1. Das unbestimmte Integral

1.1. Das unbestimmte Integral = Die Stammfunktion

Das unbestimmte Integral bestimmt diejenige Funktion, deren 1. Ableitung die Funktion unter dem Integral ist

Da beim Differenzieren alle additiven Konstanten 0 werden, ist die Stammfunktion nicht eindeutig bestimmt.

Verschiedene Stammfunktionen können sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Für alle rationalen n.
Ausnahme: n = – 1

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

$\int \sqrt[5]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{5}}\,dx = \frac{5}{8}\,x^{\frac{8}{5}} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{5}}\,dx = \frac{5}{2}\,x^{\frac{2}{5}} + C$

1.2. Die Kurvenschar als Lösung des unbestimmten Integrals

Der unbestimmte Parameter C wirkt als Parameter einer Kurvenschar

Ein vorgegebener Funktionswert an einer Stelle x_0 wählt aus der Kurvenschar eine Kurve aus.

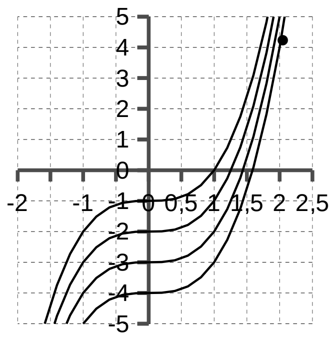
Bestimme die Stammfunktion von $y = 3x^2$, die an der Stelle $x = 2$ den Wert $y = 4$ besitzt.

$3\int x^2\,dx = x^3 + C$

$4 = 2^3 + C$

$-4 = C$

Lösung:
$y = x^3 - 4$



1.3. Die lineare Substitution

Integrale der Form $\int f(ax+b)\,dx$

besitzen als Lösung die Funktion

$\frac{1}{a}F(ax+b)$

(Der Faktor vor x erscheint als Nenner vor der Stammfunktion – Gegenstück zur Kettenregel)

$\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

$\int \sin(2x-3)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-3) + C$

2. Das bestimmte Integral

2.1. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$

1. Schritt: Eine Stammfunktion F von f bestimmen

2. Schritt: Das Integral hat den Wert F(b) - F(a)

Beispiel:

$$\int_1^5 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) dx = \left[x - \frac{2}{x}\right]_1^5 = \left(5 - \frac{2}{5}\right) - \left(1 - \frac{2}{1}\right) = 5{,}6$$

2.2. Berechnung der von Grafen f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche

1. Schritt: Schnittstellen mit der x-Achse bestimmen

2. Schritt: Zwischen benachbarten Schnittstellen integrieren. Liegt die Fläche unterhalb der x-Achse, so ist der Betrag des Integrals zu nehmen.

Der Flächeninhalt muss nicht zwischen zwei Schnittstellen begrenzt sein, es können beliebige Grenzen existieren.

An den Schnittstellen muss aber grundsätzlich das Integral getrennt werden, da positive und negative Flächenteile entstehen.

Beispiel: $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$

$x^3 - 8x^2 + 15x = 0 \quad x\cdot(x^2 - 8x + 15) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 5$

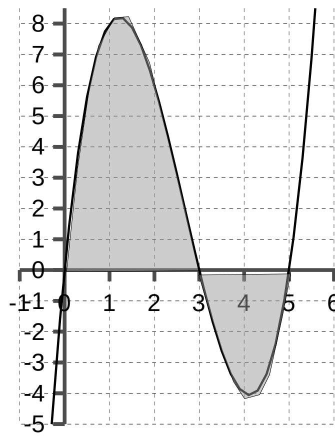
$$\int_0^3 (x^3 - 8x^2 + 15x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_0^3 =$$

$$\frac{81}{4} - 72 + \frac{135}{2} - 0 = \frac{63}{4}$$

$$\int_3^5 (x^3 - 8x^2 + 15x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_3^5 =$$

$$\frac{625}{4} - \frac{1000}{3} + \frac{375}{2} - \frac{63}{4} = -\frac{16}{3}$$

