Prozentrechnung

Prozent – Bruch – Dezimalzahl

1

32

Ein bestimmter Wert G (Grundwert) wird als **100 Teile** eines kleineren Wertes oder als **ein Ganzes** festgelegt.

- Dann sind alle Werte, die kleiner als G sind, kleiner als 100, wenn G als Summe von 100 Teilen aufgefasst wird und die Angabe erfolgt mit der Bezeichnung **% (Prozentangabe)**
- Alle Werte, die kleiner als G sind, sind kleiner als 1 und werden als reelle Zahl mit 0,... angegeben **(Dezimalbruch)**.
- Alle Prozentwerte lassen sich als gewöhnlicher **Bruch** schreiben, bei dem die Prozentzahl im Zähler und 100 im Nenner.

$$\boxed{25\,\% \;=\; 0{,}25 \;=\; 25/100}$$

Prozentrechnung

Grundgleichung der Prozentrechnung

2

32

$$\boxed{W : G = p : 100}$$

Die Bezugsgröße heißt **Grundwert** oder Gesamtwert und wird mit **G** bezeichnet. Sie entspricht immer einem Prozentsatz von **100%**. Der **Prozentsatz** gibt den Anteil in % an und wird mit **p%** bezeichnet. Der Wert, der dem Prozentsatz entspricht heißt **Prozentwert** und wird mit **W** bezeichnet

Bei der Formel für die Prozentrechnung handelt es sich um **1 Gleichung** mit **3 Variablen**. Um überhaupt eine Lösungsmöglichkeit zu besitzen, müssen 2 der 3 Variablen bekannt sein.
Das **Verhältnis** der beiden Seiten ist gleich, also sind die Werte **proportional** zueinander, d.h Zähler und Nenner der beiden Seiten unterscheiden sich durch den gleichen **Faktor**.

Prozentrechnung

Prozentrechnung und Dreisatz

3

32

Berechnen des Prozentwertes

Als Formel	Als Dreisatz
(1) $W = \frac{G * p}{100}$	(2) 100 % . . . . G p % . . . . .W ?

Berechnen des Prozentsatzes

Als Formel	Als Dreisatz
(1) $p = \frac{W}{G} * 100$	(2) G . . . . 100 % W . . . . .p ?

Berechnen des Grundwertes

Als Formel	Als Dreisatz
(1) $G = \frac{W}{p} * 100$	(2) p % . . . . W 100 % . . . . .G ?

Zinsrechnung

Prozent und Zinsen

4

32

Die einfache Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Allerdings haben die Größen andere Bezeichner und die Bezeichner andere Namen:

Prozentrechnung	**Zinsrechnung**
$\boxed{W : G = p : 100}$	$\boxed{Z : K = p : 100}$
W Prozentwert	Z Zinsbetrag
G Grundwert	K Kapital
p Prozentsatz	p Zinssatz

Zinsrechnung

Tageszinsen und Monatszinsen

5

32

Der Zinssatz gilt immer für ein ganzes Jahr. Bei einigen Geldgeschäften werden die Zinsen aber täglich oder Monatlich berechnet. Damit teilt sich der Zinssatz p noch einmal durch die Anzahl der Monate oder Tage im Jahr.
Für das Jahr werden 12 Monate zugrunde gelegt und für den Monat 30 Tage. Damit wird finanztechnisch das Jahr mit 360 Tagen gerechnet und die unterschiedliche Tagesanzahl der Monate beleibt unberücksichtigt.

Zinsrechnung bei täglicher Verzinsung

Der Zinssatz ist durch 360 zu dividieren (Banken-festlegung der Anzahl der Tage im Jahr) und dann mit der Anzahl Tage, für die die Berechnung erfolgen soll, zu multiplizieren.

$$\boxed{Z : K = \mathbf{(p/360) * T} : 100}$$

Zinsrechnung bei monatlicher Verzinsung

Der Zinssatz ist durch 12 zu dividieren (Anzahl der Monate im Jahr) und dann mit der Anzahl Monate, für die die Berechnung erfolgen soll, zu multiplizieren.

