Natürliche Zahlen

Grundbegriffe

ℕ Menge der natürlichen Zahlen {1, 2, 3,...}
$\mathbb{N}_0$ Menge der natürlichen Zahlen mit Null {0, 1, 2, ...}

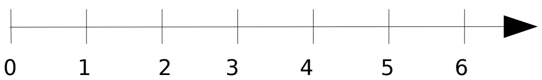
Zahlen werden in einem Stellenwertsystem mit Hilfe von Ziffern dargestellt.
Beispiel.: 235 = $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$ (Dezimalsystem)
Zahlenwörter für große Zahlen:
Tausender Millionen Milliarden Billionen Billiarden Trillionen.

Dezimalsystem

Natürliche Zahlen

Zahlenstrahl

Auf dem Zahlenstrahl lassen sich die natürlichen Zahlen der Größe nach anordnen. Die weiter rechts liegende Zahl ist die größere.



Natürliche Zahlen

Grundrechenarten

Unter den **vier Grundrechenarten** versteht man die **Addition** und die **Subtraktion** sowie die **Multiplikation** und die **Division**. Es gelten folgende Bezeichnungen:

Addition

1. Summand 2. Summand Summe

$$2 + 7 = 9$$

Subtraktion

Minuend Subtrahend Differenz

$$7 - 3 = 4$$

Multiplikation

1. Faktor 2. Faktor Produkt

$$3 * 5 = 15$$

Division

Dividend Divisor Quotient

$$8 : 4 = 2$$

Natürliche Zahlen

Rechengesetze

Assoziativgesetz der Addition:

Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt:

$(a + b) + c = a + (b + c)$

Bsp.: $[(-3)+6]+5 = (-3)+[6+5]$

Assoziativgesetz der Multiplikation:

Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Bsp.: $[(-3)\cdot 2]\cdot 5 = (-3)\cdot[2\cdot 5]$

Kommutativgesetz der Addition:

Für alle ganzen Zahlen a und b gilt:

$a + b = b + a$

Bsp.: $3 + (-6) = (-6) + 3$

Kommutativgesetz der Multiplikation:

Für alle ganzen Zahlen a und b gilt:

$a \cdot b = b \cdot a$

Bsp.: $(-6)\cdot 3 = 3\cdot(-6)$

Distributivgesetz:

Für alle ganzen Zahlen a, b und c gilt:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ oder $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$

Bsp.: $16\cdot 7 + 16\cdot 3 = 16\cdot(7 + 3) = 16\cdot 10 = 160$ Vorteilhaft rechnen !

Natürliche Zahlen

Teilbarkeitsregeln

5

32

Quersummenregel: Eine Zahl ist durch 3 (9) teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 (9) teilbar ist.

Endstellenregeln:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie auf 0, 2, 4, 6, oder 8 endet.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie auf 0 oder 5 endet.

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn sie auf 0 endet.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind

Natürliche Zahlen

Dezimalsystem

7

32

Wir rechnen im Dezimalsystem.

Dabei benutzen wir die zehn Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

und die Stufenzahlen

1, 10, 100, 1000, 10 000, 100000, 1000 000, …

$10963 = 1 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

Der Stellenwert der Ziffer 6 ist 10.

Der Stellenwert der Ziffer 9 ist 100.

Große Stufenzahlen lassen sich kürzer mit Zehnerpotenzen schreiben.

1 Million = 1 000 000 = 10^6

1 Milliarde = 1 000 000 000 = 10^9

1 Billion = 1 000 000 000 000 = 10^{12}

Natürliche Zahlen

Primzahlen

6

32

Eine Zahl, die genau zwei verschiedene Teiler hat, heißt **Primzahl**.

Jede Primzahl ist also nur durch 1 und sich selbst teilbar!

Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …

Primfaktordarstellung:

Jede Zahl lässt sich **eindeutig** in ein Produkt von Primzahlen zerlegen.

Beispiel: $20 = 2^2 \cdot 5$

Ganze Zahlen

Addition ganzer Zahlen

8

32

Haben die beiden Summanden **gleiche Vorzeichen**:

1. Addiere ihre Beträge.
2. Gib dem Ergebnis das gemeinsame Vorzeichen.

Beispiele:

$(+17) + (+29) = +46$

$(-17) + (-29) = -46$

Haben die beiden Summanden **verschiedene Vorzeichen:**

1. Subtrahiere vom größeren Betrag den kleineren Betrag.
2. Gib dem Ergebnis das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.

