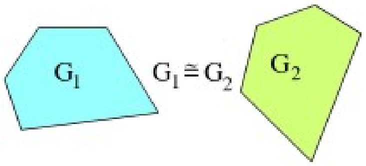
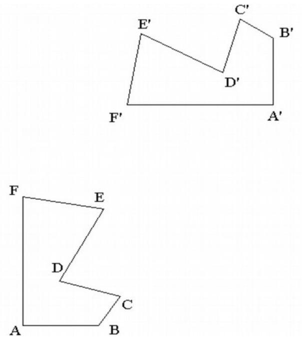
Kongruenz
Kongruente Figuren
1
20

Zwei deckungsgleiche Figuren G1 und G2 nennt man zueinander kongruent.
Kongruente Figuren stimmen in allen einander entsprechenden Seitenlängen und Winkeln überein.

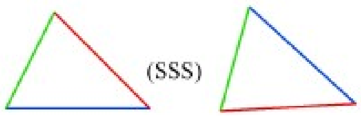


Figuren die durch Parallelverschiebung, Achsenspiegelung, Punktspiegelung oder Drehung entstanden sind, sind mit ihrem Original deckungsgleich oder kongruent.

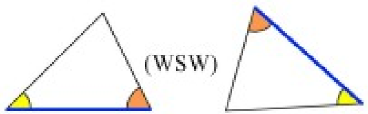


Kongruenz
Kongruente Dreiecke
2
20

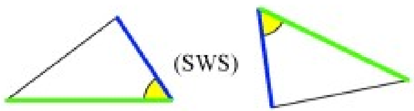
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen. (**SSS**)



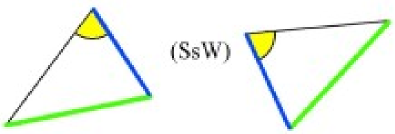
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.
(**WSW** bzw. **SWW**)



Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
(**SWS**)



Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.
(**SsW**)



Reelle Zahlen
Zahlenaufbau
3
20

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1;2;3;...\}$

Addieren und Multiplizieren ist möglich

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{... -2; -1;0;1;2;...\}$

Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren ist möglich

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$ = Menge aller Brüche

Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren (Potenzieren) und Dividieren ist möglich (abbrechende oder periodische Dezimalzahlen)

Irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche, z.B. $\sqrt{2}$, π , 1,010010001...

Ab jetzt ist auch Wurzelziehen für ***positive Zahlen*** möglich

Reelle Zahlen: $\mathbb{R}$ = Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen.

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Nicht möglich ist Wurzelziehen für ***negative Zahlen*** !

Reelle Zahlen
Quadratwurzeln
4
20

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.
a heißt **Radikand**, er darf **nicht** negativ sein.

Also: $(\sqrt{a})^2 = a;\ a \geqq 0$

Beispiele: $\sqrt{1{,}96} = 1{,}4$, weil $1{,}4^2 = 1{,}96$
$\sqrt{-9}$ gibt es nicht!

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Beispiel: $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$

Für a, b > 0 gilt:
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und
$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$

Beispiel: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 45} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$

<u>Aber es gilt niemals:</u>

$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ insbesondere: $\sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b$ aber: $\sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$

Reelle Zahlen

Faktorisieren und teilweises Wurzelziehen

5

20

- Geeignete Faktoren lassen sich vor die Wurzel ziehen;
  $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

- Bruchterme lassen sich so erweitern, dass im Nenner keine Wurzeln mehr auftreten.
  $\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$

Quadratische Funktionen

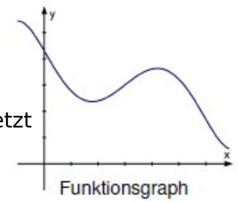
Funktionsdefinition

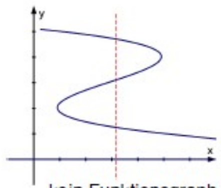
6

20

Eine Zuordnung f : x → y , die jedem x **genau einen Wert** y zuordnet heißt **Funktion**.

Graphen von Funktionen werden von jeder Parallelen zur y-Achse höchstens einmal geschnitten.





Bezeichnungen:
- Die Menge der Zahlen, die für x eingesetzt werden dürfen, heißt **Definitionsmenge D**
- Die Menge der Zahlen, die zugeordnet werden, heißt **Wertemenge W**

- f: x ↦ f(x), x∈D, nennt man **Funktionsvorschrift**.
- y = f(x) nennt man **Funktionsgleichung**.
- x heißt **unabhängige Variable**,
- y heißt **abhängige Variable**.

