Brüche
Grundbegriffe
1
48

Brüche haben die Form $\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$.

z heißt der **Zähler**, n heißt der **Nenner** des Bruches.
Brüche mit z > n heißen unechte Brüche, wir können sie in gemischte Zahlen umwandeln.

Beispiel: $\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$

Bruchzahlen

Der Wert des Quotienten zweier ganzer Zahlen a und b ist die **Bruchzahl** a/b

Zu jeder Bruchzahl gehören unendlich viele verschiedene Brüche.

Beispiele für gleiche Bruchzahlen:

$\frac{3}{5}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{9}{15}$ $\frac{12}{20}$

$\frac{4}{7}$ $\frac{8}{14}$ $\frac{12}{21}$ $\frac{16}{28}$

Zu jedem Quotienten z:n gibt es eine Bruchzahl $\frac{z}{n}$

Beispiel: $48:36 = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$

bzw. $12:9 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

Brüche
Arten von Brüchen
2
48

echter Bruch : Zähler < Nenner — *Beispiel:* $\frac{2}{3}$

Stammbruch : Zähler = 1 — *Beispiel:* $\frac{1}{3}$

Scheinbruch : Zähler = Vielfaches des Nenners — *Beispiel:* $\frac{6}{3}$

Unechter Bruch: Zähler > Nenner — *Beispiel:* $\frac{3}{2}$

Gemischte Zahl: — *Beispiel:* $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Zähler

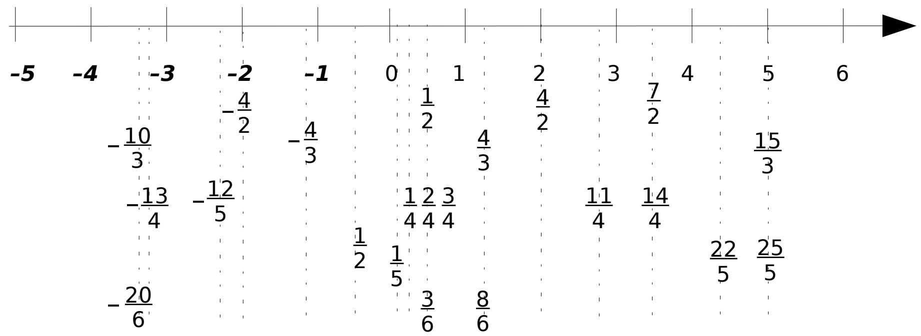
:	+ 3	– 3
+ 4	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
– 4	$-\frac{3}{4}$	$+\frac{3}{4}$

Nenner

Die Vorzeichenregeln entsprechen denen der Division
+ gibt, wenn beiden Zahlen gleiche Vorzeichen haben,
- gibt, wenn beiden Zahlen verschiedene Vorzeichen haben.

Brüche
Bruchzahlen und Zahlenstrahl
3
48

- Bruchzahlen stehen auf dem Zahlenstrahl zwischen den ganzen Zahlen
- Brüche mit gleicher Bruchzahl stehen an der gleichen Stelle



Brüche
Erweitern und Kürzen
4
48

Zu jeder Bruchzahl gehören unendlich viele verschiedene Brüche.

Beispiel: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \ldots$

Erweitern:
Zähler und Nenner werden mit derselben natürlichen Zahl multipliziert. Der Wert der Bruchzahl ändert sich dabei nicht.

$\frac{z}{n} = \frac{z \cdot k}{n \cdot k}$ $k \in \mathbb{N}$ Beispiel: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$

Kürzen:
Zähler und Nenner werden durch einen gemeinsamen Teiler k dividiert. Der Wert der Bruchzahl ändert sich dabei nicht.

$\frac{z}{n} = \frac{z:k}{n:k}$ $k \in \mathbb{N}$ Beispiel: $\frac{21}{28} = \frac{21:7}{28:7} = \frac{3}{4}$

Ein Bruch, den man nicht mehr kürzen kann, nennt man vollständig gekürzt. (Grundform des Bruches)

Diese Formänderungen ändern nicht die Bruchzahl und damit auch nicht den Wert des Bruches.

Brüche

Vergleich von Brüchen

5

48

Von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige der größere, der den kleineren Nenner hat.

Beispiel: $\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$

Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige der größere, der den größeren Zähler hat.

Beispiel: $\frac{4}{7} < \frac{6}{7}$

Brüche mit verschiedenen Nennern bringt man vor dem Vergleichen normalerweise auf den Hauptnenner (= kgV aller Nenner).
Diesen Schritt nennt man auch „gleichnamig machen“.

$\frac{5}{12} > \frac{7}{18}$ da kgV(12;18) = 36 also

$\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$ und $\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$

Brüche

Brüche und Prozente

6

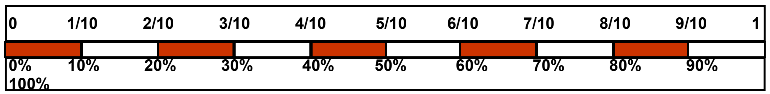
48

Brüche beziehen ihren Wert immer auf ein Ganzes bezogen, Prozente beziehen ihren Wert immer auf 100. Bei Prozentangaben wird immer 100 als 1 Ganzes angesehen. Brüche sind deshalb vor dem Umrechnen auf Prozent in einen Bruch umzuwandeln, bei dem der Nenner gleich 100 ist.

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\ \%$

$\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 35\ \%$

$\frac{48}{160} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\ \%$



Brüche

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

7

48

Regel:

- Es lassen sich nur Brüche Addieren und Subtrahieren, die den gleichen Nenner besitzen
- Zähler ist zu addieren (subtrahieren) und der gemeinsamen Nenner beibehalten.

$$\text{Bruch} \pm \text{Bruch} = \frac{\text{Zähler} \pm \text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Beispiel: $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{8}{11}$; $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$; $\frac{5}{13} - \frac{8}{13} = -\frac{3}{13}$

- Brüche mit verschiedenen Nennern erweitert man zuerst auf den Hauptnenner.

  Beispiel: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$

- Gemischte Zahlen sollten vor dem Berechnen in unechte Brüche verwandelt werden.

  $2\,\frac{7}{13} = \frac{33}{13}$

Brüche

Multiplizieren und Dividieren mit ganzen Zahlen

8

48

a) Multiplizieren

Ein Bruch wird mit einer Ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und den Nenner beibehält.

Beispiel: $7 \cdot \frac{9}{13} = \frac{7 \cdot 9}{13} = \frac{63}{13}$

b) Dividieren

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner mit dem Divisor multipliziert und den Zähler beibehält.