Gesamter Flächeninhalt: $A = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12}$



2.3. Uneigentliche Integrale

Bei uneigentlichen Integralen hat eine Integrationsgrenze den Wert ∞

1. Schritt: Die ∞ Grenze durch den Parameter z ersetzen

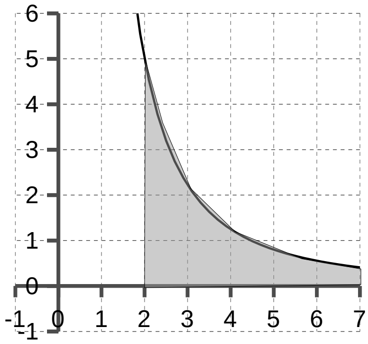
Beispiel: $\int_2^{\infty} \frac{20}{x^2}$

2. Schritt: Integral in Abhängigkeit von z berechnen

$$\int_2^{z} \frac{20}{x^2}\,dx = -\left[\frac{20}{x}\right]_2^{z} = -\frac{20}{z} - (-10) = 10 - \frac{20}{z}$$

3. Schritt: Für z eine Grenzbetrachtung durchführen

$$\lim_{z\to\infty} 10 - \frac{20}{z} = 10$$



2.4. Berechnung der von den Grafen von f und g eingeschlossenen Fläche

Vom Flächeninhalt der „oberen“ Funktion wird der Flächeninhalt der „unteren“ Funktion subtrahiert

Beispiel: $f(x) = -x + 7$
$g(x) = -x^2 + 6x - 3$

1. Schritt: Schnittstellen mit Hilfe des Ansatzes f(x) = g(x) Bestimmen

$$-x + 7 = -x^2 + 6x - 3$$
$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

2. Schritt: A ist der Betrag des Integrals der Differenzfunktion f - g zwischen den Schnittstellen. (Bei mehr als zwei Schnittstellen ist A die Summe dieser Beträge zwischen benachbarten Schnittstellen).

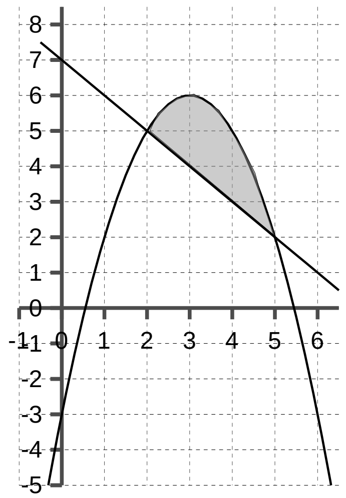
$$\int_2^5 f(x) - g(x)\;dx = \int_2^5 (x^2 - 7x + 10)dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x\right]_2^5 = \frac{125}{3} - \frac{175}{2} + 50 - \left(\frac{8}{3} - \frac{28}{2} + 20\right) = -4{,}5$$

Der Flächeninhalt beträgt 4,5 FE.

Der Flächeninhalt muss nicht zwischen zwei Schnittstellen begrenzt sein, es können beliebige Grenzen existieren.

An den Schnittstellen muss aber grundsätzlich das Integral getrennt werden, da positive und negative Flächenteile entstehen.



2.5. Integralfunktion I_a zur unteren Grenze a bestimmen

1. Schritt: Stammfunktion F von f bestimmen

Beispiel: $f(x) = 3x^2 - 4x$; $a = 3$

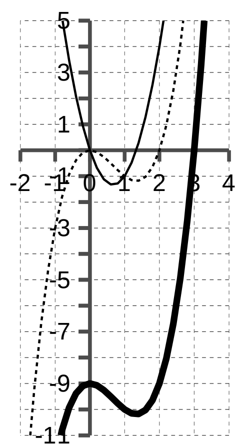
2. Schritt: $I_a(x) = F(x) - F(a)$ berechnen

Stammfunktion: $F(x) = x^3 - 2x^2 + C$

Integralfunktion: $I_3(x) = x^3 - 2x^2 - (27 - 18)$
$I_3(x) = x^3 - 2x^2 - 9$

Bei der Integralfunktion darf an den Schnittpunkten mit der x-Achse das Integral nicht getrennt werden. Es muss immer über das komplette Intervall integriert werden.