Beispiele:

$(+67) + (-56) = +11$

$(-67) + (+56) = -11$

Natürliche Zahlen
Potenzen
9
32

Produkte mit lauter gleichen Faktoren lassen sich als Potenz schreiben:

Basis, Exponent

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{Anzahl = Exponent}} = \underbrace{3^{4}}_{\textbf{Potenz}}$$

Potenzen mit Basis 10 liefern **Stufenzahlen**:

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1\,000$
$10^4 = 10\,000$

Potenzen mit Exponent 2 liefern **Quadratzahlen**:

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$
$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$
$16^2 = 256$	$17^2 = 289$	$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	$20^2 = 400$

Natürliche Zahlen
Grundrechenarten und Potenzen
10
32

Grundregeln
- Klammern haben absoluten Vorrang. Löse sie von innen nach außen auf!
- Rechne Potenzen vor Punkt vor Strich!
- Sind Rechenarten gleichberechtigt, so muss von links nach rechts gerechnet werden!

Beispiele

$(-15) : (17 - 12) - 5^2 = (-15) : 5 - 25 = -3 - 25 = -28$

$[(5-7) \cdot (-8) - (-5)]^3 = [(-2) \cdot (-8) + 5]^3 = [16+5]^3 = 21^3 = 9261$

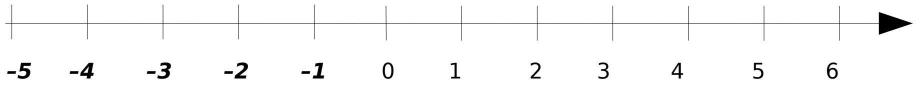
$20 - 5 \cdot 8^2 = 20 - 5 \cdot 64 = 20 - 320 = -300$

$(20 - 8 \cdot 5)^2 = (20 - 40)^2 = (-20)^2 = 400$

$5 - 20^2 \cdot 8 = 5 - 400 \cdot 8 = 5 - 3200 = -3195$

Ganze Zahlen
Negative Zahlen
11
32

Bei der Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden kommen die negativen Zahlen hinzu.



– a heißt **Gegenzahl** von a.
Zahl und Gegenzahl haben vom Nullpunkt den gleichen Abstand; sie haben den gleichen **Betrag**.
Beispiel: $|-5| = |+5| = 5$

Die bisherigen natürlichen Zahlen und die die negativen Zahlen bilden zusammen mit der Zahl 0 die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Ganze Zahlen
Subtraktion ganzer Zahlen
12
32

Eine ganze Zahl wird subtrahiert, indem man ihre Gegenzahl addiert.

Beispiel:
$(+15) - (-8) = (+15) + (+8) = 23$

Vereinfachung der Schreibweise bei Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

Zwei aufeinander folgende gleiche Zeichen können durch ein + ersetzt werden.

Beispiel:
$(-12) + (+13) = -12+13 = 1$
$(-12) - (-13) = -12+13 = 1$

Zwei aufeinander folgende verschiedene Zeichen können durch ein – ersetzt werden.

Beispiel:
$(+12) - (+13) = 12 - 13 = -1$
$(-12) + (-13) = -12 - 13 = -25$

Ganze Zahlen

Multiplikation und Division

13

32

Zwei ganze Zahlen werden multipliziert / dividiert, indem man ihre Beträge multipliziert / dividiert und dem Ergebnis als Vorzeichen ein

+ gibt, wenn beiden Zahlen gleiche Vorzeichen haben,

– gibt, wenn beiden Zahlen verschiedene Vorzeichen haben.

Beispiele:

3 • 2 = +6 = 6
(-3) • 2 = – 6
3 • (-2) = – 6
(-3) • (-2) = +6 = 6

24 : 3 = +8 = 8
(-24) : 3 = –8
24 : (-3) = –8
(-24) : (-3) = +8 = 8

* / :	+	–
+	**+**	**–**
–	**–**	**+**

Maßeinheiten

Länge – Maß – Geld – Zeit

14

32

Geld: 1 € = 100 ct
Umrechnungszahl: 100

3 € 1 ct = 301 ct = 3,01 €
2 € 95 ct – 1 € 7 ct = 295 ct – 107 ct = 188 ct = 1,88 €

Länge: 1 km = 1000 m   1 m = 10 dm
1 dm = 10 cm   1 cm = 10 cm
Umrechnungszahl: 10

1,037 km = 1037 m = 10370 dm

Masse: 1 t = 1000 kg   1 kg = 1000 g
1 g = 1000 mg
Umrechungszahl: 1000

1060000 g = 1060 kg = 1,06 t

Zeit: 1 d = 24 h   1 h = 60 min
1 min = 60 s

1 h 45 min = 105 min = 6300 s

- Will man Größen addieren bzw. subtrahieren, so muss man sie vorher in die gleiche Maßeinheit umrechnen.

