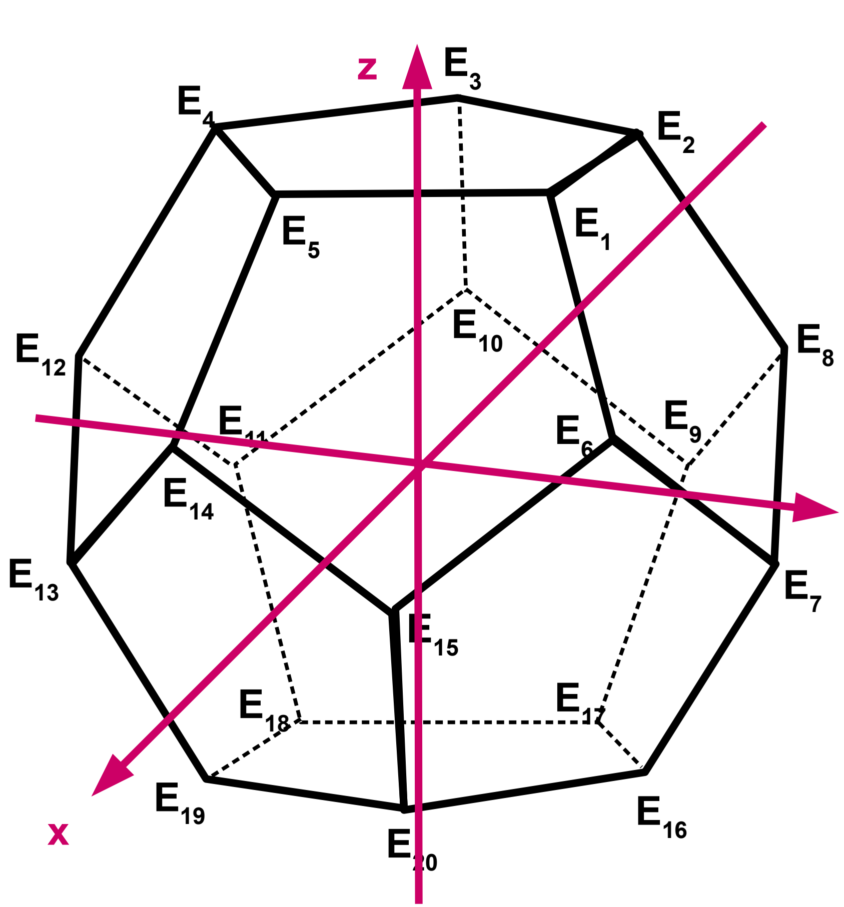
Mathematik – Intensivkurs: Körper

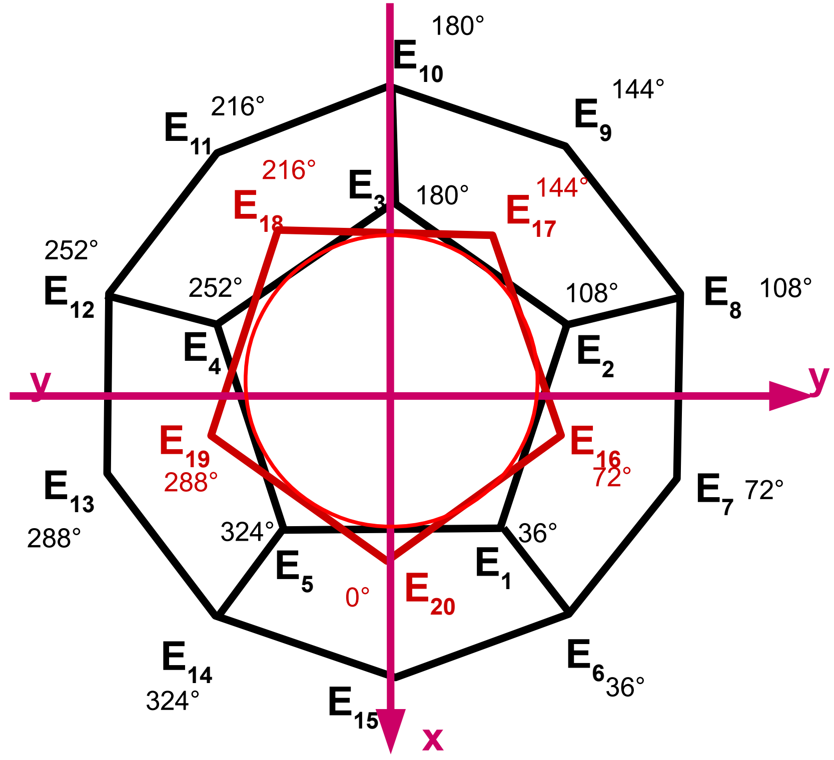
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dodekaeder		

Dodekaeder

Die horizontalen Winkel

Jedes Dodekaeder besitzt 20 Ecken, 30 Kanten und 12 Flächen.





Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dodekaeder

Abstand Kantenmittelpunkte vom Mittelpunkt

$k^2 + (k - \frac{1}{2} a)^2 = h^2$

$k^2 + k^2 - ak + \frac{1}{4} a^2 = (\frac{1}{2} a \sqrt{5} + 2\sqrt{5})^2$

$2k^2 - ak + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 (5 + 2\sqrt{5})$

$2k^2 - ak + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 (5 + 2\sqrt{5}) = 0$

$2k^2 - ak - a^2 (1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 0$

$$k_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot (1 + \frac{1}{2}\sqrt{5})}}{2 \cdot 2}$$

$k_{1/2} = \frac{1}{4} a \pm \frac{1}{4} a \sqrt{1 + 8 \cdot (1 + \frac{1}{2}\sqrt{5})}$

$k_{1/2} = \frac{1}{4} a \pm \frac{1}{4} a \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

Tief aus der Trickkiste der Binomischen Formeln:

$9 + 4\sqrt{5} = 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 5 = (2 + \sqrt{5})^2$

$k_{1/2} = \frac{1}{4} a \pm \frac{1}{4} a (2 + \sqrt{5})$

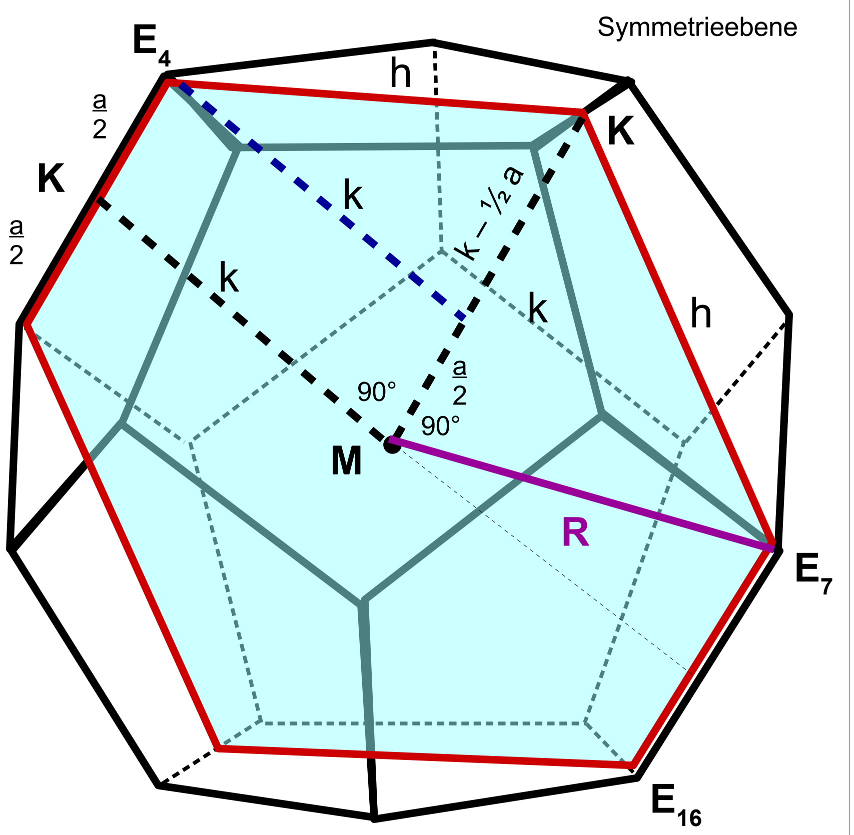
$\boxed{k_1 = a \frac{1}{4} (3 + \sqrt{5})} \quad = a \cdot 1{,}309017$