Die Integralfunktion I_a ist **eine** Stammfunktion, und zwar diejenige, die an der unteren Grenze des Integrals eine Nullstelle besitzt.



2.6. Gesamtänderung einer Größe berechnen

Ist f(x) die Änderungrsrate, Wachstumsrate eines Vorganges, dann ist es immer die 1. Ableitung der Funktion F(x), die den Vorgang selbst beschreibt.

Ist f die Änderungsrate einer Größe, so ist $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ die Gesamtänderung der Größe F im Intervall [a; b].

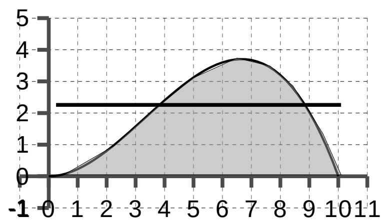
Beispiel:
Geschwindigkeit eines Fahrzeugs:
$v(t) = 0{,}6\,t^2$ (v(t) in m/s; t in s):
Zurückgelegte Strecke in m:

$$s(t) = \int_0^t (0{,}6x^2)dx = [0{,}2\,x^3]_0^t = 0{,}2\,t^3$$

> Die Gesamtänderung eines Vorganges ist immer die Fläche unter der Funktion der Änderungsrate, die Summe aller Änderungsraten bis zu diesem Zeitpunkt.

2.7. Mittelwert einer Größe berechnen

Der Mittelwert einer Funktion über einem Intervall [a;b] ist der y-Wert, der ein flächengleiches Rechteck zur Fläche unter der Funktion im Intervall [a;b] erzeugt, dessen Grundseite b – a und dessen Höhe der gesuchte y-Wert ist. Dazu ist die Funktion der Gesamtänderung zu benutzen und nicht die Änderungsrate.



Ist f eine auf dem Intervall [a; b] definierte Funktion so gilt für den Mittelwert m der Funktionswerte von f über [a; b]:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Beispiel:
Für Wasserhöhe h an einem Messpunkt während eines Hochwassers gilt:
$h(t) = -\frac{1}{40}t^3 + \frac{1}{4}t^2$; $0 \le t \le 10$
(h(t) in m; t in Tagen):
Mittlere Wasserhöhe:

$$h(t) = \frac{1}{10}\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}t^3 + \frac{1}{4}t^2\right)dt = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{160}t^4 + \frac{1}{12}t^3\right]_0^{10} = \frac{25}{12}$$

Im betrachteten Zeitraum betrug die durchschnittliche Wasserhöhe 2,08 m.

> Der Mittelwert einer Funktion F(x) über einem Intervall [a;b] ist der Flächeninhalt zwischen Funktion und x – Achse dividiert durch die Intervalllänge

3. Volumen eines rotationssymmetrischen Körpers berechnen

Wenn die Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse über dem Intervall [a; b] um die x-Achse rotiert, entsteht ein rotationssymmetrischer Körper mit dem

Volumen $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$

Beispiel:
Rotiert die dargestellte Fläche um die x-Achse, so entsteht ein Eierbecher. Für dessen Materialvolumen gilt (1 LE entspricht 1cm):

$$V = \pi\int_0^5 (0{,}25x + 1)^2\,dx - \pi\int_0^5 (0{,}3\sqrt{x^2 - 1})^2\,dx$$

$\approx 32{,}96\ cm^3$

Das Materialvolumen des Eierbechers beträgt ca. 33 cm³ .

Niemals unter dem Integral die Differenzfunktion bilden, sondern die beiden Integrale getrennt berechnen.