Beispiel:

$\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7 \cdot 3} = \frac{5}{21}$

Brüche

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

9

48

a) Multiplizieren

Beispiel:

$\frac{3}{4} \bullet \frac{14}{15} = \frac{1 \bullet 7}{4 \bullet 5} = \frac{7}{20}$

$$\text{Bruch} \cdot \text{Bruch} = \frac{\text{Zähler} \cdot \text{Zähler}}{\text{Nenner} \cdot \text{Nenner}}$$

(vorher kürzen!)

b) Dividieren

Um zwei Brüche zu dividieren muss man mit dem Kehrbruch multiplizieren.

$$\text{Bruch} : \text{Bruch} = \frac{\text{Zähler 1} \cdot \text{Nenner 2}}{\text{Nenner 1} \cdot \text{Zähler 2}}$$

Beispiel: $\frac{3}{14} : \frac{6}{7} = \frac{3}{14} \bullet \frac{7}{6} = \frac{3 \bullet 7}{14 \bullet 6} = \frac{1 \bullet 1}{2 \bullet 2} = \frac{1}{4}$

Bruchteil eines Bruches

Bei Anteilen bedeutet "von" so viel wie „ • " .

$\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{8}$ kg $= \frac{2}{5} \bullet \frac{3}{8}$ kg $= \frac{1 \bullet 3}{5 \bullet 4}$ kg

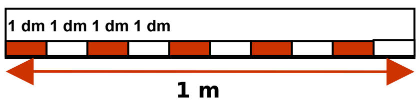
Längen– , Flächen– , Volumenmaße

Umrechnung Längenmaße

10

48

1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m
10 mm = 1 cm = 0,1 dm = 0,01 m
100 mm = 10 cm = 1 dm = 10 m
1000 mm = 100 cm = 10 dm = 1 m



1 km = 1000 m = 10 000 dm = 100 000 cm

Die Umrechnungszahl zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einheiten beträgt **10**.

Eine Ausnahme bildet der Abstand von m zu km, da für die Zwischenwerte keine Bezeichnungen existieren.

Beispiele: 1dm = 10 cm ; 1 dm = $\frac{1}{10}$ m

65cm = 65:10 dm = 6,5 dm

43256cm = 4325,6 •10cm = 4325,6 dm = 432,56 •10 m = 432,56 m

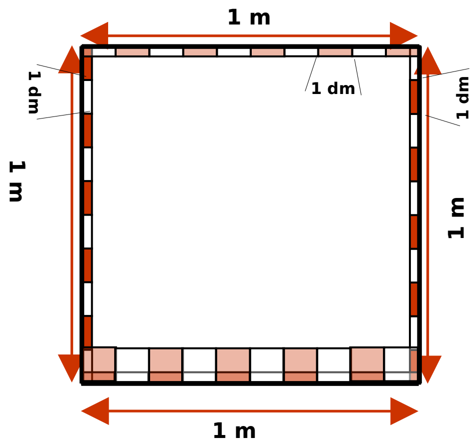
Längen– , Flächen– , Volumenmaße

Umrechnung Flächenmaße

11

48

hat ein Quadrat die Kantenlänge	so ist seine Fläche
1 mm	1 mm²
1 cm	1 cm² = 100 mm²
1 dm	1 dm² = 100 cm²
1 m	1 m² = 100 dm²
10 m	1 a = 100 m²
100 m	1 ha = 100 a
1 km	1 km² = 100 ha



Die Umrechnungszahl zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einheiten beträgt **100**.

Beispiele: $1dm^2 = 10 \bullet 10\ cm^2$; $1\ dm^2 = \frac{1}{100}\ m^2$

$65cm^2 = 65:100\ dm^2 = 0{,}65\ dm^2$

$43256cm^2 = 432{,}56 \bullet 100cm^2 = 432{,}56dm^2$

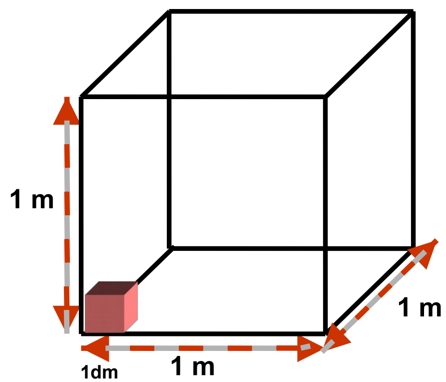
Längen– , Flächen– , Volumenmaße

Umrechnung Volumenmaße

12

48

hat ein Würfel die Kantenlänge	so ist sein Volumen
1 mm	1 mm³
1 cm	1 cm³ = 1000 mm³
1 dm	1 dm³ = 1000 cm³
1 m	1 m³ = 1000 dm³



Die Umrechnungszahl zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einheiten beträgt **1000**.

Beispiele: $1dm^3 = 10 \bullet 10 \bullet 10\ cm^3$; $1\ dm^3 = \frac{1}{1000}\ m^3$

$65cm^3 = 65:1000\ dm^3 = 0{,}065\ dm^3$

$43256cm^3 = 43{,}256 \bullet 1000cm^3 = 43{,}256dm^3$

Dezimalzahlen

Abkürzungen für Zehnerpotenzen

13

48

Zahlen wie z.B. 1,356 heißen Dezimalbrüche. Dabei bedeutet die 1. (2.,3.,...) Stelle hinter dem Komma Zehntel (Hundertstel, Tausendstel,....). Die Ziffern hinter dem Komma heißen Dezimalen.

Beispiel: $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$; $1{,}234 = 1\frac{234}{1000} = 1\frac{117}{500}$

In verschiedenen Bereichen der Technik haben sich für für bestimmte Zehnerpotenzen von einer Grundmaßeinheit feste Bezeichnungen eingebürgert, damit nicht große Zahlen nicht immer mit Nullen aufgefüllt werden müssen, oder bei kleinen zahlen zwischen dem Komma und der ersten gültigen Ziffer viele 0-en stehen.

Potenz	Vorsatz	Zeichen
10^{-9}	Nano	n
10^{-6}	Mikro	µ
10^{-3}	Milli	m
10^{-2}	Zenti	c
10^{-1}	Dezi	d
10^{1}	Deka	da
10^{2}	Hekto	h
10^{3}	Kilo	k
10^{6}	Mega	M
10^{9}	Giga	G

Dezimalzahlen

Vergleich von Dezimalzahlen

14

48

- alle negativen Dezimalzahlen sind kleiner als alle positiven Dezimalzahlen
- die 0 ist größer als alle negativen Dezimalzahlen und kleiner als alle positiven Dezimalzahlen.

Das erste entscheidende Merkmal ist die Kommaposition

- sind beide Zahlen positiv und die Zahlen vor dem Komma unterscheiden sich, dann ist die Zahl größer, deren ganze Zahl größer ist.
- sind beide Zahlen negativ und die Zahlen vor dem Komma unterscheiden sich, dann ist die Zahl größer, deren Betrag kleiner ist.

Sind die Vorzeichen gleich und die ganzzahligen Anteile sind auch gleich, dann sind die Ziffern nach dem Komma zu betrachten.