Beispiel:

f: x ↦ $2x^2$ D = Q ; W = Q_0^+

g : x ↦ x bzw. y = | x | ,
D_{max} = Q, W = Q_0^+

h : x ↦ x^2 ,
z.B. h(-2) = 4, h(1,5) = 2,25

Quadratische Funktionen

Spezielle quadratische Funktionen

7

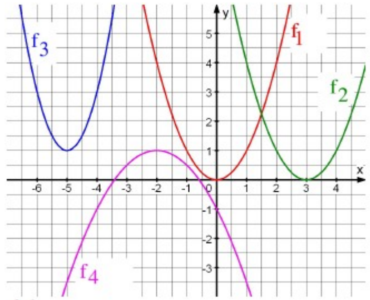
20

Funktionen der Form f :x ↦ $ax^2 + bx + c$ (a ≠ 0) heißen quadratische Funktionen; ihre Graphen nennt man **Parabeln**.

Die Form f :x ↦ $ax^2 + bx + c$ (a ≠ 0) heißt Normalform einer quadratischen Funktion.

a = 1 *Beispiel:* f_1

Der Graph von g :x ↦ x^2 heißt **Normalparabel**.



a = 1; b = 0

Der Graph von g :x ↦ $x^2 + c$ heißt **verschobene Normalparabel**.

a ≠ 0 und a≠1

a > 0: Die Parabel ist nach oben geöffnet
a < 0: Die Parabel ist nach unten geöffnet

|a| < 1: Die Parabel ist weiter als die Normalparabel
|a| > 1: Die Parabel ist enger als die Normalparabel

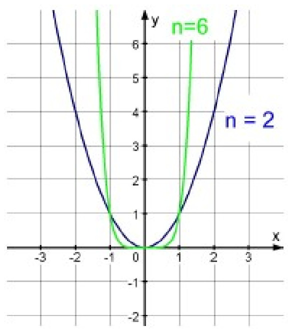
Quadratische Funktionen

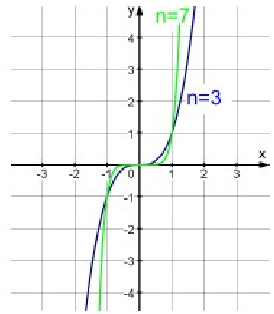
Potenzfunktionen

8

20

Funktionen der Form x ↦ $a \cdot x^n$ (n ∈ℕ) nennt man Potenz-funktionen (n-ten Grades). Im Sonderfall a = 1 gilt:





n∈ℕ gerade:
- W = [0 ; + ∞]
- der Graph ist symmetrisch zur y-Achse

n∈ℕ ungerade:
- W = ℝ
- der Graph ist symmetrisch zum Punkt (0;0)

Quadratische Funktionen

Die allgemeine Form

9

20

Funktionen der Form $f: x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ ist die allgemeine Form einer quadratische Funktion.

Scheitel der Parabel: $S\left(-\frac{B}{2A}; C - \frac{B^2}{4A}\right)$

Nullstellen der Parabel:
(nach quadratischer Lösungsformel) $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Quadratische Funktionen

Die Scheitelform

10

20

Jede quadratische Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ lässt sich durch quadratische Ergänzung auf die **Scheitelpunktform** $f: x \mapsto \mathbf{a(x-d)^2 + e}$ bringen.

Scheitelpunkt: S(d | e)

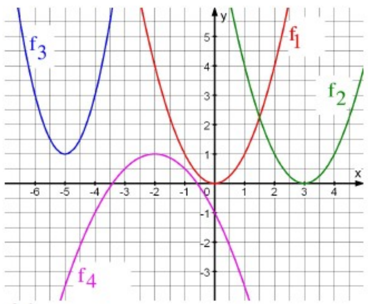
Beispiele (siehe Diagramm):

$f_1(x) = x^2$ Normalparabel S(0|0)

$f_2(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ S(3|0)

$f_3(x) = 2x^2 + 20x + 51 = 2(x+5)^2 + 1$ S(-5|1)

$f_4(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 1 = -0{,}5(x+2)^2 + 1$ S(-2|1)



Nullstellen der Parabel:

1. Lösung

$\sqrt{-c/a} = x - d$

$\mathbf{x_1 = d + \sqrt{-c/a}}$

2. Lösung

$\sqrt{-c/a} = -(x - d)$

$\sqrt{-c/a} = -x + d$

$\mathbf{x_2 = d - \sqrt{-c/a}}$

ACHTUNG! da es sich bei -c/a um eine Quadratwurzel handelt, darf das Minuszeichen nicht vor die Wurzel gezogen werden.