55 cm + 1,20 **m** = 55 cm + 120 **cm** = 175 cm
4,250 **kg** – 200 g = 4250 **g** – 200 g = 4050 g

Maßeinheiten

Maßzahl und Maßeinheit

15

32

- Eine Größe wird mit einer Zahl multipliziert (durch eine Zahl dividiert), indem man die Maßzahl mit der Zahl multipliziert (durch die Zahl dividiert) und die Maßeinheit beibehält.
  15 kg × 3 = 45 kg
  12 h: 3 = 4 h
- Der Quotient zweier Größen gleicher Art ist eine Zahl. Sie gibt an, wie oft die kleinere Größe in der größeren enthalten ist.
  120 € : 5€ = 24

Maßeinheiten

Flächeneinheiten

16

32

1 km2 = 100 ha (Hektar)   1 ha = 100 a (Ar)   1 a = 100 m^2

1 m2 = 100 dm^2 1 dm^2 = 100 cm^2 1 cm^2 = 100 mm^2

Umrechnungszahl: 100

Beispiele:

1 km^2 45 ha 17 a 11 m^2 = 1451711 m^2 = 145171100 dm^2

7ha 11 a 5 m^2 = 711**0**5 m^2 **Null beachten!**

27 ha 81 a 29 m^2 + 88a 88 m^2 = 27 ha 169 a 117 m^2 = 28 ha 70 a 17 m^2

1 ha 56 a 55 m^2 : 1 a 1 m^2 = 15655 m^2 : 101 m^2 = 155

Maßeinheiten
Maßstab
17

32

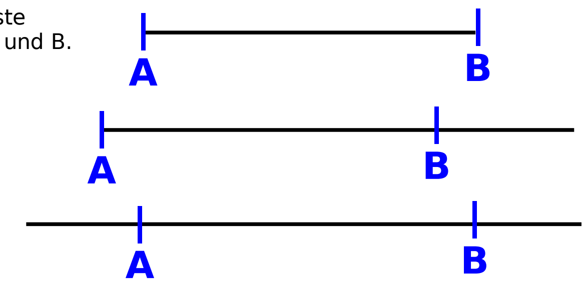
Ist ein Modell oder eine Landkarte im Maßstab € 1:3000000 (lies: „1 zu 3000000“) abge– bildet, so entspricht 1cm im Modell oder auf der Landkarte in Wirklichkeit € 3000000cm.
Bsp. 1:
Die Entfernung auf einer Landkarte zwischen zwei Städten beträgt bei einem Maßstab von 1:3000000 4 cm.
In Wirklichkeit beträgt die Entfernung 3 000 000· 4cm =12 000 000cm = 120km.

Bsp. 2:
Ein Kirchturm ist 15 m hoch.
Ein Modell im Maßstab 1:100 ist 15m:100 = 1500cm : 100 = 15cm hoch.

Geometrische Grundbegriffe
Strecke – Halbgerade – Gerade
18

32

- Die Strecke [AB] ist die kürzeste Verbindung der beiden Punkte A und B.
- Halbgerade [AB
- Gerade AB



Geometrische Grundbegriffe
Parallele und senkrechte Geraden
19

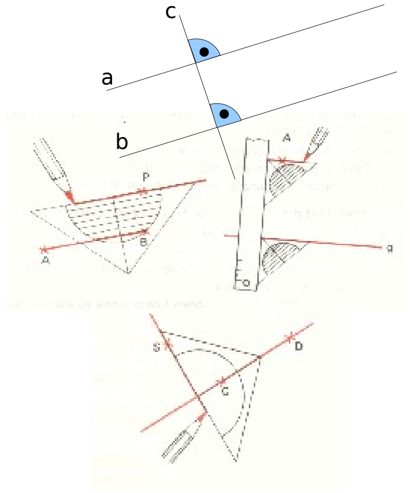
32

Die Geraden a und b sind zueinander **parallel**.
Kurz: a | | b

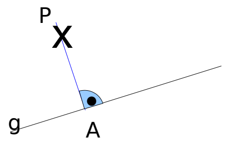
Zeichnen der Parallelen durch P zu [AB]:
Rechts: Zeichnen der Parallelen zu g durch einen weit entfernten Punkt A

Die Geraden a und b sind jeweils **senkrecht** zur Geraden c.
Kurz: a ⊥ c und b ⊥ c

Zeichnen der Lotgerade durch S zu CD:



Der **Abstand** des Punktes P von der Geraden g ist die kürzeste Entfernung des Punktes P von g.