- sind beide Zahlen positiv, ist diejenige die größere Zahl, bei der als erstes an einer Position nach dem Komma die größere Ziffer steht.
- sind beide Zahlen negativ, ist diejenige die größere Zahl, bei der als erstes an einer Position die kleinere Ziffer steht.

Dezimalzahlen

Addition und Subtraktion

15

48

Addition (Subtraktion) der Stellen gleichen Wertes! Die beiden Zahlen sind so untereinander zu schreiben, dass die Kommata untereinander stehen und bei der kürzeren Zahl ist mit Nullen aufzufüllen.

```
   3,763
+  4,320
--------------
=  8,083
```

Beispiel: 3,76 + 4,325 = 8,085

Runden und Überschlagsrechnung

Ist die erste wegzulassende Ziffer 0 ,1, 2, 3, 4, so wird abgerundet, ist sie 5, 6, 7, 8, 9, so wird aufgerundet.

Beispiel: Runden auf:	1 Dez.	2 Dez.	3 Dez.
3,4564	≈3,5	≈3,46	≈3,456

Bei der Überschlagsrechnung rundet man auf ganze Zahlen, um die Größe des Ergebnisses in seinem Stellenwert (Zehnerpotenz) zu kennen.

Dezimalzahlen

Multiplikation und Division mit Zehnerpotenzen

16

48

Verschieben des Kommas um so viele Stellen nach rechts (links), wie die Stufenzahl Nullen hat.

Beispiele: $2{,}04 \cdot 1000 = 2040$; $14{,}73 : 100 = 0{,}1473$; $205{,}3 : 10^4 = 0{,}02053$

Multiplikation von Dezimalbrüchen

Die Kommas bleiben beim Multiplizieren zunächst unberücksichtigt.

```
1,86 • 0,54
     930
      744
-----------
   10044

=> 1,0044
```

Das Ergebnis erhält so viele Dezimalen, wie die Faktoren zusammen haben.

Beispiel: 1,86 • 0,54 = 1,0044

Dezimalzahlen

Division von Dezimalbrüchen

17

48

Division durch eine natürliche Zahl
Vor dem Herabholen der 1. Ziffer hinter dem Komma wird im Ergebnis das Komma gesetzt. Beispiel: 9,2 : 8 = 1,15

a) Division durch einen Dezimalbruch
Beim Dividenden und Divisor muss das Komma um so viele Stellen nach rechts verschoben werden, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist. *Beispiel: 2,56 : 1,6 = 25,6: 16 = 1,6*

Umwandeln von Brüchen in Dezimalzahlen

$\frac{z}{n}$ = z:n ergibt einen endlichen oder unendlichen periodischen Dezimalbruch. Die sich wiederholende Ziffernfolge heißt Periode.

Beispiel: $2{,}1\overline{343}$ = 2,13434343434...

Winkel und Kreis

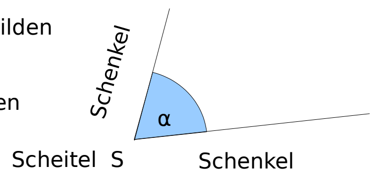
Bestandteile eines Winkels

18

48

Zwei Halbgeraden mit demselben Anfangspunkt bilden einen Winkel.

Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet:
α (alpha) ß (beta) γ (gamma)
δ (delta) ε (epsilon)



Messen eines Winkels

Um zwei Winkel zu vergleichen, hat man einen Kreis zugrunde gelegt und festgelegt, dass ein ganzer Kreis aus 360 Einheiten besteht, die man als „Grad“ bezeichnet.
Ein ganzer Kreis besteht also aus 3600 und wenn man einen Winkel auf einen solchen Kreis legt, mit dem Scheitel des Winkels im Mittelpunkt des Kreises, dann kann man die Gradzahl des Winkels bestimmen.

Dazu wurde der Winkelmesser geschaffen.

Winkel und Kreis

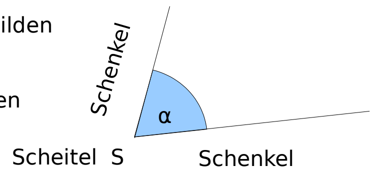
Winkelarten

19

48

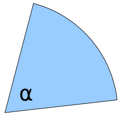
Zwei Halbgeraden mit demselben Anfangspunkt bilden einen Winkel.

Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet:
α (alpha) ß (beta) γ (gamma)
δ (delta) ε (epsilon)

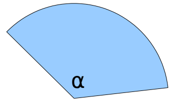


Winkelarten:

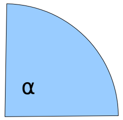
spitzer Winkel
$0^0 < \alpha < 90^0$



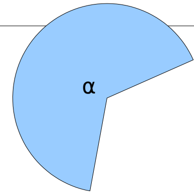
stumpfer Winkel
$90^0 < \alpha < 180^0$



rechter Winkel
$\alpha = 90^0$



überstumpfer Winkel
$180^0 < \alpha < 360^0$

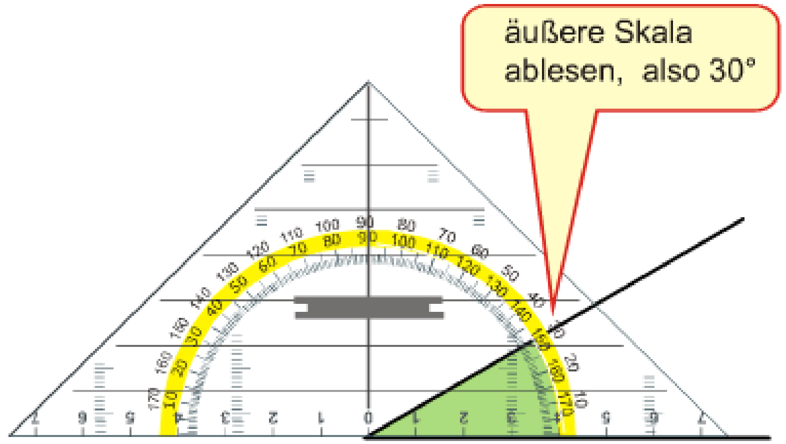


Winkel und Kreis

Spitze Winkel

20

48

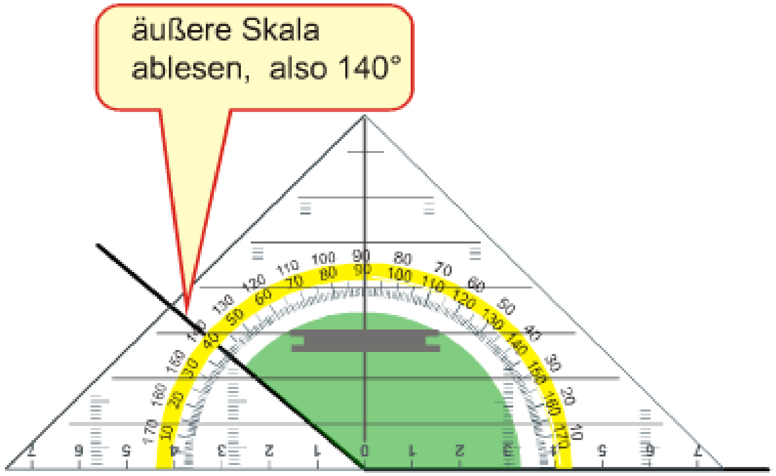


Winkel und Kreis

21

48

Stumpfe Winkel



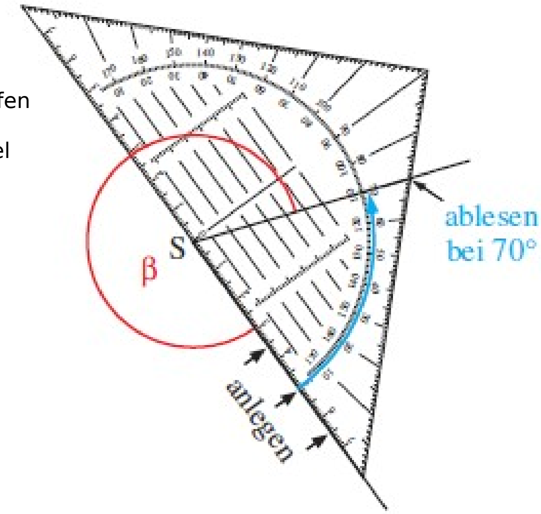
Winkel und Kreis

23

48

Überstumpfe Winkel

Man misst den Winkel der dem überstumpfen Winkel bis zum Vollwinkel noch fehlt.
Der Differenzwinkel ist dann vom Vollwinkel rückwärts anzutragen.



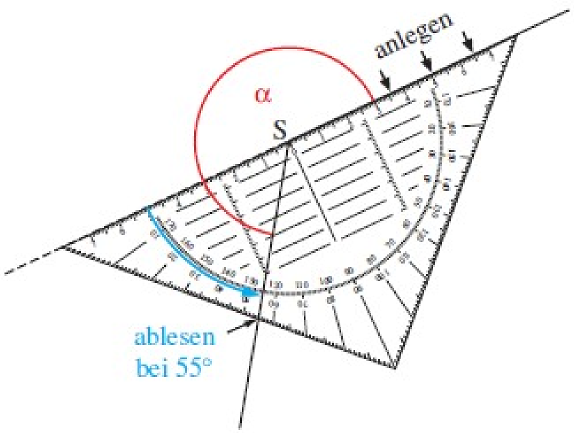
Winkel und Kreis

22

48

Überstumpfe Winkel

Man zerlegt den Winkel in einen Winkel von 1800 und einen Winkel, der kleiner als 1800 ist.
Es ist dann der Differenzwinkel zwischen dem gegebenen und 1800 zu zeichnen



Winkel und Kreis

24

48

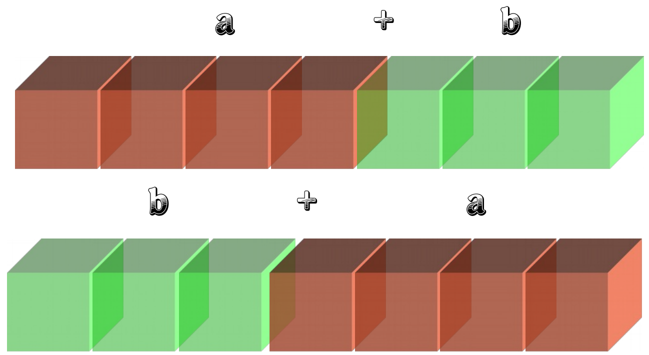
Fläche und Umfang

Rechenregeln

Kommutativgesetz der Addition

25
48

a+b = b+a



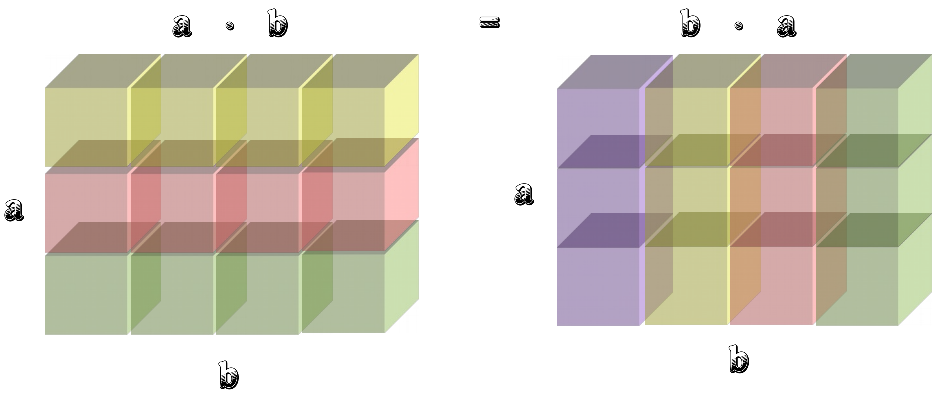
Die Addition zweier Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge.
Das gilt nicht für die Subtraktion

Rechenregeln

Kommutativgesetz der Multiplikation

26
48

a•b = b•a



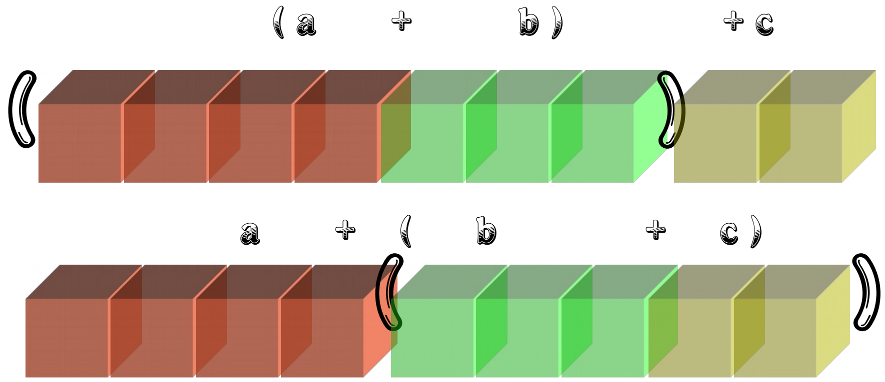
Die Multiplikation zweier Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge.
Das gilt nicht für die Division

Rechenregeln

Assoziativgesetz der Addition

27
48

(a+b)+c = a+(b+c)