Umkugelradius

$R^2 = (\frac{1}{2} a)^2 + k^2$
$= \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{16} a^2 (3 + \sqrt{5})^2$
$= \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{16} a^2 (9 + 6\sqrt{5} + 5)$
$= \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{16} a^2 (14 + 6\sqrt{5})$
$= \frac{1}{16} 4 a^2 + \frac{1}{16} a^2 (14 + 6\sqrt{5})$
$= \frac{1}{16} a^2 (18 + 6\sqrt{5})$
$= \frac{1}{16} a^2 (18 + 6\sqrt{5})$

$\boxed{R = a \frac{1}{4} \sqrt{6(3 + \sqrt{5})}} \quad = a \cdot 1{,}4012585$

und damit der Abstand vom Mittelpunkt zum Eckpunkt



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dodekaeder

Inkugelradius

Dazu wird das rechtwinklige Dreieck MM_1E_4 betrachtet. M1 ist der Mittelpunkt des regelmäßigen Fünfecks indem die Innenkugel die Begrenzungsflächen berührt. Damit die die Strecke M1E4 genau der Umkreisradius des Fünfecks. Im Dokument zum Fünfeck wird der Umkreisradius hergeleitet:

Umkreisradius Fünfeck

$$R_1 = a\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5}\,)}}{10}$$

Umkugelradius

$$R = a\,\tfrac{1}{4}\sqrt{6\,(3+\sqrt{5})}$$

$$r^2 = R^2 - R_1^2$$

$$r^2 = \left(a\,\tfrac{1}{4}\sqrt{6\,(3+\sqrt{5})}\right)^2 - \left(a\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5}\,)}}{10}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{16}\;6\,(3+\sqrt{5}) - \frac{a^2}{100}\;10\,(5+\sqrt{5}\,)$$

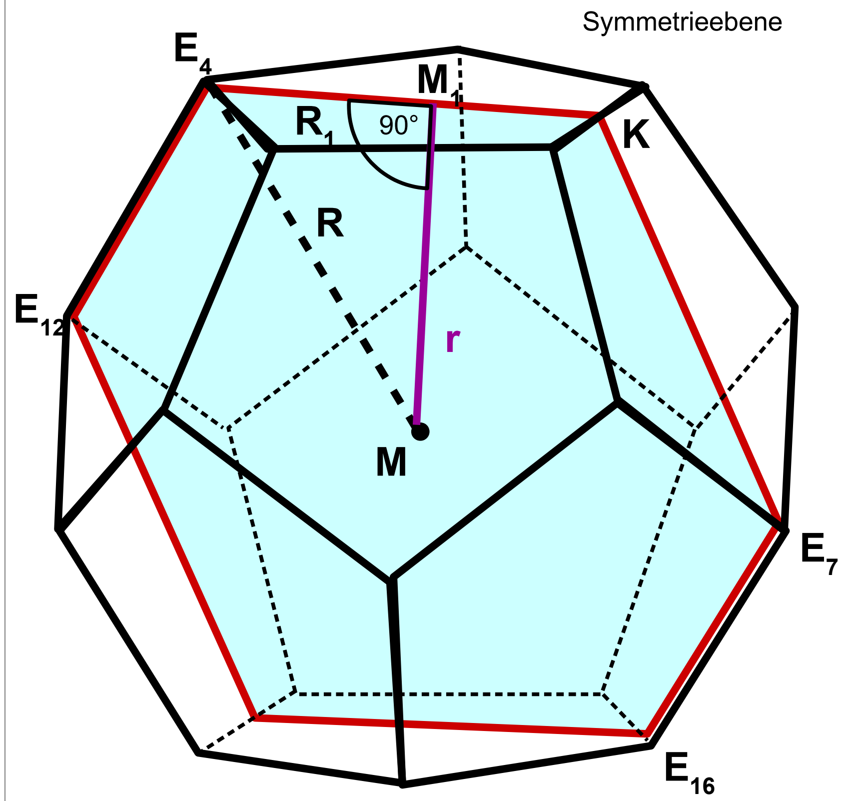
$$r^2 = \frac{a^2}{8}\;(9+3\sqrt{5}) - \frac{a^2}{10}\;(5+\sqrt{5}\,)$$

$$r^2 = \frac{a^2}{40}\;(45+15\sqrt{5}) - \frac{a^2}{40}\;(20+4\sqrt{5}\,)$$

$$r^2 = \frac{a^2}{40}(25+11\sqrt{5}\,) = \frac{a^2}{400}(250+110\,\sqrt{5})$$

so erweitern, daß im Nenner keine Wurzel steht

$$\boxed{r = \frac{a}{20}\sqrt{(250+110\,\sqrt{5})}}$$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dodekaeder

Abstand der mittleren Eckpunkte von Grundseite

$$\sin \omega = \frac{k - \frac{1}{2}a}{h_1}$$

$$k = a\,\tfrac{1}{4}\,(3 + \sqrt{5})$$
$$k - \tfrac{1}{2}a = a\,\tfrac{1}{4}\,(1 + \sqrt{5})$$

$$h_1 = a\,\tfrac{1}{2}\,\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$\frac{k - \frac{1}{2}a}{h_1} \quad \frac{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})}{\frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}$$

$$\frac{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{\frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$

$$\frac{(1 + \sqrt{5})\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{25 - 20}}$$

$$\frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2(5 - 2\sqrt{5})}}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})}}{2\sqrt{5}}$$

$$\sin \omega = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$$

$$\sin \omega = \frac{h_E}{d}$$

$$h_E = d \cdot \sin \omega$$

$$d = a\,\tfrac{1}{2}\,\sqrt{2(7 + 3\sqrt{5})}$$

$$h_E = d \quad \cdot \quad \sin \omega$$

$$h_E = a \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2(7 + 3\sqrt{5})} \quad \frac{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{4\sqrt{5}}\sqrt{(7 + 3\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}$$