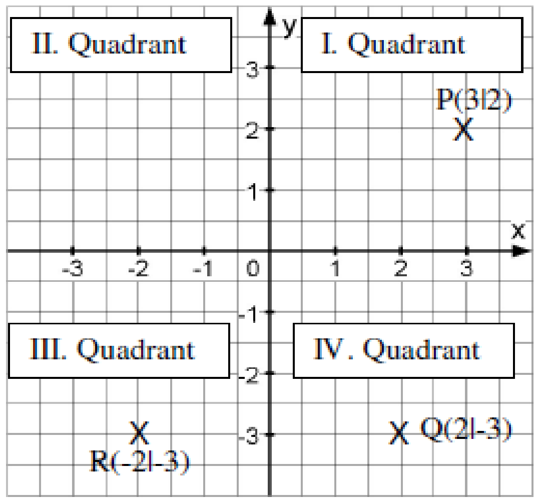
Koordinatensystem
Orthogonales Koordinatensystem
20

32

Um die Lage von Punkten in der Zeichenebene zu beschreiben verwendet man zwei Zahlengeraden, die senkrecht zueinander angeordnet sind. Man erhält ein **Koordinatensystem**.

Jeder Punkt lässt sich durch ein Zahlenpaar, bestehend aus x– und y– Koordinate, beschreiben.
Die einzelnen Koordinaten werden in runde Klammern geschrieben und durch einen senkrechten Strich getrennt.

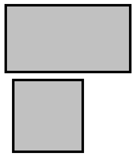
P: x–Koordinate = 3
y–Koordinate = 2
⇒P (3 | 2)



Rechteck und Quadrat

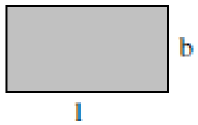
Ein Viereck mit 4 rechten Winkeln heißt Rechteck.

Ein Rechteck mit 4 gleich langen Seiten heißt Quadrat.



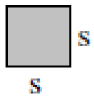
Umfang des Rechtecks: $U_R = 2 \cdot (l+b)$

Flächeninhalt des Rechtecks: $A_R = l \cdot b$



Umfang des Quadrats: $U_Q = 4 \cdot s$

Flächeninhalt des Quadrats: $A_Q = s^2$

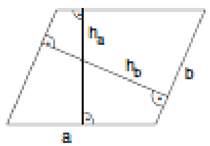


Parallelogramm

Parallelogramm

Flächeninhalt = Länge der Grundseite
mal Länge der zugehörigen Höhe

$A_P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

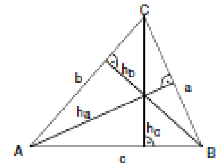


Dreieck

Dreieck

Flächeninhalt = halbe Länge der Grundseite
mal Länge der zugehörigen Höhe

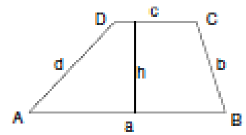
$A_D = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$



Trapez

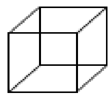
Flächeninhalt = halbe Summe der Längen der
parallelen Seiten mal Länge der Höhe

$A_T = \frac{1}{2} (a + c) \cdot h$

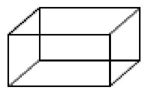


Körper mit eckigem Grundriß

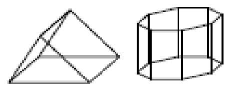
Körper sind räumliche Gebilde. (3 Dimensionen)



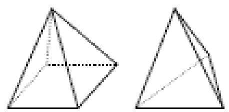
Würfel
6 gleiche quadratische Seiten



Quader
Gegenüberliegende Rechtecke sind gleich.



Prisma
Gleiche eckige Grund- und Deckfläche.



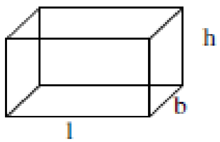
Pyramide
Eckige Grundfläche und Spitze

Geometrische Körper
Quader, Würfel
25
32

Oberfläche

$O_Q = 2\cdot(l\cdot b+l\cdot h+b\cdot h)$

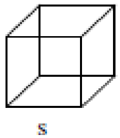
l = Länge, b = Breite, h = Höhe



Die Oberfläche besteht aus 6 Flächen, von denen jeweils 2 gleich sind.