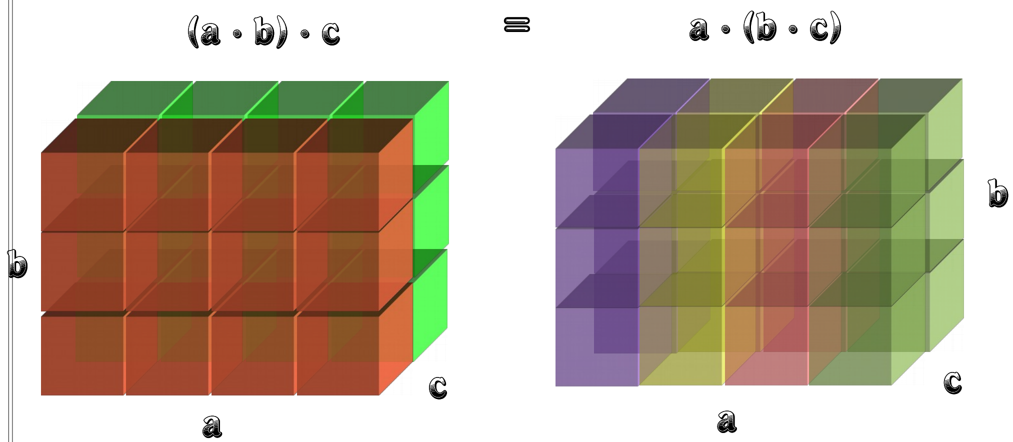
Die Addition dreier Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge (= Klammersetzung).
Deshalb können Klammern weggelassen werden. Das gilt nicht für die Subtraktion

Rechenregeln

Assoziativgesetz der Multiplikation

28
48

(a•b)•c = a•(b•c)



Die Multiplikation dreier Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge (= Klammersetzung).
Deshalb können Klammern weggelassen werden. Das gilt nicht für die Division.

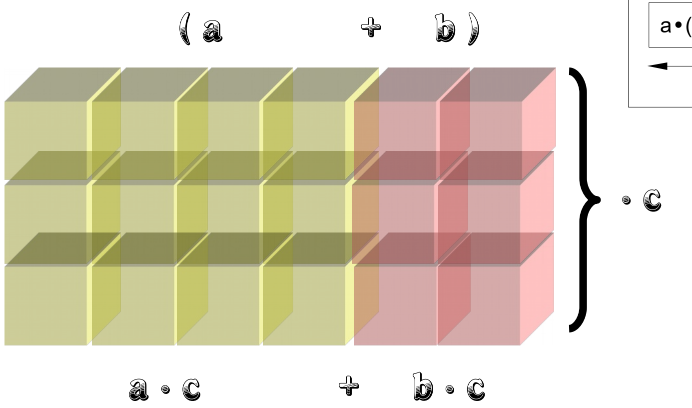
Rechenregeln — 29 / 48

Distributivgesetz

Ausmultiplizieren →

a•(b+c) = a•b + a•c

← Ausklammern



Wenn eine Summe mit einem Faktor multipliziert werden, dann kann man **jeden** einzelnen Summanden mit dem Faktor multiplizieren

Termumformungen — 30 / 48

Auflösen von Klammern

Das Rechenzeichen vor einer Klammer wird als Vorzeichen des Faktors vor der Klammer angesehen, ist kein Faktor vorhanden ist als Faktor '1' zu setzen.
Das Auflösen von Klammern ist eine Anwendung des Distributivgesetzes !

Die Faktoren vor der Klammer sind **mit allen Elementen in der Klammer** zu multiplizieren

+ 7 (3a + 4b) = 21a + 28b
– 3 (2x – 5y) = – 6x + 15y
+ (–3m + 2q) = + 1 (–3m + 2q) = – 3m + 2q
– (– 4p – 3r) = – 1 (– 4p – 3r) = 4p + 3r

Auflösen von Plusklammern

Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, kann die Klammer einfach weggelassen werden, ohne, dass sich an den Rechenzeichen in der Klammer etwas ändert.
Die Vorzeichen in der Klammer bleiben erhalten

a + (b + c - d) = a + b + c - d

7 + 3•(4 –7) = 7 + 3•4 – 3•7
a + (d – c + b) = a + 1•d – 1•c + 1•b = a + d – c + b

Termumformungen — 31 / 48

Auflösen von Minusklammern

Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, kann die Klammer weggelassen werden und **alle** Rechenzeichen in der Klammer müssen geändert werden.
Dabei sind die Vorzeichenregeln der Multiplikation berücksichtigt werden.

Steht bei der ersten Zahl in der Klammer kein Vorzeichen, dann ist ein '+' gemeint.

+ • + = +
+ • – = –
– • + = –
– • – = +

a – (b + c – d) = a – b – c + d

7 – 3•(4 –7) = 7 – 3•4 + 3•7
a – (d – c + b) = a – 1•d + 1•c – 1•b = a – d + c – b

a – (–m + n – q) = am – an + aq

Termumformungen — 32 / 48

Geschachtelte Klammern

Es können auch mehre Klammern ineinander geschachtelt sein. Manchmal werden verschiedene Klammern benutzt, runde ( ), eckige [ ] oder geschweifte { } Klammern. das ist aber nicht unbedingt notwendig. Deshalb müssen als erstes die jeweils zusammengehörigen Klammern – Klammer auf – und – Klammer zu – ausfindig gemacht werden.
das Auflösen geschachtelter Klammern folgt von Innen nach Außen.

a – (b + (c – (d + e)))
= a – (b + (c + d – e))
= a – (b + c + d – e)
= a – b – c – d + e

7 – { [(26x + 37y – 25z) + 19y – 16a] – 8x + 9z + 6}
7 – { [26x + 37y – 25z + 19y – 16a] – 8x + 9z + 6}
7 – { 26x + 37y – 25z + 19y – 16a – 8x + 9z + 6}
7 – 26x – 37y + 25z – 19y +16a + 8x – 9z – 6
16a – 18x – 56y + 16z + 1

Termumformungen

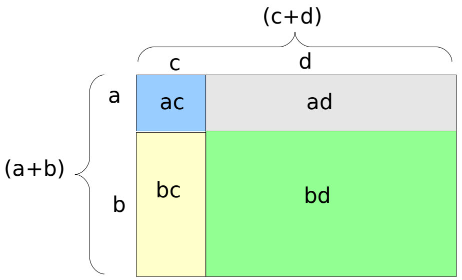
Multiplizieren von Klammern mit Summen

33

48

Werden zwei Klammern mit Summen multipliziert, so ist jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer zu multiplizieren.

$$\boxed{\mathbf{(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd}}$$



	a	b
c	ac	bc
d	ad	bd

= ac + ad + bc + bd

Termumformungen

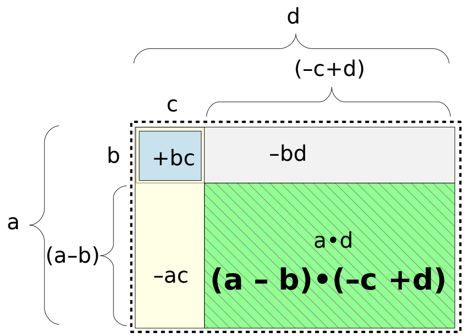
Multiplizieren von Klammern mit Differenzen

