Mathematik – Intensivkurs: Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Gleichungen		

Gleichungen

Eine Gleichung drückt aus, dass zwei Größen oder Werte gleich sein sollen. Man spricht deshalb von zwei Seiten einer Gleichung, einer linken und einer rechten Seite. Diese beiden Seiten sind durch ein Gleichheitszeichen verbunden.
Ihrem Wesen nach unterscheidet man drei Arten von Gleichungen:

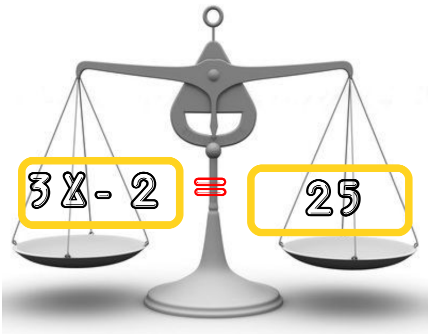
1. identische Gleichungen: $8 – 5 = 4 – 1$; $(a+b)^2 = a^2 +2ab + b^2$
2. Bestimmungsgleichungen: $3x – 6 = 38$
3. Funktionsgleichungen: $y = 5x - 2$

Identische Gleichungen ausschließlich mit Zahlen machen nicht sehr viel Sinn, da sie entweder immer richtig sind, oder immer falsch. Sie finden Anwendung bei Proben von Gleichungen mit Variablen, wenn zu prüfen ist, ob der ermittelte Wert für die Variablen auch tatsächlich die Ausgangsgleichung erfüllt.
Identische Gleichungen mit Termen treten sehr oft auf und besagen, dass die Gleichheit immer besteht, gleichgültig, welche Werte die einzelnen Variablen besitzen.

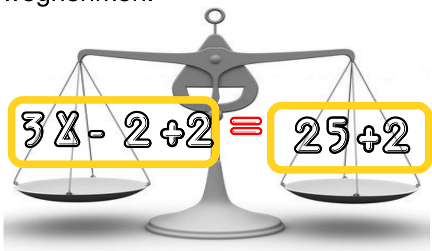
Bestimmungsgleichungen besitzen eine unbekannte Größe, deren Wert durch die vorgegebene Gleichheit definiert wird. Die beiden Seiten der Gleichung stellen Bedingungen dar, den der gesuchte Wert gerecht werden muss. Mit einer Gleichung kann immer nur eine Variable eindeutig bestimmt werden. Es ist auch möglich, dass eine solche Gleichung keine Lösung hat.

In **Funktionsgleichungen** können zwei oder mehr Variable auftreten, bei denen der Wert einer Variablen durch die Werte der anderen Variablen festgelegt wird. $y= 3x-5$ weist jedem Wert der Variablen x eindeutig einen einen Wert der Variablen y zu. $z = 3x^2y+4xy-7y^2$ weist jedem Wertepaar (x,y)
eindeutig einen Wert z zu. x und y stehen in keiner Beziehung zueinander.

Bestimmungsgleichungen



Damit eine Waage im Gleichgewicht bleibt, muss man auf beiden Seiten gleich viele Gewichte hinzulegen oder wegnehmen.



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Gleichungen

Bruchgleichungen

Bei Bruchgleichungen steht die Lösungsvariable im Nenner eines Bruches. Da im Nenner nie Null stehen darf, muss man zunächst die Definitionsmenge D bestimmen. Alle Zahlen, die beim Einsetzen in den Term den Nenner zu 0 machen würden, gehören nicht zur Definitionsmenge.
Man schreibt dazu: D = Q \ { ; ; } Wobei der Schrägstrich keine Division darstellt, sondern ein Minuszeichen bezüglich Mengenoperationen (s. „Bezeichnungen“ in Klasse 7). Zwischen den einzelnen Semikolon werden die x Werte aufgeführt die auszuschließen sind.

1. Lösungsweg

Fasse zunächst beide Seiten zu einem Bruchterm zusammen. Erweitere die beiden Bruchterme auf den Hauptnenner. Da zwei Brüche mit gleichem Nenner genau dann gleich sind, wenn auch ihre Zähler übereinstimmen, kannst du nun die Zähler gleichsetzen.

$$\frac{x-2}{x} = \frac{x-3}{x-2} \qquad D = Q \setminus \{0; 2\}$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x(x-3)}{x(x-2)}$$

$$(x-2)^2 = x(x-3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 3x$$

2. Lösungsweg

Schneller geht es, wenn beide Seiten der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Die Nenner kürzen sich dabei weg und es entstehen Gleichungen ohne Brüche.
Zunächst muss man des Wegfallen der Nenner als eine nicht äquivalente Umformung ansehen. Da aber mit der Einschränkung der Definitionsmenge D der Nenner nicht 0 werden kann, ist das Wegfallen des Nenners gleichbedeutend mit der Multiplikation **einer Zahl die ungleich 0** ist, damit ist die Umformung äquivalent. Probleme könnten entstehen, wenn für den gleichen Wert der Zähler auch 0 wird. Da dieser Wert aber aus der Definitionsmenge ausgeschlossen ist, kann ohne Bedenken multipliziert werden.
Um besser erkennen zu können, wann ein Nenner 0 wird ist es vorteilhaft, man zerlegt den Nenner in Faktoren.
Warum ist das sinnvoll? Man kann dann schlußfolgern, dass ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer seiner Faktoren 0 ist. Außerdem hilft das beim notwendigen Erweitern der Brüche.