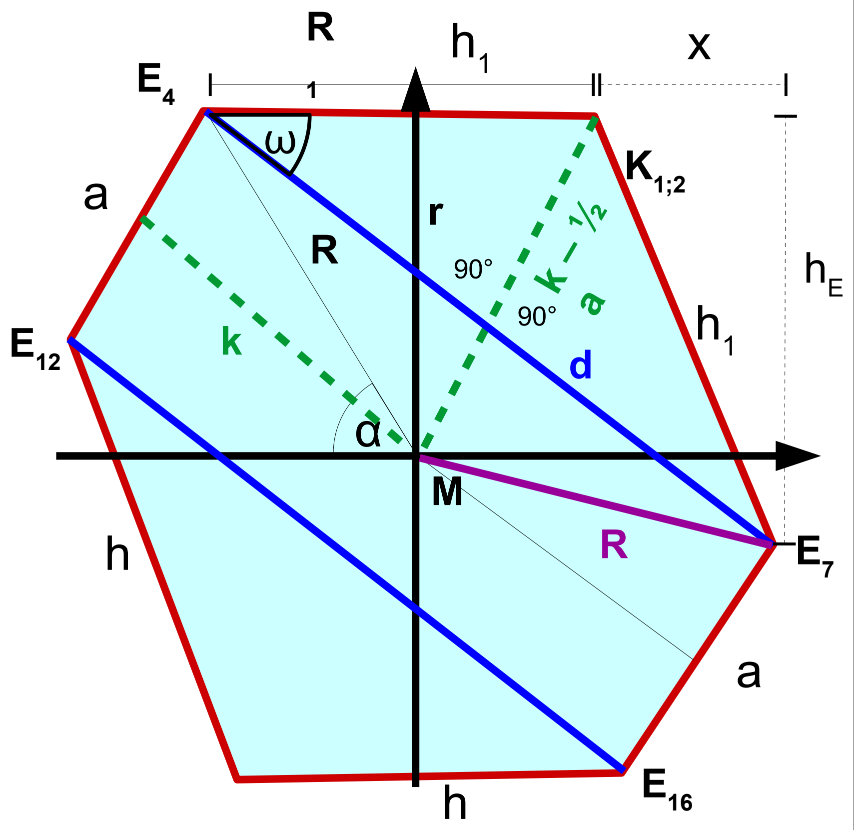
$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{(20 + 8\sqrt{5})}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{4(5 + 2\sqrt{5})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$$

$$\boxed{h_E = a \cdot \tfrac{1}{5}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}$$

$$= a\,\tfrac{2}{5}\sqrt{5}\;h_1 = a \cdot 1{,}376382$$



Seitenfünfeck
a Kantenlänge
h_1 Höhe des Fünfecks
R_1 Umkreisradius Fünfeck

Die Linie k von M zu $K_{1;2}$ ist senkrecht zur Linie d zwischen E_4 und E_7.

Dodekaeder
k Abstand Mittelpunkt Seitenkante
R Umkugelradius
r Inkugelradius
d Abstand Eckpunkte gegenüberliegender Kanten
h_E Abstand mittlerer Eckpunktreihe von gegenüberliegender Grundfläche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dodekaeder

Die vertikalen Winkel der oberen Eckpunkte

$$\sin\alpha = \frac{r}{R}$$

$$r = \frac{a}{20}\sqrt{(250 + 110\sqrt{5})} \qquad R = \frac{a}{4}\sqrt{6\,(3+\sqrt{5})}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{(250+110\sqrt{5})}}{\sqrt{6\,(3+\sqrt{5})}} \qquad \frac{1}{5}\sqrt{\frac{10(25+11\sqrt{5})}{6\,(3+\sqrt{5})}}$$

Nenner erweitern

$$(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) \\ = 9 - 5 = 4$$

Zähler erweitern

$$(25 + 11\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) \\ = 75 - 55 + 33\sqrt{5} - 25\sqrt{5} \\ = 20 + 8\sqrt{5}$$

Zusammenfassung unter der Wurzel

$$\frac{10(25+11\sqrt{5})}{6\,(3+\sqrt{5})} = \frac{10(20+8\sqrt{5})}{6 \cdot 4} = \frac{40(5+2\sqrt{5})}{6 \cdot 4} = \frac{10(5+2\sqrt{5})}{6} = \frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}} = \frac{1}{15}\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} = 0{,}79465447$$

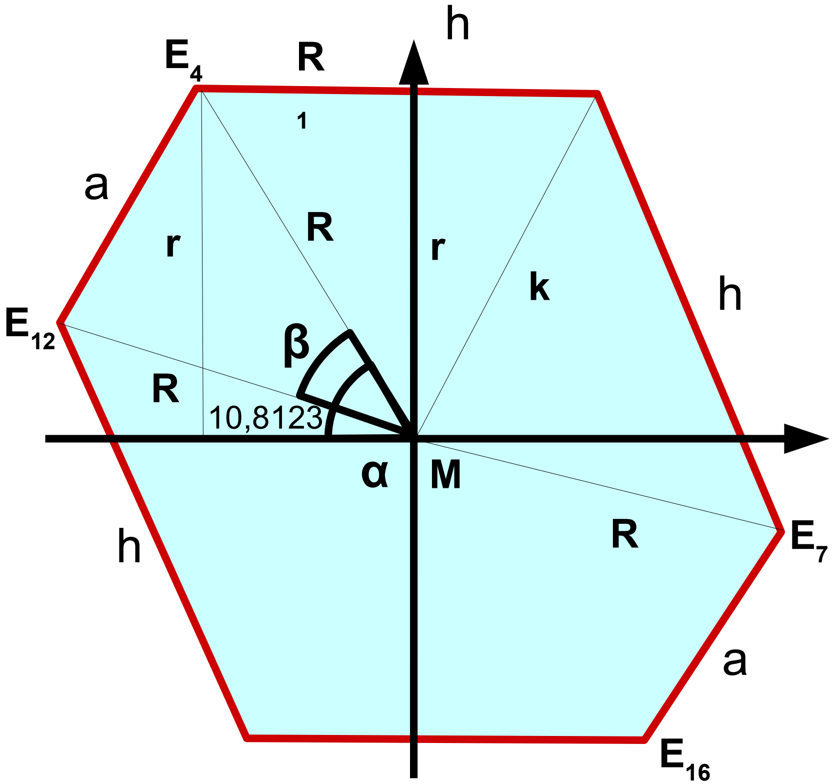
$$\boldsymbol{\alpha = 52{,}6226}$$

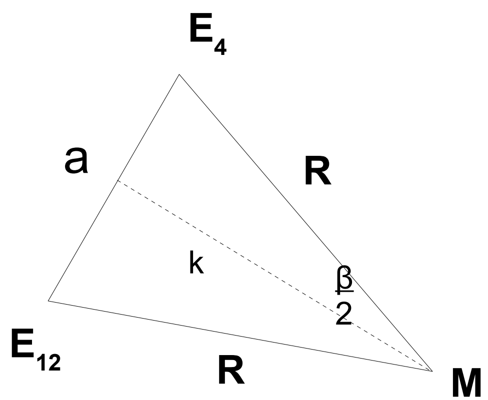
$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{a/2}{R} = \frac{a/2}{a/4\,\sqrt{6\,(3+\sqrt{5})}} = \frac{2}{\sqrt{6\,(3+\sqrt{5})}} = \frac{2\,\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{6}\,\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}$$

$$\frac{2\,\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{6}\quad\sqrt{4}}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{6}\,\sqrt{6(3-\sqrt{5})} = 0{,}356822 \qquad \frac{\beta}{2} = 20{,}905$$

$$\boldsymbol{\beta = 41{,}8103}$$





Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dodekaeder

Abstand der mittleren Eckpunkte von der Grundseite

r_1 und h_1 sind Inkreisradius und Höhe eines Fünfecks.

$$h_1 = a\ \tfrac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$h_E = a\ \tfrac{1}{5}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

$$h_1^2 - h_E^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{4} - \frac{5(5+2\sqrt{5})}{25} = \frac{5+2\sqrt{5}}{4} - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{5(5+2\sqrt{5})}{20} - \frac{4(5+2\sqrt{5})}{20} = \frac{5+2\sqrt{5}}{20}$$

$$x = \sqrt{h_1^2 - h_E^2} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{10} = r_1}$$

Abstand der mittleren Eckpunkte von der x – y - Ebene

R Umkugelradius

$$R = a\ \tfrac{1}{4}\sqrt{6(3+\sqrt{5})}$$

Der Abstand ist $R^2 - (2r_{Fünfeck})^2$

$$2r_1 = a\ \frac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{5}$$

$$R^2 - (2r_{Fünfeck})^2 = \frac{6(3+\sqrt{5})}{16} - \frac{5(5+2\sqrt{5})}{25} = \frac{3(3+\sqrt{5})}{8} - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{15(3+\sqrt{5})}{40} - \frac{8(5+2\sqrt{5})}{40} = \frac{5-\sqrt{5}}{40}$$