34

48

Werden zwei Klammern mit Differenzen multipliziert, so ist jedes Element der ersten Klammer mit jedem Element der zweiten Klammer zu multiplizieren.

$$\boxed{\mathbf{(a + b) \cdot (-c + d) = a \cdot (-c + d) + b \cdot (-c + d) = -ac + ad - bc + bd}}$$



Das Flächenstück bc wird mit den Flächen bd und ac zweimal subtrahiert, deshalb muss es einmal wieder dazu addiert werden.

	a	b
-c	-ac	-bc
d	ad	bd

= -ac + ad – bc + bd

Termumformungen

Multiplikation mehrere Klammern

35

48

Sollen zwei Klammern miteinander multipliziert werden, dann wird zunächst eine Klammer als **ein Faktor** angesehen. Dann kann mit den Regeln des Ausmultiplizieren einer Klammer mit einem Faktor gearbeitet werden.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{(a + b)\ (c - d)} \\ &\mathbf{= a\ (c - d) + b\ (c - d)} \\ &\mathbf{= \ ac - ad + bc - bd} \end{aligned}}$$

$3\,[\,7(8a + 2b) + 5\,(4b - 9)\,] - 2\ \ (a - 3)\,(b + 1)$

$3\,[\,7(8a + 2b) + 5\,(4b - 9)\,] - 2\ \ \big[a\,(b + 1) - 3\,(b + 1)\big]$

Aus einem Produkt wird hier eine Summe, deshalb müssen unbedingt Klammern gesetzt werden.

$3\,[\,56a + 14b + 20b - 45\,]\ \ - 2\ \ [ab + a - 3b - 3\,]$

$3\,[\,56a + 34b - 45\,]\ \ - 2\ \ [ab + a - 3b - 3\,]$

$168a + 102b - 135\ \ - 2ab - 2a + 6b + 6$

$166a + 108b - 2ab - 129$

Termumformungen

Ausklammern gemeinsamer Faktoren

36

48

Ausklammern ist die entgegengesetzte Operation zum Ausmultiplizieren von Klammern. Hier geht es darum, dass Faktoren, **die in allen Summenden** vorhanden sind, nur einmal geschrieben werden.
Treten in einer Summe bei mehreren Summanden die gleichen Faktoren auf, so kann man diese als Umkehrung des Distributivgesetzes vor die Klammer Schreiben, dafür ist jeder einzelne Summand durch den Ausgeklammerten Faktor zu Dividieren.

$15 + 27 - 9 + 21 = \ 3\bullet 5 + 3\bullet 9 - 3\bullet 3 + 3\bullet 7$

$3\bullet(\,5 + 9 - 3 + 7)$

$12 - 20 + 32 - 44 = \ (-4)\bullet(-3) + (-4)\bullet 5 - (-4)\bullet 8 + (-4)\bullet 11)$

$-4\bullet(\ -3 + 5 - 8 + 11\ )$

$35 - 20 + 18 + 33 = \ 5\bullet 7 - 5\bullet 4 + 3\bullet 9 - 3\bullet 11$

$5\bullet(7 - 4) + 3\bullet(9 - 11)$

$6a^3b^2 - 9ab^2 - 12ab = 3ab\bullet(2a^2b - 3b - 4)$

$\frac{4}{3} + \frac{5}{6} + \frac{7}{9} = \frac{1}{3}\bullet(\,4 + \frac{1}{2} + \frac{7}{3}\,)$

Termumformungen

Äquivalente Umformungen

Beim Umformen von Gleichungen sind nur Umformungen erlaubt, die die Lösung der Gleichung nicht verändern. Solche Umformungen heißen **äquivalente Umformungen**.

> Beim Umformen von Gleichungen sind alle Veränderungen auf beiden Seiten der Gleichung gleich auszuführen.

Als äquivalente Umformungen sind erlaubt:

$T_1 + S = T_2 + S$ → Addition von S auf beiden Seiten

$T_1 - S = T_2 - S$ → Subtraktion von S auf beiden Seiten

$F \cdot T_1 = F \cdot T_2$ → Multiplikation mit F auf beiden Seiten

$\frac{T_1}{D} = \frac{T_2}{D}$ → Division durch D auf beiden Seiten

$(T_1)^E = (T_2)^E$ → Potenzieren mit E auf beiden Seiten

$\sqrt[n]{T_1} = \sqrt[n]{T_2}$ → n - te Wurzel ziehen auf beiden Seiten

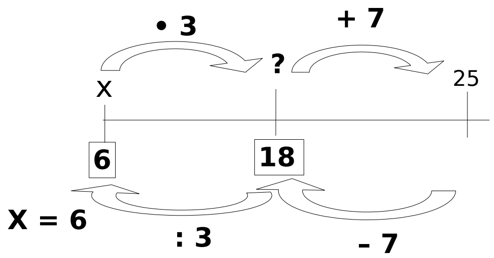
Verändert eventuell die Lösungsmenge, unbedingt Probe machen!

Gleichungen

Gleichung oder Term

Gleichungen bestehen aus einem Gleichheitszeichen und jeweils einen Term auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Diese Terme bestehen aus mindestens einer Variablen, oft mit x bezeichnet, und Zahlen ohne Variable. Ziel einer Gleichung ist es, das x so zu bestimmen, dass das Gleichheitszeichen erfüllt ist. Dazu sind alle Ausdrücke, die die Variable enthalten auf eine Seite des Gleichheitszeichens zu bringen und alle Ausdrücke, die keine Variable enthalten auf die andere Seite. Dazu benutzt man die Umkehroperation der angegebenen Rechenoperation

3x + 7 = 25 | - 7
3x = 18 | : 3
x = 6



Gleichungen

Erster Schritt

Als erstes werden die Ausdrücke auf jeder Seite der Gleichung zusammengefasst.

- Klammern ausmultipliziert
- Gleichartige Terme zusammengefasst

$5\cdot(x-2) = 7 + 3$ | Ausmultiplizieren bzw. Ausrechnen
$5x - 10 = 10$

$4(y-5) - 2y + 8 = 5(-3y+1)$ | Ausmultiplizieren auf beiden Seiten
$4y - 20 - 2y + 8 = -15y + 5$ | Zusammenfassen von Zahlen und Variablen (Umsortieren, Anwendung des Kommutativgesetzes)
$4y - 2y - 20 + 8 = -15y + 5$ | Ausrechnen
$2y - 12 = -15y + 5$

Gleichungen

Zweiter Schritt

Die nächsten Schritte bestehen darin, die Gleichung so umzuformen, daß auf einer Seite nur noch die Variable (x oder y) steht, auf der anderen nur noch eine Zahl.
Hierzu werden alle Elemente gleichen Typs (Konstante oder Variable) auf je eine Seite der Gleichung gebracht, indem man auf beiden Seiten der Gleichung das entgegengesetzte Operationszeichen angewandt: hat die Zahl ein positives Vorzeichen, ist auf beiden Seiten zu subtrahieren, hat der Ausdruck ein negatives Vorzeichen ist auf beiden Seiten zu addieren.