$$\boxed{Z : K = \mathbf{(p/12) * M} : 100}$$

Zinsrechnung

Zinseszinsrechnung

6

32

Werden die Zinsen des ersten Jahres auf dem Konto belassen, so werden auch die in den Folgejahren mit verzinst, da sie das Ausgangskapital für das zweite Jahr erhöhen. Dieser Prozess kann sich über mehrere Jahre fortsetzen, dann spricht man von einer **Zinseszinsrechnung.**
Der Zinssatz p, der bei einer einstelligen Prozentzahl liegt (3%, 4%) wird hier als Dezimalzahl (0,03; 0,04) verwendet.
Da in allen Ausdrücken der neue Term 1 + p auftritt, wird finanztechnisch dafür ein neuer Begriff eingeführt, der **Zinsfaktor** q = 1+ p. Damit ist der Zinsfaktor eine Dezimalzahl, die immer größer als 1 ist (1,03; 1,04).

Damit entsteht für die Formel des Kapitals nach n- Jahren:

$$\boxed{K_n = K_0 * q^n}$$

Soll aus einem vorhandenen Endkapital das Ausgangskapital bestimmt werden

$$\boxed{K_0 = K_n * \frac{1}{q^n}}$$

Der Zinssatz bestimmt sich aus:

$$\boxed{q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}}$$

Die Anzahl der Jahre, die bei einem Anfangskapital und Zinssatz zu einem Endkapital führen:

$$\boxed{n = \frac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg q}}$$

Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

Zufallsexperiment

7

32

- ein Versuch, bei dem das Ergebnis nicht vorher zu sagen ist, es müssen allerdings mindestens zwei Ergebnisse möglich sein.
- es muss unter den gleichen Voraussetzungen wiederholbar sein.

Grundsätzlich kann man zwischen „einstufigen" und „mehrstufigen" Zufallsexperimenten unterscheiden.

- Unter dem Begriff „**einstufiges**" Zufallsexperiment versteht man einen Versuch, der nur 10 einmal durchgeführt wird, wie zum Beispiel das Werfen eines Würfels.
- Ein „**mehrstufiges**" Zufallsexperiment ist, wenn ein Versuch mehrmals durchgeführt wird, wie zum Beispiel bei dem Ziehen der Lottozahlen. Hierbei werden mehrere Kugeln gezogen.

Jeder mögliche Versuchsausgang eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnis** ω.
Die Menge aller Ergebnisse ω_1, ω_2, ω_3, …, ω_n eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge** $\Omega = \{\omega_1;\ \omega_2\ ,\ \omega_3\ \ldots\ \omega_n\ \}$ diese Festlegung muss so geschehen, dass bei jeder Durchführung genau eines dieser Ergebnisse auftritt.

Die **Anzahl der Ergebnisse** schreibt man $|\Omega| = n$.

Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

Pfadregeln

8

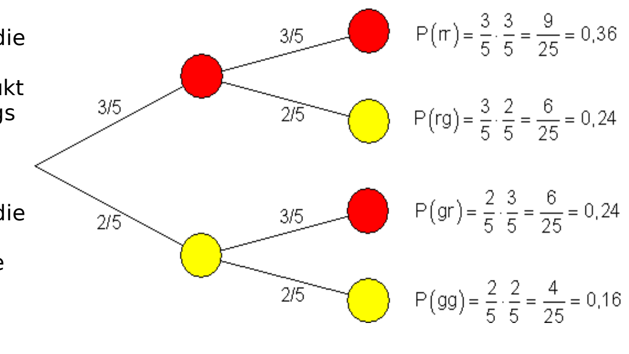
32

Setzt sich ein Ereignis E aus den Ereignissen A und B zusammen, die sich überschnei-den können, dann darf dieses gemeinsamen Ereignisse nicht doppelt berücksichtigt werden.

$$\mathbf{P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Erste Pfadregel
In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Zweite Pfadregel
In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten

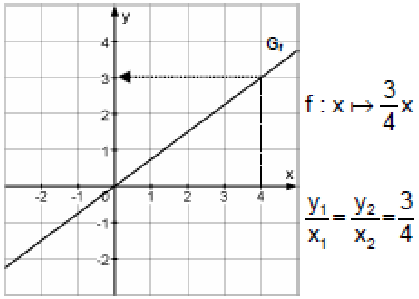


Zuordnungen
Proportionale oder direkte Zuordnung

Bei einer **proportionalen Zuordnung** gehört zum 2-, 3-, 4-...r-fachen der unabhängigen Größe das 2-, 3-, 4-....r-fache der abhängigen Größe.
Ist x ↦ y eine proportionale Zuordnung, so gilt: $y = q \cdot x$ bzw. $x/y = q$ = „konstant".