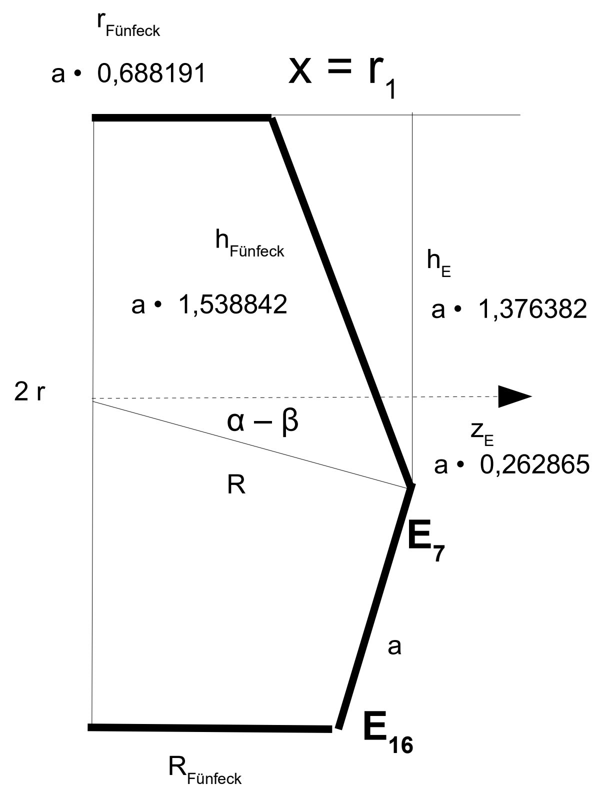
$$z_E = a \cdot \tfrac{1}{40}\sqrt{40(5-\sqrt{5})} = a \cdot 0{,}262865$$

Die vertikalen Winkel der mittleren Eckpunkte

Lokalisierung von α und β siehe vorhergehende Seiten.

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{z_E}{R} = \frac{\tfrac{1}{40}\sqrt{40(5-\sqrt{5})}}{\tfrac{1}{4}\sqrt{6(3+\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{40}}{10\sqrt{6}}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} = \frac{2\sqrt{10}}{10\sqrt{6}}\sqrt{\frac{(20-8\sqrt{5})}{4}} = \frac{2\sqrt{5}}{10\sqrt{3}}\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{15}\sqrt{(5-2\sqrt{5})} = 0{,}18759247 \qquad (\alpha-\beta) = 10{,}812316°$$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dodekaeder

Neigungswinkel zwischen benachbarten Flächen

$h_E = a \, {}^{1}/_{5} \, \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$

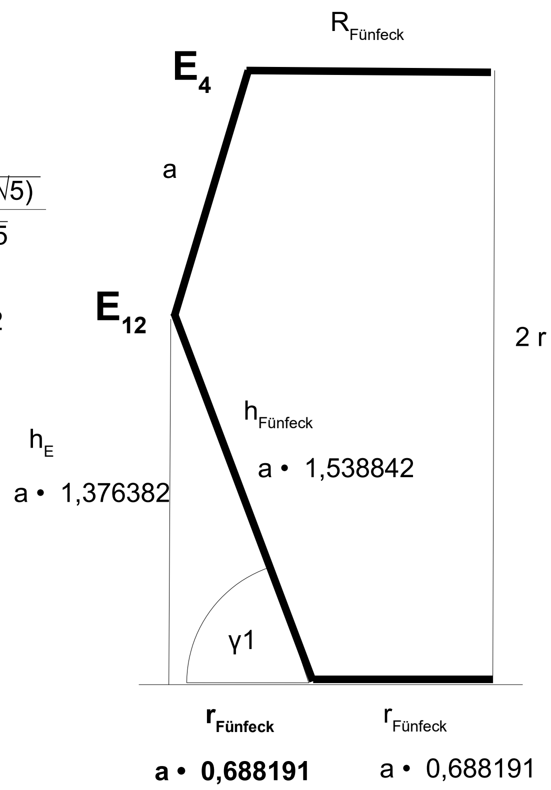
$h_1 = a \, ½ \, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

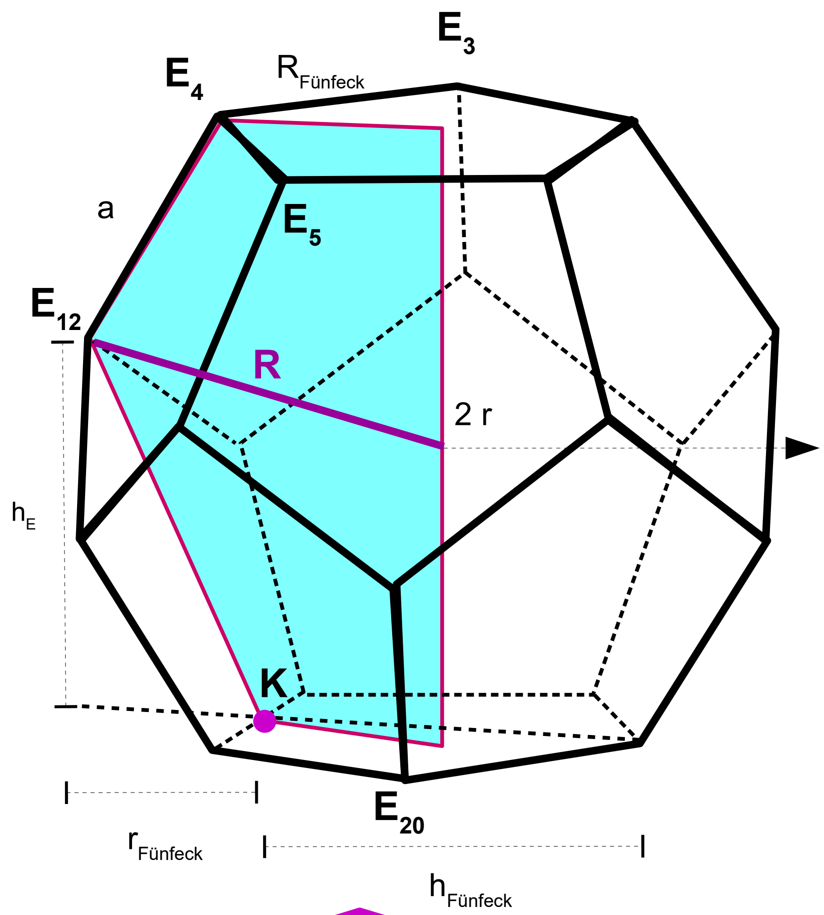
$$\sin \gamma 1 = \frac{h_E}{h_1} = \frac{2 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{5 \; \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}$$

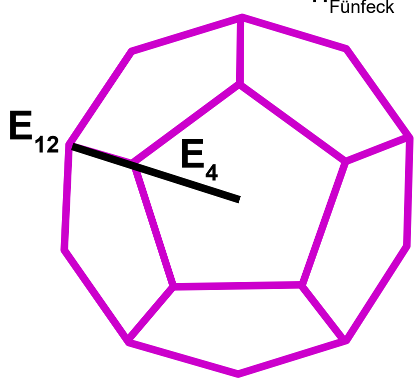
$$= \frac{2 \sqrt{5}}{5} = 0{,}8944272$$

$\gamma 1 = 63{,}435$

Neigungswinkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche:
$\gamma \; = 116{,}565°$