- Alle Variablen auf einer Gleichungsseite zusammenführen
- Alle Konstanten ohne Variable auf der anderen Seite zusammenfassen.

$5x - 10 = 10$ | Addieren von 10
$5x - 10 + 10 = 10 + 10$ | Zusammenfassen
$5x = 20$

$2y - 12 = -15y + 5$ | + 12
$2y = -15y + 17$ | + 15y nicht – 2y, da dann die Variablen und die Konstanten auf die gleiche Seite kommen

Gleichungen

Dritter Schritt

Die Gleichung besitzt jetzt eine Trennung zwischen Variabler und Konstanten. Durch Zusammenfassung sollte auf jeder Seite nur noch ein Ausdruck stehen. Jetzt stört nur noch ein Faktor, der vor der Variablen steht, denn die Lösung einer Gleichung ist immer die **Lösung für 1 Unbekannte**. Um den Wert für eine Einheit der Variablen zu erhalten muss noch durch den Faktor vor der Variablen **dividiert** werden. Hier gibt es kein Addieren oder Subtrahieren !

$$5x = 20 \quad | :5$$
$$x = 20 : 5$$
$$x = 4$$

$$\cancel{5x = 20 \quad | -20}$$
$$\cancel{5x - 20 = 0}$$

$$\tfrac{1}{3}x = 5 \quad | \cdot 3$$
$$x = 5 \cdot 3$$
$$x = 15$$

Daten

Relative Häufigkeit

Direkte Proportionalität

Formel

Eine Zuordnung heißt proportional, wenn dem Zweifachen, Dreifachen oder auch Dreieinhalb-fachen der Eingabegrößen das Zweifache, Dreifache oder auch Dreieinhalb-fache der Ausgabegröße zugeordnet wird.

Sind Zuordnungen proportional, dann gilt z.B.:
- Zur doppelten Warenmenge gehört der doppelte Preis.
- Zur dreifachen Warenmenge gehört der dreifache Preis.
- Zur halben Warenmenge gehört der halbe Preis.

$$m \cdot x \longrightarrow y$$

Vereinfacht gilt also:
- Je mehr desto mehr
- Je weniger desto weniger.

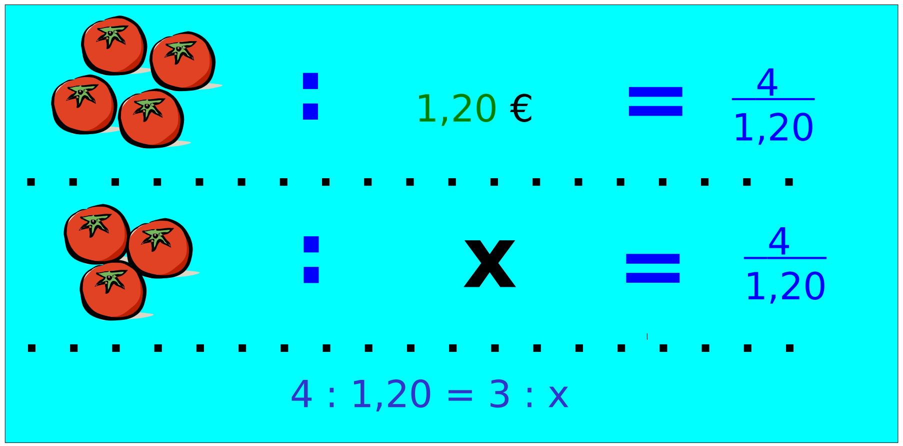
Quotientengleichheit
Proportionale Zahlenpaare sind zudem immer quotientengleich. Dies bedeutet: Dividiert man die Zahlen eines Wertepaares durch einander, so erhält man bei allen Paaren das selbe Ergebnis! Daraus folgt: Kennt man bei einer proportionalen Zuordnung ein einziges Wertepaar, kann man alle anderen Paare berechnen.

$$\frac{y}{x} = m$$

Direkte Proportionalität

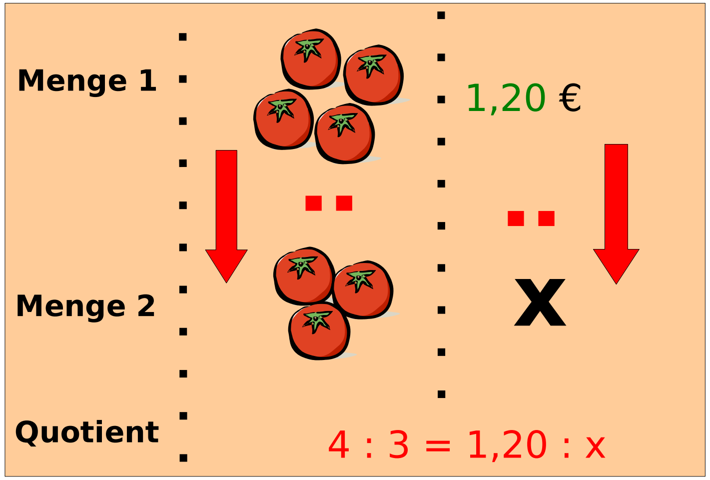
Dreisatz – Quotientengleichheit

Mengeneinheit 1 **Mengeneinheit 2** **Quotient**



Mengeneinheit 1 : Mengeneinheit 2 = konstant

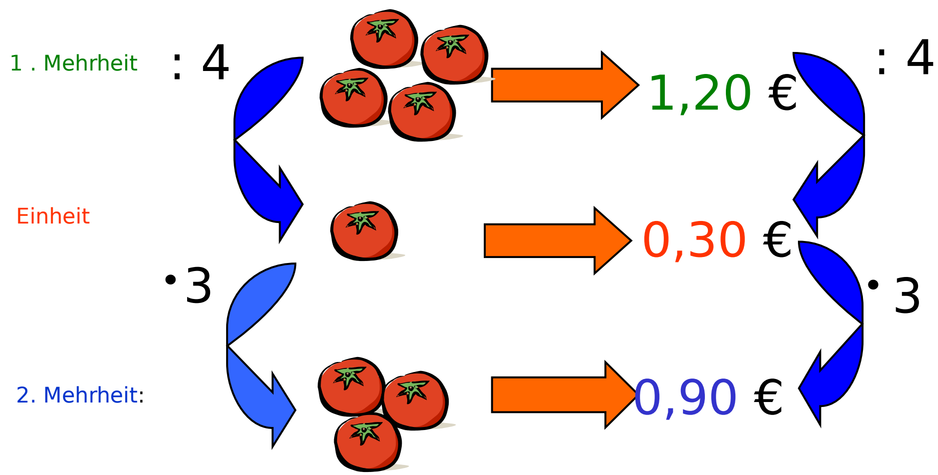
Dreisatz – Gleiches Verhältnis



$$\frac{\text{Mengeneinheit 1}}{\text{Menge 1 : Menge 2}} = \frac{\text{Mengeneinheit 2}}{\text{Menge 1 : Menge 2}}$$

Dreisatz

Von der Mehrheit zur Einheit zur anderen Mehrheit:

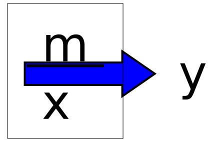


Auf der linken und rechten Seite mit den **gleichen** Rechenoperationen.