Der konstante Quotient q heißt Proportionalitätsfaktor.

- Zum n-fachen Wert der unabhängigen Größe gehört der n-fache Wert der abhängigen Größe
- Die Wertepaare sind quotientengleich
- Der Zusammenhang der beiden Größen wird durch eine Gleichung der Form y = ax beschrieben
- Das x-y-Diagramm ergibt eine Ursprungsgerade

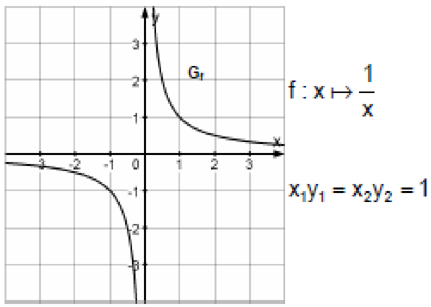


Zuordnungen
Umgekehrt proportionale Zuordnung

Bei einer **umgekehrt proportionalen Zuordnung** gehört zum 2-, 3-, 4-....r-fachen der unabhängigen Größe das $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{r}$ fache der abhängigen Größe.

Ist x ↦ y eine umgekehrt proportionale Zuordnung, so gilt: $y = p / x$ bzw. $y \cdot x = p$ = „konstant".

- Zum n-fachen Wert für x gehört der 1/n-fache Wert für y
- Die Wertepaare sind produktgleich: $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$
- Der Zusammenhang der beiden Größen wird durch eine Gleichung der Form y = a/x beschrieben
- Das x-y-Diagramm ergibt eine Hyperbel, keine Schnittpunkte mit x- und y- Achse

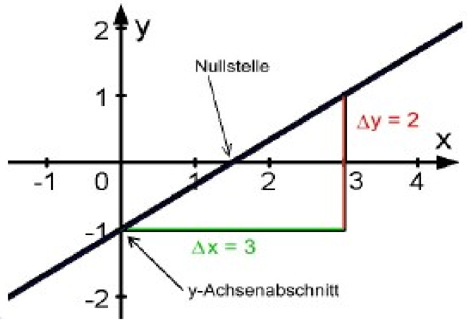


Lineare Funktionen
Funktionsbild

f: x ↦ y = mx + b mit $D_f = \mathbb{Q}$
Der Graph ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b.

z.B.: $f: x \mapsto \frac{2}{3}x - 1$ mit $D_f = \mathbb{Q}$
y-Achsenabschnitt n = – 1

Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{3}$



Bemerkungen zur Steigung von Geraden:
- Je größer |m| ist, desto steiler ist die Gerade.
- Für m < 0 fällt, für m > 0 steigt die Gerade; für m = 0 verläuft sie parallel zur x-Achse
- Alle Geraden mit gleicher Steigung m sind parallel.

Lineare Funktionen
Geradengleichung aus Punkt und Anstieg

Eine lineare Funktion ist eindeutig bestimmt

- durch einen Punkt P_0 und eine Steigung m

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

Gegeben: $P_0\ (x_0, y_0)$
m

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

oder aus: $y_0 = m \cdot x_0 + b$ folgt $b = y_0 - m \cdot x_0$

$$y = m \cdot x + \underbrace{y_0 - m \cdot x_0}_{b}$$

Beispiel: P_0 (1 | 4) und m = 3

$$\frac{y - 4}{x - 1} = 3$$

$y - 4 = 3(x - 1)$
$y - 4 = 3x - 3$
$y = 3x + 1$

Für den Anstieg m ist der Wert über dem Bruchstrich die y-Differenz, der Wert unter dem Bruchstrich die x-Differenz. Ist m ganzzahlig, ist als x-Differenz 1 anzusetzen.
Für negatives m ist entweder der x-Wert in positive Richtung und der y-Wert in negative Richtung (vom festen Punkt aus gesehen) abzutragen, wie in der nebenstehenden Skizze rot, oder in negative x-Richtung und positive y-Richtung, wie in nebenstehender Skizze grün. Beides führt zu Erfolg.