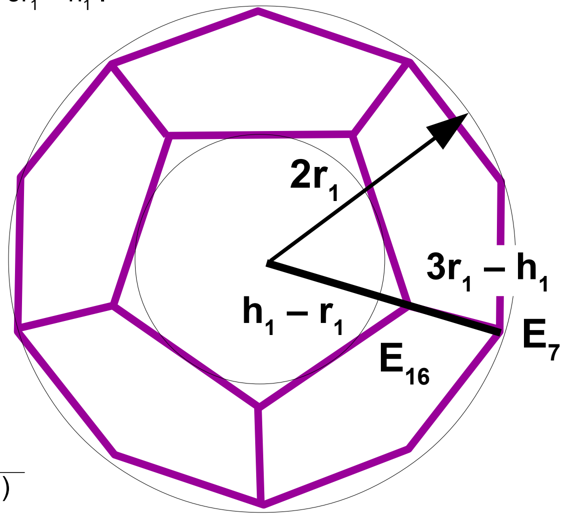


Mathematik – Intensivkurs: Körper		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**

Dodekaeder

Neigungswinkel zwischen Kanten und Flächen

Sieht man auf den Dodekaeder von oben dann liegen die Eckpunkte der beiden mittleren Linien auf einem Kreis mit dem Radius $2r_1$. (r_1 Radius des Inkreises des Fünfecks). Damit ist auch die Linie bis zur Ecke E_7 gleich $2r_1$. Da die Entfernung vom Mittelpunkt zum Eckpunkt E_{16} gleich $h – r_1$ ist, muss der Abstand zur Senkrechten $3r_1 – h_1$.



$$r_1 = a \frac{\sqrt{5\,(5 + 2\sqrt{5}\,)}}{10}$$

$$h_1 = a \ \tfrac{1}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$3r_1 – h_1 =$$

$$= a \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= a \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \ \ 1/10\ (3\sqrt{5} - 5)$$

$$= a \ {}^{1}/_{10} \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})\,(3\sqrt{5} - 5)^2}$$

$$= a \ {}^{1}/_{10} \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})\,(70 - 30\sqrt{5}\,)}$$

$$\boxed{3r_1 – h_1 \ = a \ {}^{1}/_{10} \sqrt{50 – 10\sqrt{5}}} \quad = a \cdot \ 0{,}52573111$$

$$3r_1 – h_1 \ = a \ {}^{1}/_{10} \sqrt{50 – 10\sqrt{5}}$$

$$a^2 – (3r_1 – h_1)^2 = a^2 – \ a^2 \ {}^{1}/_{100}\ (50 – 10\sqrt{5}) \ = a^2 \ (1 - \tfrac{1}{2} \ + {}^{1}/_{10} \sqrt{5})$$

$$= a^2 \ (\tfrac{1}{2} + {}^{1}/_{10} \sqrt{5}) \ = a^2 \ {}^{1}/_{10}\ (5 + \sqrt{5})$$

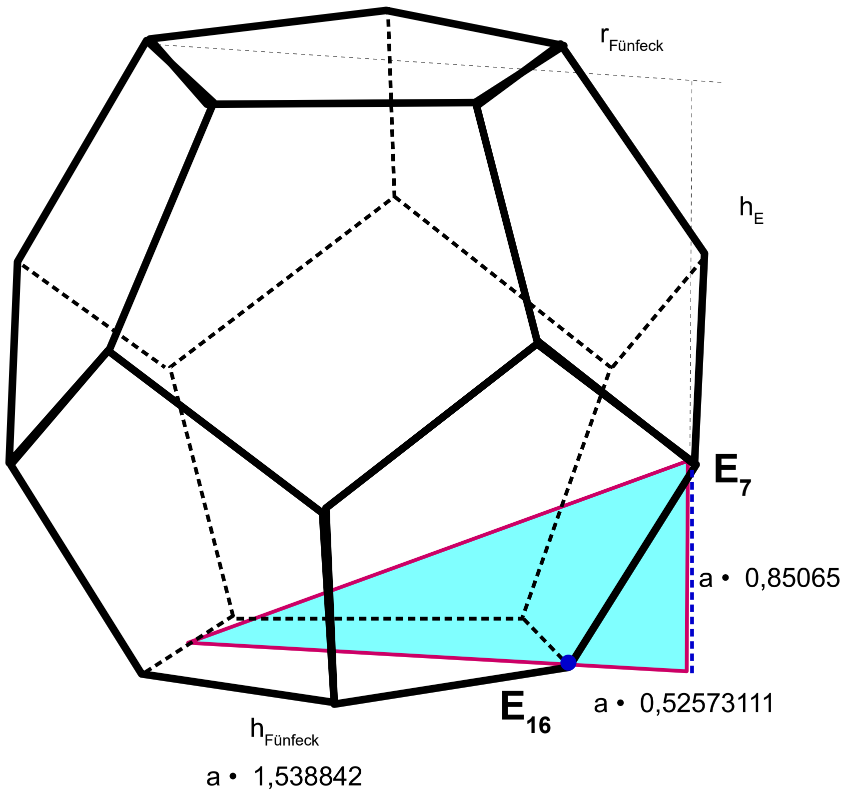
$$h_F = a \ {}^{1}/_{10} \sqrt{10(5 + \sqrt{5})}$$

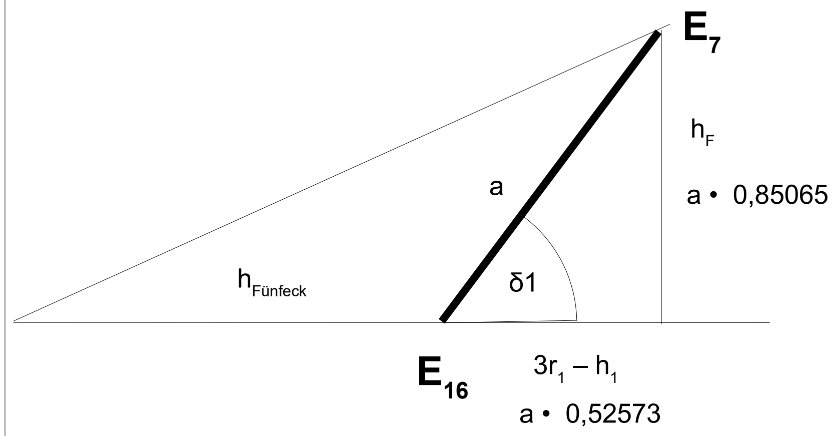
$$\cos \delta 1 = \ {}^{1}/_{10} \sqrt{50 – 10\sqrt{5}} \ = 0{,}52573$$

$$\delta 1 = 58{,}2824°$$

Neigungswinkel der Kante gegenüber der Grundfläche

$$\delta = 121{,}7175°$$





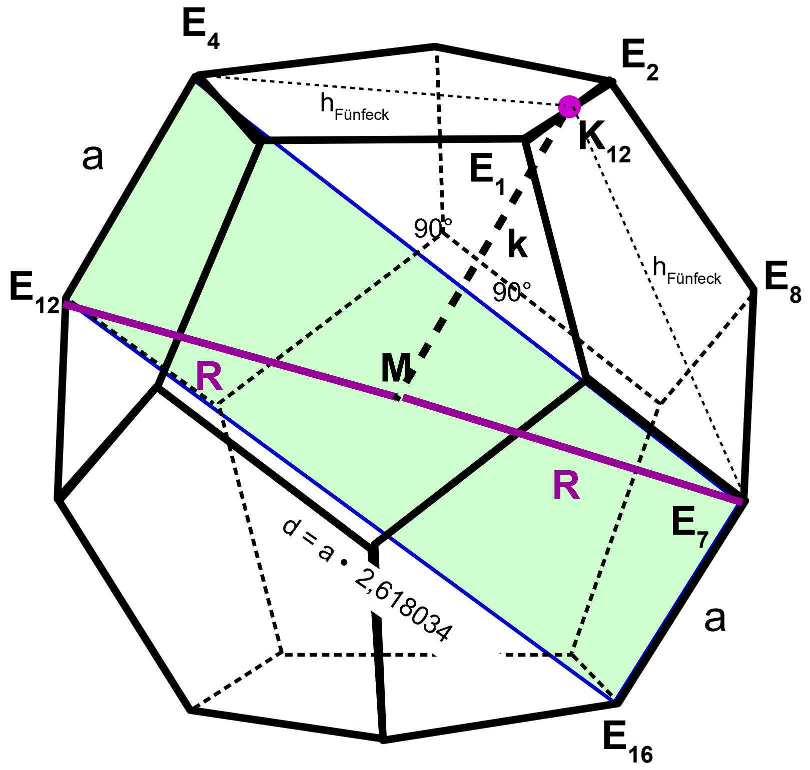
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dodekaeder	**Diagonale gegenüberliegender Eckpunkte (kein Umkugelradius)**	