Formel

Eine Zuordnung heißt indirekt, wenn dem Halben, Drittel der Eingabegröße das Zweifache, Dreifache der Ausgabegröße zugeordnet wird.

Sind Zuordnungen antiproportional, dann gilt z.B.:
- Zur doppelten Geschwindigkeit gehört die Hälfte der Zeit.
- Zur dreifachen Geschwindigkeit gehört ein Drittel der Zeit.
- Zur halben Geschwindigkeit gehört die doppelte Zeit.



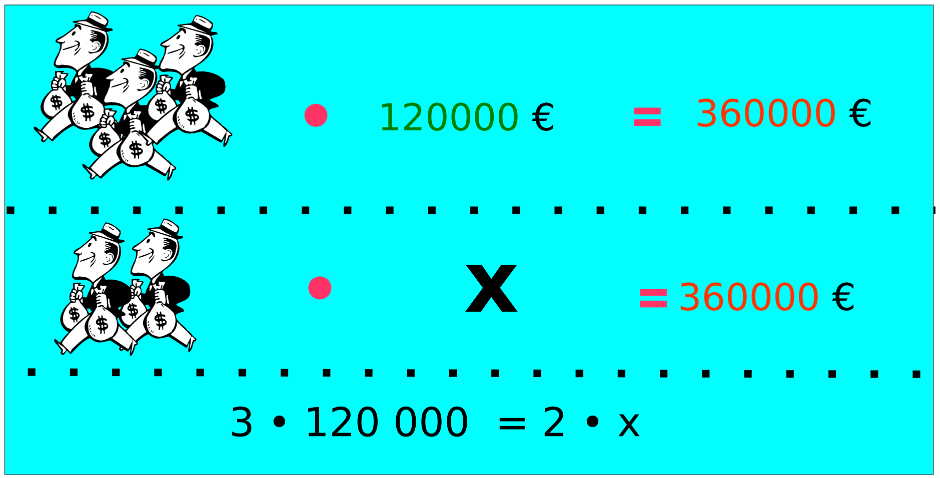
Vereinfacht gilt also:
- Je mehr desto weniger
- Je weniger desto mehr.

Produktgleichheit
Antiproportionale Zahlenpaare sind zudem immer produktgleich. Dies bedeutet: Multipliziert man die Zahlen eines Wertepaares miteinander, so erhält man bei allen Paaren das selbe Ergebnis!
Daraus folgt: Kennt man bei einer antiproportionalen Zuordnung ein einziges Wertepaar, kann man alle anderen Paare berechnen.

$$\boxed{x \cdot y = m}$$

Dreisatz – Produktgleichheit

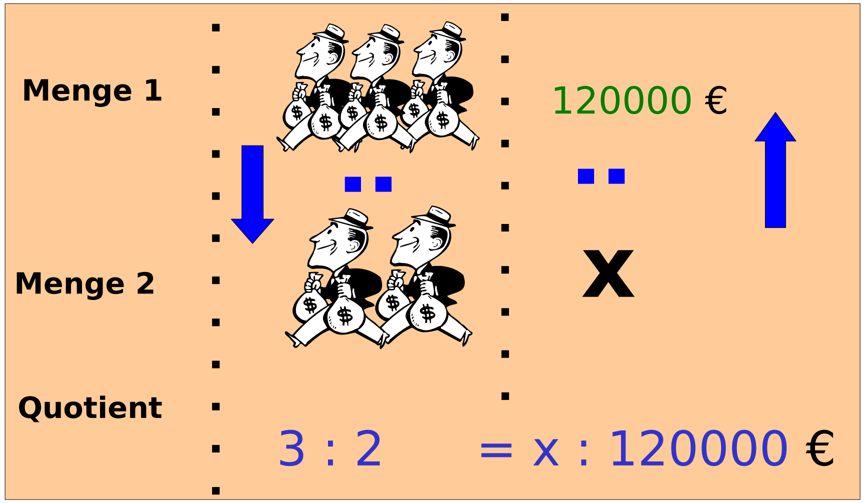
Mengeneinheit 1 **Mengeneinheit 2** **Produkt**



Mengeneinheit 1 • Mengeneinheit 2 = konstant

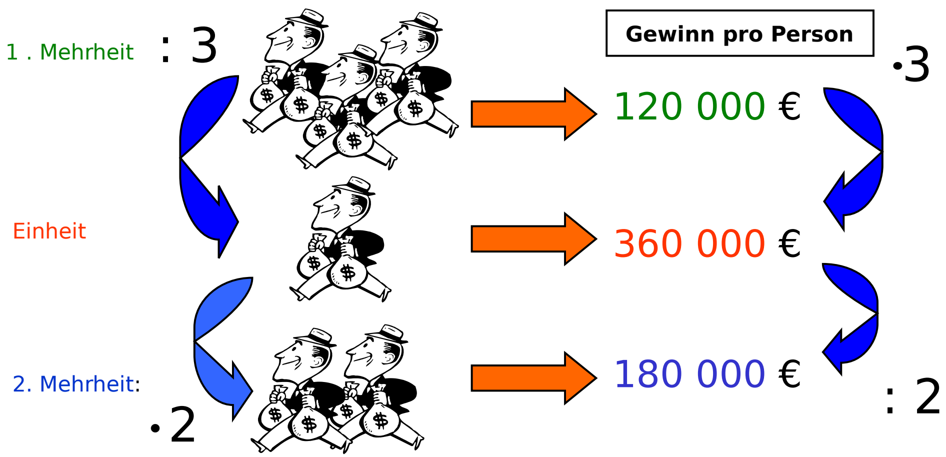
Indirekte Proportionalität

Dreisatz – Umgekehrtes Verhältnis



Mengeneinheit 1 Mengeneinheit 2
Menge 1 : Menge 2 = Menge 2 : Menge 1

Von der Mehrheit zur Einheit zur anderen Mehrheit:



Auf der rechten Seite mit **entgegengesetzter** Rechenoperation wie auf der linken Seite