Lineare Funktionen

Geradengleichung aus zwei Punkten

13

32

Eine lineare Funktion ist eindeutig bestimmt

- durch zwei Punkte P_1 und P_2

Gegeben: $P_1\ (x_1,y_1)$
$P_2\ (x_2,y_2)$

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

m

Beispiel: $P_1\ (-1 \mid -2)$ und
$P_2\ (1 \mid 4)$

$$\frac{y - (-2)}{x - (-1)} = \frac{4 - (-2)}{1 - (-1)} = 3$$

$$y + 2 = 3(x + 1)$$
$$y + 2 = 3x + 3$$
$$y \quad = 3x + 1$$

Für eine Geradengleichung ist ein Anstieg unbedingt notwendig. Dieser wird aus den Koordinaten der beiden Punkte ermittelt.

Lineare Funktionen

14

32

Terme und Gleichungen

Terme und Variable

15

32

Variablen sind Platzhalter für Zahlen oder Größen.
Terme sind Rechenausdrücke, die aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen.
Tritt eine Variable mehrmals in einem Term auf, so muss sie jeweils mit der derselben Zahl belegt werden.

Beispiele: $T(x) = x^3 - 4x \Rightarrow T(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 = 105$
$T(a;b) = a^2 + b^2 + 3a \Rightarrow T(3;4) = 3^2 + 4^2 + 3 \cdot 3 = 34$
$T(5;5) = 5^2 + 5^2 + 3 \cdot 5 = 65$

Äquivalente Terme

Zwei Terme, die bei jeder Belegung der Variablen durch Zahlen jeweils den gleichen Termwert ergeben, heißen **äquivalent** oder **gleichwertig**.
Beispiele: $T_1(x) = x\ (3 - x)$ und $T_2 = - x^2 + 3x \Rightarrow$ sind äquivalent
$T_1(a) = 2a^2 - 4$ und $T_2(a) = 2a - 4 \Rightarrow$ sind nicht äquivalent
Durch Anwendung der Rechengesetze kann man Terme in äquivalente Terme umformen.

Terme und Gleichungen

Rechengesetze

16

32

Für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt:

Kommutativgesetze (KG)	$a + b = b + a$ bzw. $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze (AG)	$a + (b + c)=(a + b) + c$
bzw.	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivgesetz (DG)	$(a + b) \cdot c =a \cdot c + b \cdot c$

Auflösen von Klammern
Steht vor der Klammer ein Pluszeichen, kann die Klammer weggelassen werden.
Beispiel: $3x + (4x - 3a) = 3x + 4x - 3a = 7x -3a$

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen, so ändert man die Vorzeichen in der Klammer und lässt die Klammer und das Minuszeichen weg.
Beispiele: $3x - (4x - 3a) = 3x - 4x \ \ 3a = -x +3a$
$3x - (-4x + 5a -5b) = 3x + 4x - 5a +5b = 7x -5a +5b$

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert und die dabei entstehenden Produkte addiert.

$$\boxed{(a + b) \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by}$$

Beispiel: $(3x + y)(4x - y) = 12x^2 - 3xy + 4xy - y^2 = 12x^2 + xy - y^2$

Terme und Gleichungen

Faktorisieren (Ausklammern)

17

32

Beim Ausklammern werden gleiche Faktoren vor die Klammer gesetzt.

Beispiele: $4a + 12b = 4(a - 3b)$
$4r^2 - 6r = 2 \cdot (2r^2 - 3r) = 2r \cdot (2r - 3)$

Gleichungen

Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind. In mindestens einem Term muss eine Variable - meist x - vorkommen. Kommt die Variable x nur in Form Zahl•x vor, so spricht man von einer linearen Gleichung.
Beispiel: $-2x + 10 = -4(x - 2)$ ist eine lineare Gleichung.
Eine Zahl oder eine Größe ist Lösung der Gleichung, wenn nach ihrem Einsetzen die Termwerte auf den beiden Seiten gleich sind.