Ein Rechteck zwischen den gegenüberliegenden Kanten.
Gesucht ist die Länge E_4E_7, die die Entfernung der oberen und unteren Kante angibt. Die Strecke von M zu K12 ist senkrecht zu E_4E_7,

$d^2 = (2R)^2 - a^2$ $\qquad$ $R = a\,\tfrac{1}{4}\sqrt{6\,(3 + \sqrt{5})}$

$$\begin{aligned} d^2 &= \tfrac{1}{4}\,a^2\,6\,(3 + \sqrt{5}) - a^2 \\ &= a^2\,(\,3/2\,(3 + \sqrt{5}) - 1) \\ &= a^2\,(7/2 + 3/2\,\sqrt{5}\,) \\ &= a^2\,\tfrac{1}{2}\,(7 + 3\,\sqrt{5}) \end{aligned}$$

$\boxed{d = a\ \tfrac{1}{2}\,\sqrt{2(7 + 3\sqrt{5})}}$ $\quad = a \cdot 2{,}61803398$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dodekaeder	**Koordinaten der Eckpunkte**	

Jedes Dodekaeder besitzt 20 Ecken, 30 Kanten und 12 Flächen.

Zur Berechnung der Koordinaten der Eckpunkte aus den berechneten Winkeln muß man den den Radius der Außenkugel zugrunde legen. Alle Punkte liegen auf dieser Außenkugel. Die Koordinaten selbst sind dann über die Formeln der Berechnung der Kugelkoordinaten zu berechnen.

$$x = R * \cos(\varphi) * \cos(\delta)$$
$$y = R * \sin(\varphi) * \cos(\delta)$$
$$z = R * \sin(\delta)$$

Da der Außenkugelradius abhängig ist von der Kantenlänge, kann man die Umrechnung auf die Kantenlänge übertragen und die Berechnung auf die Kantenlänge beziehen. Die nachfolgenden Faktoren sind mit der Kantenlänge zu multiplizieren und damit ergeben sich die dreidimensionalen Koordinaten der Eckpunkte.

Eckpunkte	x	y	z
1	0,6881910	0,5000000	1,1135164
2	-0,2628656	0,8090170	1,1135164
3	-0,8506508	0,0000000	1,1135164
4	-0,2628656	-0,8090170	1,1135164
5	0,6881910	-0,5000000	1,1135164
6	1,1135164	0,8090170	0,2628656
7	0,4253254	1,3090170	-0,2628656
8	-0,4253254	1,3090170	0,2628656
9	-1,1135164	0,8090170	-0,2628656
10	-1,3763819	0,0000000	0,2628656
11	-1,1135164	-0,8090170	-0,2628656
12	-0,4253254	-1,3090170	0,2628656
13	0,4253254	-1,3090170	-0,2628656
14	1,1135164	-0,8090170	0,2628656
15	1,3763819	0,0000000	-0,2628656
16	0,2628656	0,8090170	-1,1135164
17	-0,6881910	0,5000000	-1,1135164
18	-0,6881910	-0,5000000	-1,1135164
19	0,2628656	-0,8090170	-1,1135164
20	0,8506508	0,0000000	-1,1135164

Damit lassen sich über die Methoden der Vektorrechnung alle Winkel und Punkte berechnen.

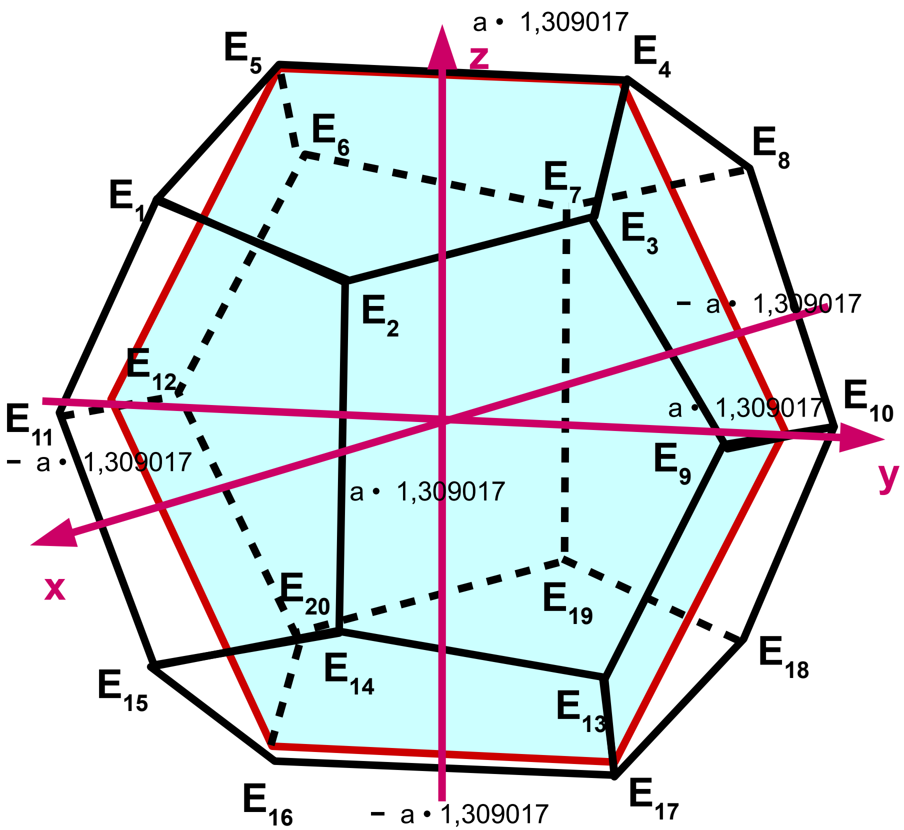
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dodekaeder

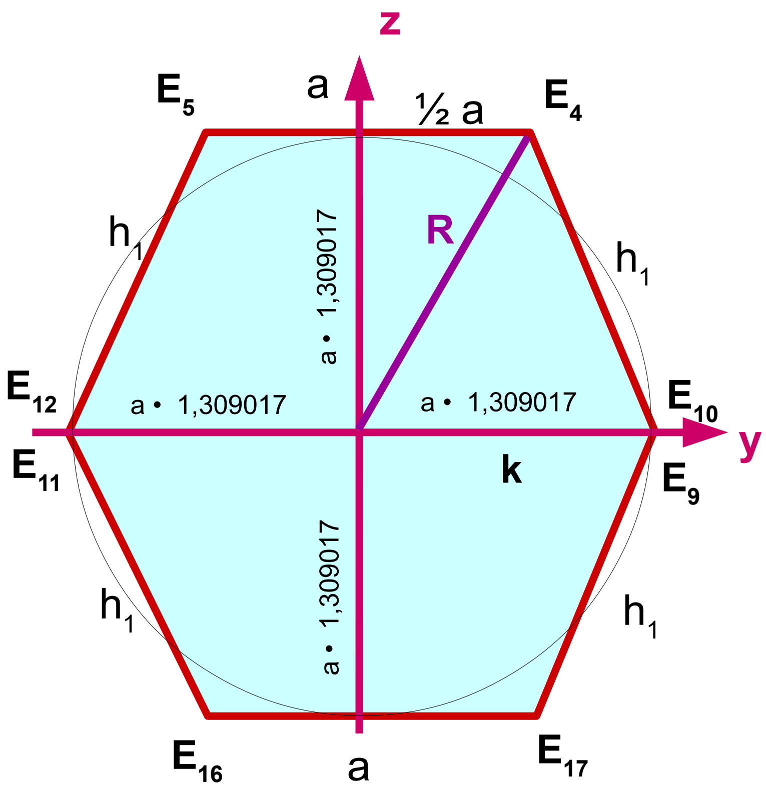
Gedrehtes Dodekaeder

Die Bezeichnungen der Ecken sind nicht identisch mit der vorhergehenden.