$O_W = 6\cdot s^2$

s = Seitenlänge



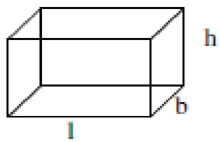
Die Oberfläche besteht aus 6 gleichen Flächen.

Geometrische Körper
Quader, Würfel
26
32

Volumen

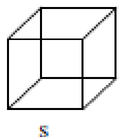
$V_Q = l \cdot b \cdot h$

l = Länge, b = Breite, h = Höhe



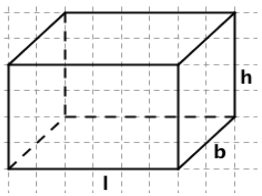
$V_W = s^3$

s = Seitenlänge

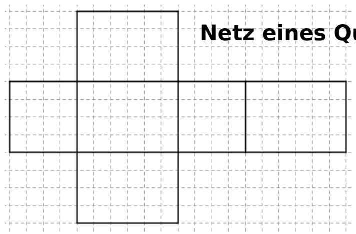


Schrägbild und Netz

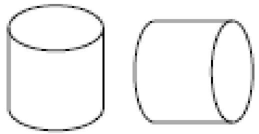
Schrägbild eines Quaders



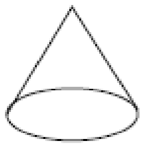
Netz eines Quaders



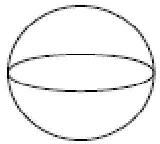
Geometrische Körper
Körper mit rundem Grundriß
27
32



Zylinder
Gleiche kreisförmige Grund- und Deckfläche



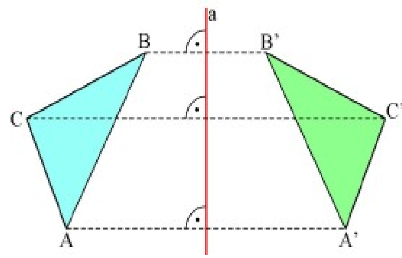
Kegel
Kreisförmige Grundfläche und Spitze



Kugel
Alle Punkte der Oberfläche sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt.

Symmetrie
Achsensymmetrische Flächen
28
32

Figuren, die durch Spiegelung an einer Achse a in sich übergehen, nennt man **achsensymmetrisch** bezüglich der Achse a.
Grundeigenschaft:
Sind A und A’ symmetrisch bezüglich der Achse a, dann steht die Verbindungsstrecke [A A’] senkrecht auf der Achse und wird von dieser halbiert.



- Längentreu: Urbildstrecke und Bildstrecke sind bei Achsenspiegelung immer gleich lang
- Paralleltreu: Sind Urbildlinien parallel zueinander, dann sind auch die Bildlinien parallel zueinander
- Winkeltreu: Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich groß
- Orientierungsumkehr: Der Drehsinn wird bei der Achsenspiegelung umgekehrt
- Fixpunkte: Alle Punkte auf der Achse, und nur diese, sind Fixpunkte und werden auf sich selbst abgebildet.
- Fixfiguren: Eine Figur, die bei einer Achsenspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt achsensymmetrisch und sind Fixfiguren der Achsenspiegelung. Die Achse und alle senkrechten Geraden sind Fixgeraden

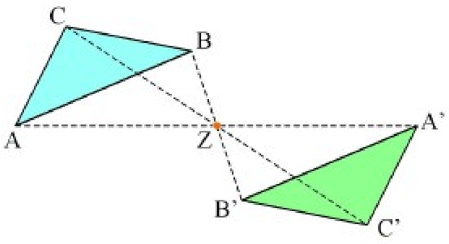
Symmetrie

29

32

Punktsymmetrische Flächen

Figuren, die bei einer Halbdrehung um ihr Zentrum Z in sich übergehen, nennt man **punktsymmetrisch** bezüglich des Punktes Z.
Grundeigenschaft:
Die Verbindungsstrecke zweier zueinander symmetrischer Punkte wird vom Symmetriezentrum halbiert.



- Längentreu: Urbildstrecke und Bildstrecke sind immer gleich lang
- Paralleltreu: Sind Urbildlinien parallel zueinander, dann sind auch die Bildlinien parallel zueinander
- Winkeltreu: Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich groß
- Orientierungstreu: Der Drehsinn bleibt bei der Punktspiegelung erhalten
- Fixpunkte: Der Spiegelpunkt S ist der einzige Fixpunkt
- Fixfiguren: Eine Figur, die bei einer Punktspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt punktsymmetrisch und sind Fixfiguren der Punktspiegelung

31

32

30

32

32

32