Gleichungen werden durch Äquivalenzumformungen gelöst. Eine Äquivalenzumformung ändert die Lösungen nicht, lässt sich aber zum Vereinfachen der Gleichung verwenden. Äquivalenzumformungen sind:
- Termumformungen
- Addition oder Subtraktion desselben Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation beider Seiten mit demselben (von 0 verschiedenen!) Term
- Division beider Seiten durch denselben (von 0 verschiedenen!) Term

Terme und Gleichungen

Ungleichungen

18

32

Eine **Ungleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein Ungleichzeichen verbunden sind. In mindestens einem Term muss eine Variable - meist x - vorkommen. Kommt die Variable x nur in Form Zahl•x vor, so spricht man von einer linearen Ungleichung.

Beziehungen geometrischer Figuren

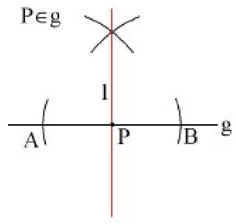
Abstand eines Punktes von einer Geraden

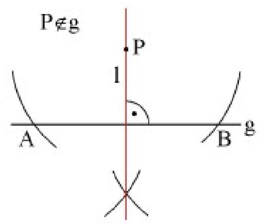
19

32

Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden ist die Strecke, die vom Punkt senkrecht auf die Gerade trifft.
Vom Punkt P ist das Lot auf die Gerade zu fällen.

Das Lot l zu einer Geraden g durch den Punkt P ist die Symmetrieachse zu zwei Punkten A und B der Geraden, die vom Punkt P gleich weit entfernt sind.





Punkte, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand haben

Diese Punkte befinden sich auf einem Kreis, bei dem der Mittelpunkt der vorgegebene feste Punkt ist.

Beziehungen geometrischer Figuren

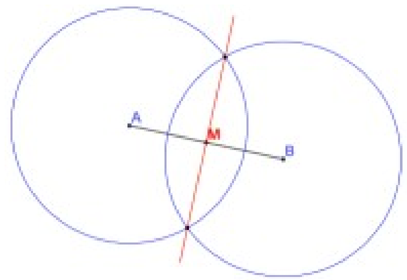
Abstand einer Geraden von zwei Punkten

20

32

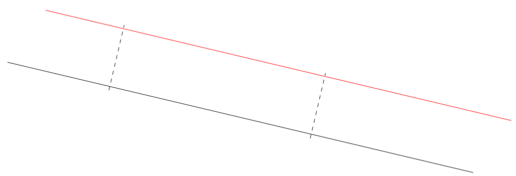
Punkte, die von zwei Punkten den gleichen Abstand haben

Diese Punkte befinden sich auf der Mittelsenkrechten der Strecke zwischen den beiden festen Punkten.



Punkte, die von einer Geraden den gleichen Abstand haben

Diese Punkte befinden sich auf einer Parallelen zur Ausgangsgerade



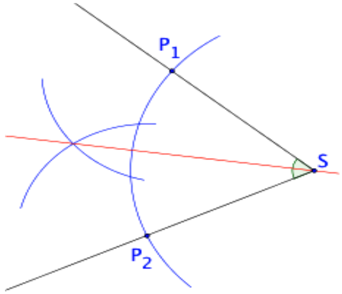
Beziehungen geometrischer Figuren

21

32

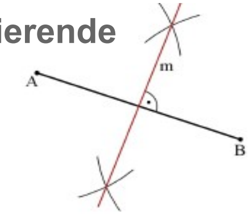
Gleicher Abstand von schneidenden Geraden

Diese Punkte befinden sich auf der Winkelhalbierenden der beiden Geraden.

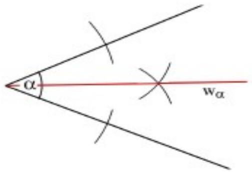


Konstruktion Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende

Die Mittelsenkrechte m zur Strecke [AB] ist die Symmetrieachse zu den Punkten A und B.



Die Winkelhalbierende w_α eines Winkels α ist die Symmetrieachse zu den beiden Schenkeln des Winkels.



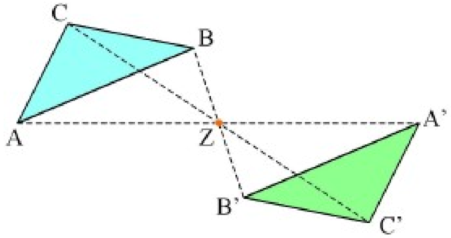
Beziehungen geometrischer Figuren

23

32

Punktsymmetrie und Punktspiegelung

Figuren, die bei einer Halbdrehung um ihr Zentrum Z in sich übergehen, nennt man **punktsymmetrisch** bezüglich des Punktes Z.
Grundeigenschaft:
Die Verbindungsstrecke zweier zueinander symmetrischer Punkte wird vom Symmetriezentrum halbiert.