Zu jeder Achse zwei senkrechte Kanten.
Die Entfernung gegenüberliegender Kanten wurden auf vorhergehenden Seite mit 2,618034 ermittelt. Die Hälfte davon sind jeweils die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.



Da der Neigungswinkel zwischen zwei Ebenen 116,565° beträgt, ist der Winkel der entsprechenden Ebenen zu den Koordinatenebenen 58,2825° .



Alle drei Koordinaten von E_4 , E_5 , E_{16} , E_{17} sind von vornherein klar.

Alle drei Koordinaten von E_9 , E_{10} , E_{11} , E_{12} sind ebenfalls klar.

Es gibt dann zwei verschiedene Ebenen von Eckpunkten:
E_1, E_3 , E_8 , E_6
und
E_2 , E_7
und die korrespondierenden Eckpunkte unterhalb der x – y - Ebene

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dodekaeder

Die Horizonalwinkel von E9, E10, E11 und E12

Die Horizontalwinkel von E_2 , E_7 sind ebenfalls klar.
Die Länge der x Koordinaten ist genau k. Die y Koordinate ist 0.

Das Viereck E_1, E_3 , E_8 , E_6 muß horizontal ein Quadrat ergeben.
Das Quadrat liegt symmetrisch zum Mittelpunkt M, damit müssen die Horizontalwinkel der vier Ecken 45° sein.
Die Seitenlänge des Quadrates ist jeweils d1 (Diagonale des Fünfecks).
Damit lassen sich die x und y Koordinaten der vier Eckpunkte bestimmen.

$d1 = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1)$

$x = \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$
$y = \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$

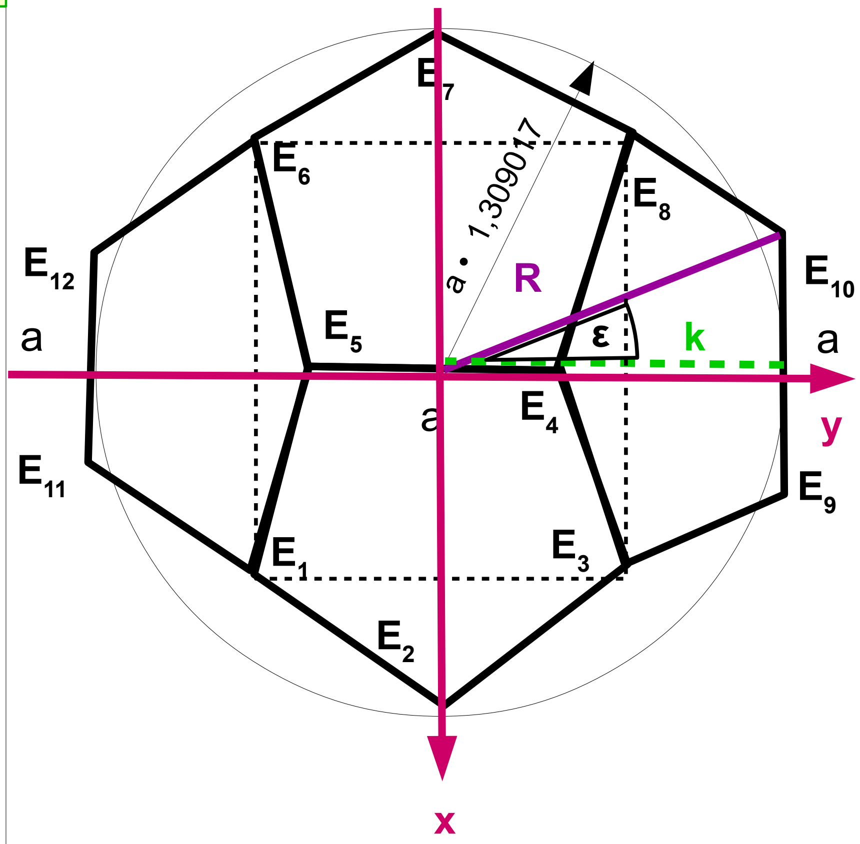
$R = a \frac{1}{4}\sqrt{6 (3 + \sqrt{5})}$

$k = a \frac{1}{4} (3 + \sqrt{5})$

$$\cos \varepsilon = \frac{k}{R} = \frac{\sqrt{(3 + \sqrt{5})}}{\sqrt{6}}$$

$\cos \varepsilon = \frac{1}{6} \sqrt{6(3 + \sqrt{5})}$ $\quad$ $\sin \varepsilon = \frac{1}{6} \sqrt{6(3 - \sqrt{5})}$

$\varepsilon = 20{,}905157$



Treff Lernen
Christina Strauch

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dodekaeder	**Die Vertikalwinkel von E1, E3, E8 und E6**	

$$\sin\eta = \frac{\frac{1}{2} d1}{R}$$

$$d1 = \tfrac{1}{2}\, a\,(\sqrt{5} + 1)$$

$$R = a\,\tfrac{1}{4}\sqrt{6\,(3 + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{6\,(3 + \sqrt{5})}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5} + 1)\,\sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{6\,(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}}$$

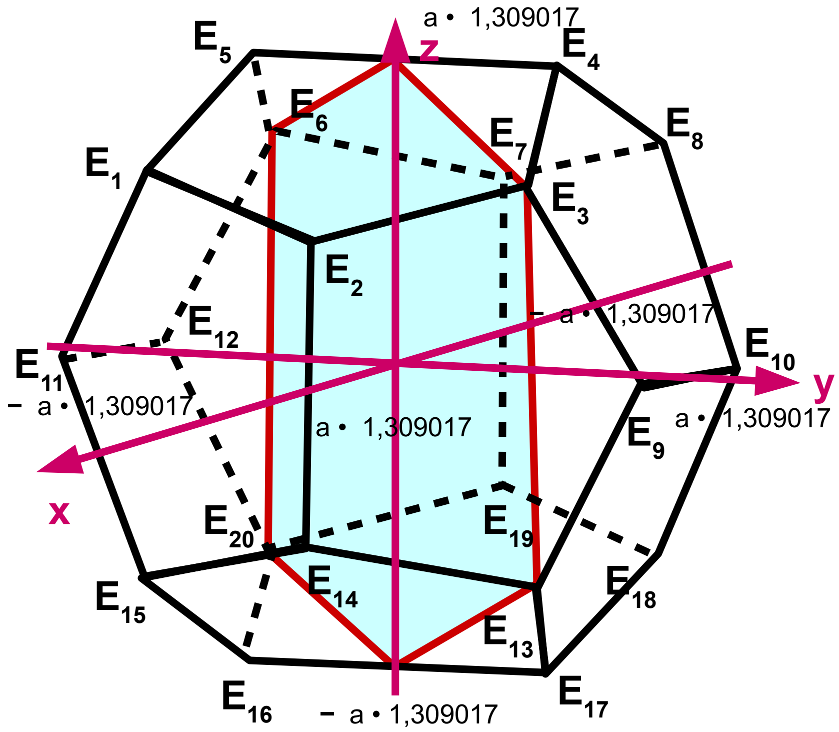
$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2\,(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{6\,(9 - 5)}}$$