Quadratische Funktionen

Die faktorisierte Form

11

20

Jede quadratische Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ lässt sich über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen in ein Produkt von Lineartermen zerlegen, das eine Spezialisierung des Satzes von Vieta für quadratische Funktionen darstellt:

Faktorisierte Form $f: x \mapsto \mathbf{a(x-x_1)(x-x_2)}$

Nullstellen : x_1 und x_2

Da eine quadratische Funktion nicht notwendig reelle Nullstellen haben muss, ist diese Form nicht für alle quadratische Funktionen möglich.

Die Scheitelkoordinaten

Die x-Koordinate des Scheitels liegt in der Mitte zwischen x_0 und x_1

$x_s = \frac{x_0 + x_1}{2}$ $\quad y_s = -\frac{a}{4}(x_0 - x_1)^2$

Bruchterme und Bruchgleichungen

Bruchterme

12

20

Mit der Definition $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ können auch negative Exponenten erlaubt werden.

Die Potenzgesetze $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ und $x^m : x^n = x^{m-n}$ gelten für alle ganzen Zahlen m,n.

Beispiel: $\frac{3^3 \cdot 3^{-4}}{3^{-2}} = \frac{3^{3-4}}{3^{-2}} = \frac{3^{-1}}{3^{-2}} = 3^{-1-(-2)} = 3^1 = 3$

Terme, bei denen Variablen im Nenner auftreten, heißen Bruchterme.
Die Nullstellen des Nennerterms gehören nicht zur Definitionsmenge des Bruchterms.

Bruchterme sind z.B.: $\frac{3x-4}{6(x+3)}$ $\quad \frac{3x^2-9}{x-5}$ $\quad \frac{3-z}{z^2+3}$

- Kürzen und Erweitern von Bruchtermen
  - Kürzen: gleiche Faktoren in Zähler und Nenner können gekürzt werden
    Beispiel: $\frac{(a+b)(c-d)}{(a-b)(c-d)} = \frac{(a+b)}{(a-b)}$
  - Erweitern: Multiplizieren des Zählers und des Nenners mit demselben Faktor
    Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{a(c-d)}{b(c-d)}$

Bruchterme und Bruchgleichungen

Bruchterme bearbeiten

13

20

- Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen
  Vorgehensweise wie bei Brüchen: - Hauptnenner finden (kgV der Nenner)
  - Erweiterung auf den Hauptnenner
  - Addition bzw. Subtraktion der Zähler
  - Vereinfachung (soweit möglich)

Beispiel:

$$\frac{a}{a+b} \pm \frac{b}{a-b} = \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} \pm \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{a^2-ab}{(a+b)(a-b)} \pm \frac{ab+b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a^2-ab) \pm (ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}$$

- Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen
  – Multiplikation: Multiplikation der Zähler und Multiplikation der Nenner

Beispiel:

$$\frac{a}{a-b} \bullet \frac{a+b}{b} = \frac{a \bullet (a+b)}{(a-b) \bullet b} = \frac{a^2+ab}{ab-b^2}$$

– Division: Multiplikation mit dem Kehrbruch

Beispiel:

$$\frac{a}{a-b} : \frac{b^2}{(a+b)} = \frac{a}{a-b} \bullet \frac{a+b}{b^2} = \frac{a^2+ab}{ab^2-b^3}$$

Bruchterme und Bruchgleichungen

Bruchgleichungen

14

20

Definitionsmenge bestimmen

- Bruchterme kürzen, falls möglich
- Mit dem Hauptnenner multiplizieren
- Bruchtermfreie Gleichung lösen
- Lösungsmenge angeben und dabei auf die Definitionsmenge achten

Beispiel:

$\frac{2}{x} = \frac{1}{6-x}$ Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{0;6\}$;
Hauptnenner HN = $x \bullet (6 - x)$

$\frac{2 \bullet x \bullet (6-x)}{x} = \frac{1 \bullet x \bullet (6-x)}{6-x}$ beide Seiten wurden mit dem HN multipliziert