- Längentreu: Urbildstrecke und Bildstrecke sind immer gleich lang
- Paralleltreu: Sind Urbildlinien parallel zueinander, dann sind auch die Bildlinien parallel zueinander
- Winkeltreu: Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich groß
- Orientierungstreu: Der Drehsinn bleibt bei der Punktspiegelung erhalten
- Fixpunkte: Der Spiegelpunkt S ist der einzige Fixpunkt
- Fixfiguren: Eine Figur, die bei einer Punktspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt punktsymmetrisch und sind Fixfiguren der Punktspiegelung

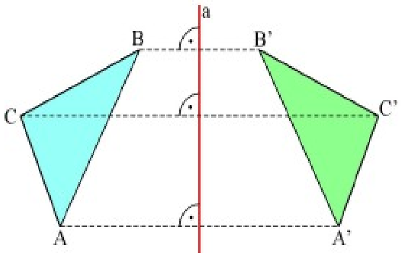
Beziehungen geometrischer Figuren

22

32

Achsensymmetrie und Achsenspiegelung

Figuren, die durch Spiegelung an einer Achse a in sich übergehen, nennt man **achsensymmetrisch** bezüglich der Achse a.
Grundeigenschaft:
Sind A und A' symmetrisch bezüglich der Achse a, dann steht die Verbindungsstrecke [A A'] senkrecht auf der Achse und wird von dieser halbiert.



- Längentreu: Urbildstrecke und Bildstrecke sind bei Achsenspiegelung immer gleich lang
- Paralleltreu: Sind Urbildlinien parallel zueinander, dann sind auch die Bildlinien parallel zueinander
- Winkeltreu: Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich groß
- Orientierungsumkehr: Der Drehsinn wird bei der Achsenspiegelung umgekehrt
- Fixpunkte: Alle Punkte auf der Achse, und nur diese, sind Fixpunkte und werden auf sich selbst abgebildet.
- Fixfiguren: Eine Figur, die bei einer Achsenspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt achsensymmetrisch und sind Fixfiguren der Achsenspiegelung. Die Achse und alle senkrechten Geraden sind Fixgeraden

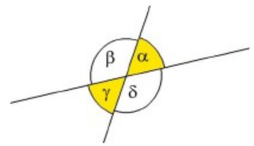
Beziehungen geometrischer Figuren

24

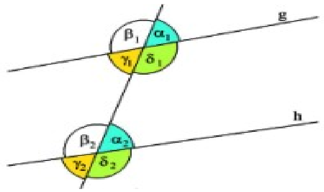
32

Winkel an schneidenden Geraden

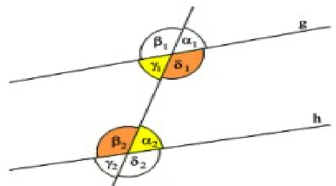
An einer Geradenkreuzung sind Scheitelwinkel gleich groß und Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.
Hier: α = γ bzw. β = δ
und z.B. α+β = 180°



An einer Doppelkreuzung definiert man Stufenwinkel und Wechselwinkel.



Stufenwinkelpaare:
α1 und α2 ; β1 und β2
γ1 und γ2 ; δ1 und δ2



Wechselwinkelpaare:
γ1 und α2 ; δ1 und β2
α1 und γ2 ; β1 und δ2

Die Geraden g und h sind genau dann parallel, wenn die Stufenwinkel und Wechselwinkel jeweils gleich groß sind.

Beziehungen geometrischer Figuren

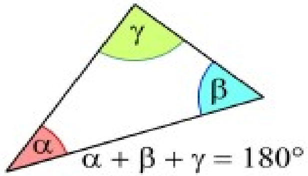
25

32

Das Dreieck

Winkelsumme

In jedem Dreieck beträgt die Summe der drei Innenwinkel 180°.
Folgerungen:
Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.
Die Winkelsumme im n-Eck beträgt (n - 2) •180°.