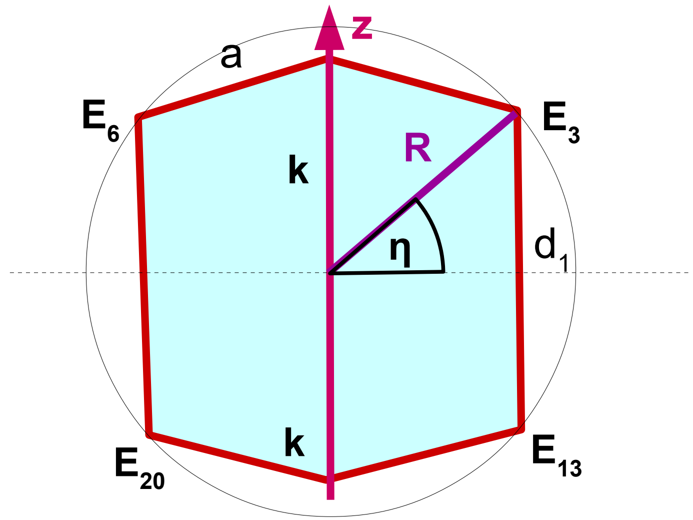
$$= \frac{\sqrt{(6 + 2\sqrt{5})\,(3 - \sqrt{5})}}{2\,\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{2\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4}}{2\,\sqrt{3}} = \frac{2}{2\,\sqrt{3}}$$

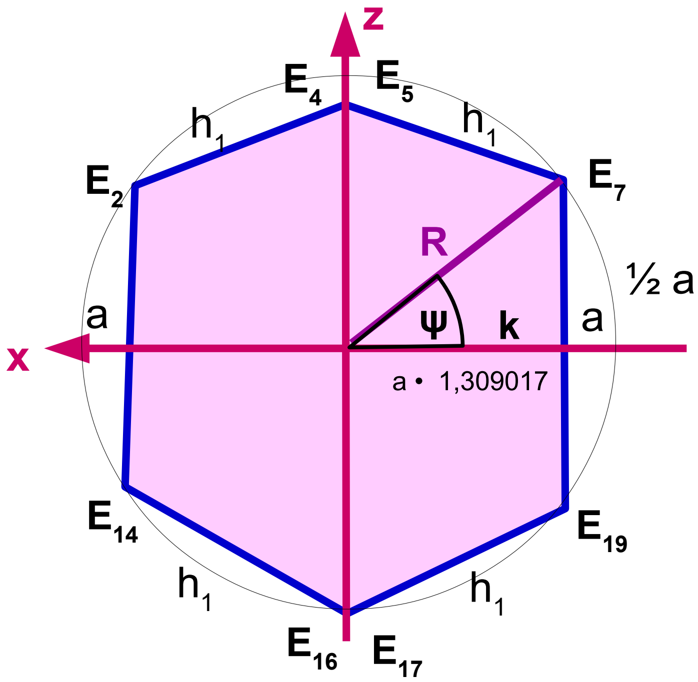
$\sin\eta = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$ $\cos\eta = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$

$\eta = 35{,}26439°$





Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dodekaeder	Die Vertikalwinkel von E2 und E7	



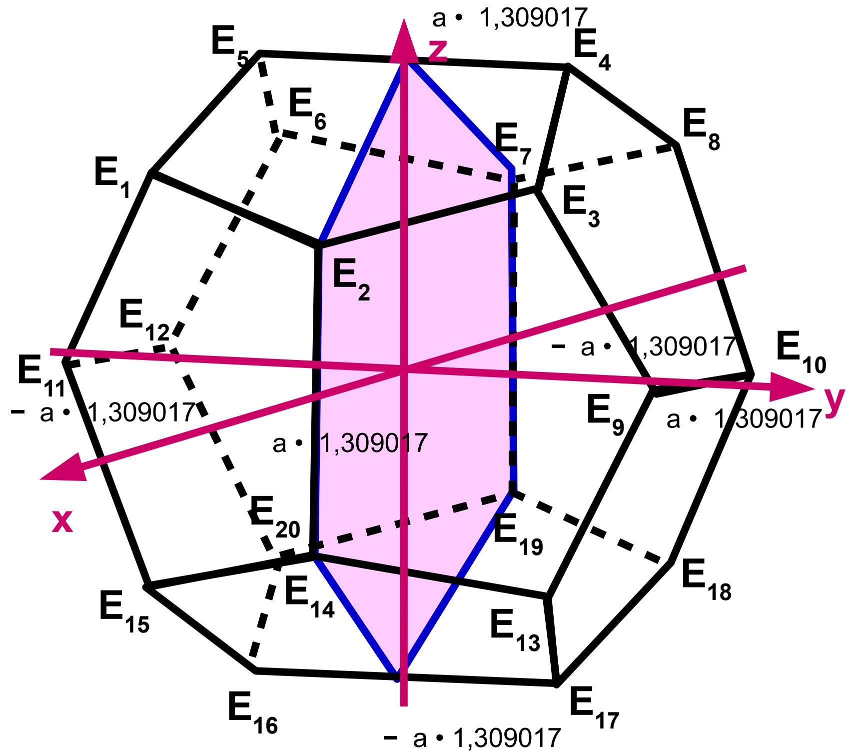
$\sin \psi = \dfrac{\frac{1}{2} a}{R}$ $\qquad R = a \, \frac{1}{4}\sqrt{6\,(3 + \sqrt{5})}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{6\,(3 + \sqrt{5})}} = \dfrac{2\sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{6\,(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}}$

$= \dfrac{2\sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{6}}$

$\sin \psi = \frac{1}{6}\sqrt{6(3 - \sqrt{5})}$ $\qquad \cos \psi = \frac{1}{6}\sqrt{6(3 + \sqrt{5})}$

$\psi = 20{,}905157°$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dodekaeder	**Koordinaten der Eckpunkte**	

Da der Außenkugelradius abhängig ist von der Kantenlänge, kann man die Umrechnung auf die Kantenlänge übertragen und die Berechnung auf die Kantenlänge beziehen. Die nachfolgenden Faktoren sind mit der Kantenlänge zu multiplizieren und damit ergeben sich die dreidimensionalen Koordinaten der Eckpunkte.

Eckpunkte	x	y	z
1	0,8090170	-0,8090170	0,8090170
2	1,3090170	0,0000000	0,5000000
3	0,8090170	0,8090170	0,8090170
4	0,0000000	0,5000000	1,3090170
5	0,0000000	-0,5000000	1,3090170
6	-0,8090170	-0,8090170	0,8090170
7	-1,3090170	0,0000000	0,5000000
8	-0,8090170	0,8090170	0,8090170
9	0,5000000	1,3090170	0,0000000
10	-0,5000000	1,3090170	0,0000000
11	0,5000000	-1,3090170	0,0000000
12	-0,5000000	-1,3090170	0,0000000
13	0,8090170	0,8090170	-0,8090170
14	1,3090170	0,0000000	-0,5000000
15	0,8090170	-0,8090170	-0,8090170
16	0,0000000	-0,5000000	-1,3090170
17	0,0000000	0,5000000	-1,3090170
18	-0,8090170	0,8090170	-0,8090170
19	-1,3090170	0,0000000	-0,5000000
20	-0,8090170	-0,8090170	-0,8090170