$2 \bullet (6-x) = x$ nach dem Kürzen

Ausrechnen ⇒ $x = 4$ (4 ist in der Definitionsmenge enthalten)

Funktionen

Gebrochen – rationale Funktionen

15

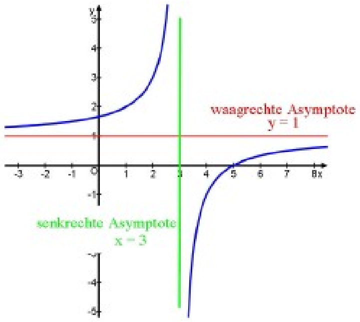
20

Funktionen, bei denen x im Nenner vorkommt, heißen gebrochen rationale Funktionen.

Beispiele: $f(x) = \frac{2}{3-x} + 1$; $g(x) = \frac{3-2x}{2x-1}$; $h(x) = \frac{3-2x}{2x^2+1}$

Zur Definitionsmenge können nur solche Zahlen gehören, für die der Nenner nicht Null wird.

Ein wichtiges Kennzeichen der Graphen gebrochen rationaler Funktionen sind die „Asymptoten“.
Eine Gerade heißt Asymptote des Graphen einer Funktion, wenn sie sich dem Funktionsgraphen beliebig genau annähert.
Auch senkrechte Geraden können Asymptoten sein, sie treten an den Lücken von D_f auf.



Beispiel: $f(x) = \frac{2}{3-x} + 1$; $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

Quadratische Gleichungen

Lösungsformeln

16

20

Gleichungen der Art $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißen **quadratische Gleichungen**.

Lösungsformel für eine quadratische Gleichung:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

D = b2 - 4ac heißt Diskriminante.
D < 0 ⇒ es gibt keine Lösung der Gleichung
D = 0 ⇒ es gibt genau eine Lösung
D > 0 ⇒ es gibt zwei Lösungen

$x^2 + px + q = 0$ heißt **Normalform** einer quadratische Gleichungen.

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist die Diskriminante

Wahrscheinlichkeitsrechnung

17

Ereignisse

20

Kein, ein oder mehrere Ergebnisse fasst man zu einem **Ereignis E** zusammen.
Ein Ereignis ist also eine Teilmenge von Ω.

Das Gegenereignis $\overline{E}$ tritt genau dann ein, wenn E nicht eintritt: $\overline{E} = \Omega \setminus E$

Beispiel: Werfen eines Würfels: Ereignis E= { 2; 4; 6} d.h. „gerade Augenzahl“

Gegenereignis $\overline{E}$ ={1; 3; 5} d.h. „keine gerade Augenzahl“

Wahrscheinlichkeitsrechnung

18

Laplace – Wahrscheinlichkeit

20

Zufallsexperimente, bei denen jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, heißen **Laplace-Experimente**. Für Laplace-Experimente gilt:
Ist |A| die Anzahl der Elemente von A und |Ω| die Anzahl der Elemente von Ω, so gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$$

Zählprinzip: Zieht man aus k verschiedenen Mengen mit m_1, m_2, ...m_k Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt $m_1 \bullet m_2 \bullet \ldots \bullet m_k$ Möglichkeiten.

Beispiele:

1) In den drei achten Klassen (8a 27 Schüler ; 8b 25 Schüler ; 8c 29 Schüler) wird jeweils ein Klassensprecher gewählt ⇒ es gibt 27 • 25 • 29 Möglichkeiten.
2) Drei von 13 Wettbewerbsteilnehmern erreichen Platz 1, Platz 2, Platz 3 13 •12 •11 Möglichkeiten.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

19

Ergebnis und Ereignisraum

20

Ein Experiment, dessen Ausgang man nicht voraussagen kann, nennt man **Zufallsexperiment**. Den Ausgang des Experiments nennt man Ergebnis. Die Menge aller möglichen Ergebnisse nennt man **Ergebnismenge** oder **Ergebnisraum Ω**.

Beispiel: Werfen eines Würfels: Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6} ; Ω hat 6 Elemente: | Ω | = 6.

Binomische Formeln

20

20

$(a \pm b)^0 = 1$
$(a \pm b)^1 = a \pm b$
$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$ 1. und 2. Binomische Formel
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$
$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

Das Vorzeichen wechselt mit der ungeraden Potenz von b.

$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$ 3. Binomische Formel
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$