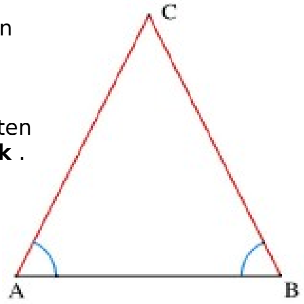
Besondere Dreiecke

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt **gleichschenkliges Dreieck**. Die gleichlangen Seiten heißen Schenkel. Die dritte Seite heißt Basis.
(Skizze: C heißt Spitze, a und b heißen Basiswinkel)

Sonderfall des gleichschenkligen Dreiecks: Sind alle drei Seiten gleich lang, spricht man von einem **gleichseitigen Dreieck** .

Satz vom gleichschenkligen Dreieck
Jede der folgenden Aussagen ist gleichwertig:

- Das Dreieck ist gleichschenklig.
- Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
- Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel.



Beziehungen geometrischer Figuren

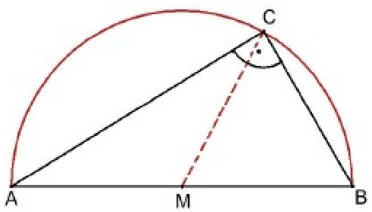
26

32

Der Thaleskreis

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinkliges Dreieck**.

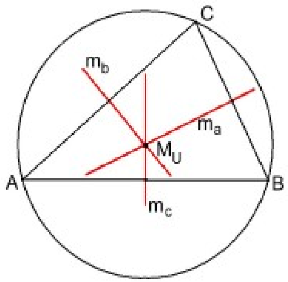
Satz des Thales:
Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf einem Halbkreis über [AB] liegt.



Die Mittelsenkrechten

Satz von den Mittelsenkrechten im Dreieck

In jedem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Dreiecksseiten in genau einem Punkt M_U.
M_U ist der **Umkreismittelpunkt** des Dreiecks.
(M_U hat von allen drei Ecken des Dreiecks den gleichen Abstand.)



Beziehungen geometrischer Figuren

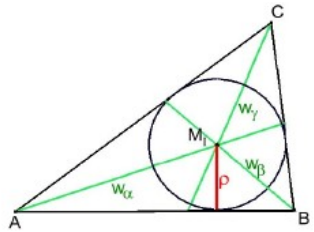
27

32

Besondere Linien im Dreieck

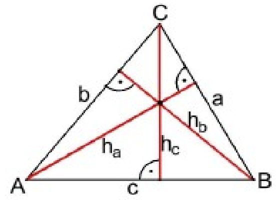
Die Winkelhalbierenden

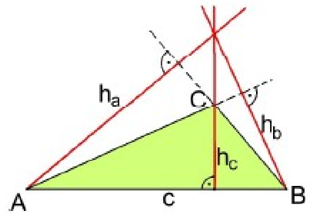
In jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in genau einem Punkt M_I.
M_I ist der Mittelpunkt vom **Inkreis** des Dreiecks.
(M_I hat von allen drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand r.)



Die Höhen

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Höhen (oder deren Verlängerungen) in genau einem Punkt.





Gleichungen und Gleichungssysteme

28

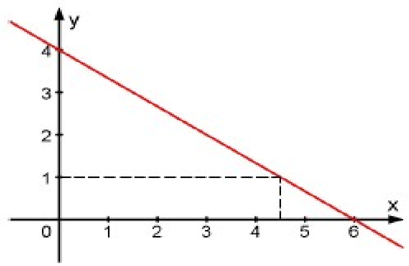
32

Lineare Gleichungen und lineare Zuordnungen

Gleichungen der Art mx + b = c heißen lineare **Gleichungen**. Sie lassen sich rechnerisch durch Äquivalenzumformungen lösen oder zeichnerisch durch Zeichnen des Graphen zu f(x) = mx + b und Suchen der y-Werte mit y = c.

Beispiel: $-\frac{2}{3}x+4 = 1$ (Skizze rechts)

Für die Lösung der Gleichung gilt: x = 4,5.
Die „Nullstelle“ der Funktion f ist die Lösung der Gleichung $-\frac{2}{3}x + 4 = 0$. Im Beispiel gilt $x_N = 6$.

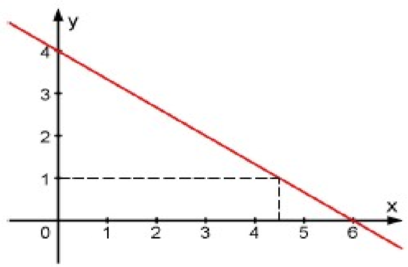


Gleichungen und Gleichungssysteme 29 / 32

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen besitzt die allgemeine Form $Ax + By = C$.

- Eine solche Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen
- Jede Lösung kann als ein Zahlenpaar (x|y) angegeben werden.
- Die graphische Darstellung der Lösung ist ein Gerade im x-y-Koordinatensystem



Die im letzten Beispiel benutzte Gleichung kann als Gleichung mit zwei Variablen folgendermaßen beschrieben werden:

$-\frac{2}{3}x+4 = y$ oder : $3y + 2x = 4$

Geometrisch bedeutet die Lösung einer solchen Gleichung:

Bestimme für y=0 den gültigen Wert für x,

was gleichbedeutend damit ist:

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse

Gleichungen und Gleichungssysteme 31 / 32

Lösungsverfahren

Gleichsetzungsverfahren:

Beide Gleichungen werden nach x oder y aufgelöst und anschließend gleichgesetzt.

(I') = (II')

$$5 - 2x = x - 1$$
$$6 = 3x$$
$$x = 2$$

Einsetzungsverfahren:

Eine der beiden Gleichungen wird nach x oder y aufgelöst und in die andere Gleichung eingesetzt.

(I') in (II)

$$x - (5-2x) = 1$$
$$x - 5 + 2x = 1$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Additionsverfahren:

Eine Gleichung oder beide werden mit einem Faktor so Multipliziert, dass beim Addieren der beiden Gleichungen eine Variable verschwindet.

(I) + (II)

$$(2x + y) + (x - y) = 5 + 1$$
$$2x + y + x - y = 6$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Durch Einsetzen des x-Wertes in eine der beiden Gleichungen I oder II kann y bestimmt werden.

$y = 2 \quad \Rightarrow \quad L = \{ (2|1) \}$

Die Lösung wird in Form einer Menge angegeben { } die nur aus einem Punkt (|) besteht.

Gleichungen und Gleichungssysteme 30 / 32

Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen

Ein Gleichungssystem heißt dann linear, wenn alle Variablen nur in der ersten Potenz auftreten. Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

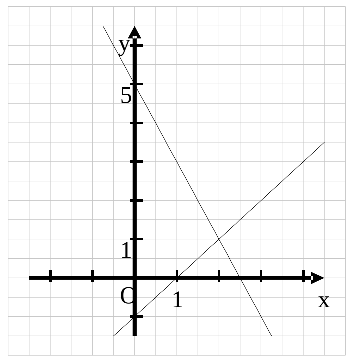
(I)	$2x + y = 5$	(I') $y = 5 - 2x$
(II)	$x - y = 1$	(II') $y = x - 1$

Gesucht sind diejenigen Werte x und y, für die sowohl die erste Zeile, wie auch die zweite Zeile eine richtige Gleichung ergibt.

Grafische Lösung:

Graphisch bedeutet das Lösen eines linearen Gleichungssystems den Schnittpunkt von zwei Geraden zu bestimmen.

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt P(2|1)



Gleichungen und Gleichungssysteme 32 / 32

Lineare Ungleichungssysteme

Lineare **Ungleichungssysteme**, wie z.B. $-1{,}5x+2 \geqq y$ oder $2x+1 < y$ lassen sich ebenfalls durch Äquialenzumformungen lösen.

Während bei einer linearen Gleichungen mit zwei Variablen die Lösungsmenge eine Gerade ist, ist die Lösungsmenge bei eine linearen Ungleichung eine Halbebene:

Entweder alle Paare (x|y), die oberhalb oder unterhalb der Geraden liegen

Die Lösung solcher Ungleichungssysteme ist nur graphisch möglich. Es ist zu entscheiden, welche Halbenene die Ungleichung erfüllt.

Bei Ungleichungssystemen von zwei Ungleichungen mit zwei Variablen ist die Lösungsmenge die Schnittmenge der beiden Halbebenen.
Am einfachsten überprüft man, ob der Ursprung zur Lösungsmenge gehört.