$$1 - \frac{2}{x} = \frac{x-3}{x-2} \qquad | \cdot x(x-2) \qquad D = Q \setminus \{0; 2\}$$

$$x(x-2) - 2(x-2) = x(x-3)$$

Hauptnenner bei Bruchgleichungen

Da für Bruchgleichungen die gleichen Rechenregeln wie für normale Brüche gelten, ist das Bestimmen des Hauptnenners für Addition und Subtraktion eine zentrale Fragestellung. Bei normalen Brüchen mit Zahlen sind alle Nenner in Primzahlen zu zerlegen und jede Primzahl mit ihrer höchsten Potenz in den Hauptnenner zu übernehmen.(s. „Hauptnenner“ Klasse 7)

Achtung!
Nicht 8 ∗ 6, da 6 und 8 keine Primzahlen sind

Beispiel:
$N1 = 48 = 2*2*2*2*3 = 2^4 * 3$
$N2 = 70 = 2*5*7 = 2 * 5 * 7$
$N3 = 63 = 3*3*7 = 3^2 * 7$

Hauptnenner: $\mathbf{2^4 * 3^2 * 5 * 7}$

Erweiterungsfaktoren:
$3 * 5 * 7$
2^3
$2^4 * 5$

Mathematik – Intensivkurs: Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Gleichungen

Gesetze und Regeln

Bei Bruchgleichungen gilt die gleiche Herangehensweise. Es sind alle Nenner in nicht weiter zerlegbare Faktoren zu zerlegen. Diese Faktoren können lineare oder quadratische oder auch noch höhere Potenzen enthalten.

$$\frac{11}{4x} = \frac{2}{2x+2} + \frac{2}{2x-3}$$

Zähler 1	Zähler 2	Zähler 3
$\mathbf{11((x+2)(2x-3))} =$	$\mathbf{2((2x(2x-3))} +$	$\mathbf{2(2^2\,x\,(x+2))}$
Erweiterungs-faktor 1	Erweiterungs-faktor 2	Erweiterungs-faktor 3

$$\frac{7x-3}{2x-1} - \frac{13x-28}{3-2x} = 10 - \frac{28x+43}{4x^2-8x+3}$$

$$\mathbf{(7x-3)(2x-3) - (13x-28)((-(2x-1)) = 10(2x-3)(2x-1) - (28x+43)(1)}$$

$$\frac{6x^2-10x+6}{2x^3-13x^2+17x+12} - \frac{1}{x^2-6x+9} - \frac{2x}{x^2-7x+12} = 0$$

$$\mathbf{(6x^2-10x+6)(x-3) - (1)((x-4)*(2x+1)) - 2x((x-4)*(2x+1))} = 0$$

Es gibt eine einfache Prüfung, ob die Erweiterungsfaktoren richtig und vollständig sind:
Das Produkt des faktorisierten Nenners mit den zugehörigen Erweiterungsfaktor muss bei jedem einzelnen Nenner den Hauptnenner ergeben

Beispiel 3:

	Nenner	Erweiterungsfaktoren:	
N1 =	$(x-3)\ (x-4)\ (2x+1)$	$*\ (x-3)$	$= (x-3)^2*(x-4)*(2x+1)$
N2 =	$(x-3)^2$	$*\ (x-4)\ (2x+1)$	$= (x-3)^2*(x-4)*(2x+1)$
N3 =	$(x-3)\ (x-4)$	$*\ (x-3)\ (2x+1)$	$= (x-3)^2*(x-4)*(2x+1)$

$$\mathbf{(x-3)^2*(x-4)*(2x+1)}$$

Musterbeispiele

Beispiel 1:

			Erweiterungsfaktoren:
N1 = 4x	$= 2*2*x$	$= 2^2 * x$	$(x+2)(2x-3)$
N2 = 2x+2	$= 2*(x+2)$	$= 2 * (x+2)$	$2\ x\ (2x-3)$
N3 = 2x-3	$= (2x-3)$	$= (2x-3)$	$2^2\ x\ (x+2)$

Hauptnenner: $\mathbf{2^2 * x * (x+2) * (2x-3)}$

Beispiel 2:

		Erweiterungsfaktoren:
$N1 = 2x-1$	$= 2x-1$	$(2x-3)$
$N2 = 3-2x$	$= -(2x-3)$	$(-1) * (2x-1)$
$N3 = 1$		$(2x-1)\ (2x-3)$
$N4 = 4x^2-8x+3$	$= (2x-1)\ (2x-3)$	1

Hauptnenner: $\mathbf{(2x-1)*(2x-3)}$

Beispiel 3:

		Erweiterungs-faktoren:
$N1 = 2x^3-13x^2+17x+12$	$= (x-3)\ (x-4)\ (2x+1)$	$(x-3)$
$N2 = x^2-6x+9$	$= (x-3)^2$	$(x-4)\ (2x+1)$
$N3 = x^2-7x+12$	$= (x-3)\ (x-4)$	$(x-3)\ (2x+1)$

Hauptnenner: $\mathbf{(x-3)^2*(x-4)*(2x+1)}$

Mathematik – Intensivkurs: Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Gleichungen		

Faktorisieren

Das Problem der Hauptnennerbildung reduziert sich als auf die Frage, wie kann man aus einem Ausdruck $2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$ herausbekommen, in welche Faktoren er sich zerlegen lässt.
Es muss von vornherein gesagt werden, dass sich nicht jeder Ausdruck in Faktoren zerlegen lässt, insbesondere wird es bei höheren Potenzen, oder wenn zusätzliche Variable im Ausdruck enthalten sind, schwierig. Deshalb sollen hier einige Methoden aufgeführt werden, mit denen man versuchen kann eine Faktorzerlegung zu erreichen.

> Grundsätzlich sind alle Nenner zuerst auf die direkte Anwendung einer Binomischen Formel zu prüfen

1. Lösungsweg Nullstellenbestimmung

Enthält der Ausdruck außer den x-Potenzen nur Zahlen, wie z.B bei $2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$, dann kann man diesen Ausdruck als Polynom ansehen. Für Polynome gilt der Wurzelsatz des Vieta, der inhaltlich etwa folgendes besagt:
Jedes Polynom lässt sich in Linearfaktoren der Form $(x-x_0)$ zerlegen, wobei die festen x-Werte genau den Nullstellen des Polynoms entsprechen. Ein Problem dabei ist, dass solche x-Werte auch komplexe Zahlen sein können, die in diesem Fall nicht nützen.
Dieser Satz enthält aber eine interessante Schlußfolgerung:
Wenn ein solches Polynom eine **ganzzahlige Lösung** hat, dann muss diese Zahl Teiler des Absolutgliedes sein (das, bei dem kein x auftritt). Es sind grundsätzlich beide Vorzeichen zu prüfen.
Im obigen Fall würde das bedeuten, wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, dann kann es nur: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 4 ; ± 6 ; ± 12 sein. Ob überhaupt eine zutrifft, und welche kann nur durch probieren ermittelt werden. Der Taschenrechner kann dabei nützliche Dienste leisten.
Hat man eine Nullstelle gefunden, kann man durch Polynomdivision das Polynom in seiner Höhe reduzieren. Schafft man es bis zu einem quadratischen Polynom kann die Lösungsformel zum Einsatz kommen.

2. Lösungsweg Quadratische Ergänzung

Es soll sich hier auf quadratische Terme beschränkt werden, da andere Ausdrücke kaum zu erwarten sind, da sie einen beachtlichen Zeit- und Rechenaufwand bedeuten.
Es soll dazu noch einmal der Ausdruck $2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$ betrachtet werden. Gehen wir davon aus, dass durch probieren eine Lösung x= 3 gefunden wurde. Durch Polynomdivision reduziert sich das Polynom auf
$2x^2 - 7x - 4$

Mathematik – Intensivkurs: Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Gleichungen

1. Schritt: Ausklammern des Leitkoeffizienten

Der Koeffizient der höchsten Potenz von x heißt Leitkoeffizient. Im ersten Schritt des Faktorisierens wird der Leitkoeffizient immer ausgeklammert. Dabei können Brüche auftauchen; diese sind jedoch kein Hindernis für die nachfolgenden Rechnungen und sollten nicht in Dezimalzahlen umgewandelt werden.

$$2x^2 - 7x - 4 = 2(x^2 - 7/2\,x - 2)$$

2. Schritt: Quadratische Ergänzung

Nach dem Ausklammern des Leitkoeffizienten wird der Term in der Klammer zu einem vollständigen Binom ergänzt, so dass die 1. oder 2. Binomische Formel angewendet werden kann. Ein Binom hat die Gestalt $a^2 + 2a\,b + b^2$ oder $a^2 - 2ab + b^2$. Ergänzt wird das Quadrat von der Hälfte des Faktors von dem linearen Glied x. Der ergänzte Summand wird sofort wieder subtrahiert, da sonst ein anderer Term entstehen würde.

$$2(x^2 - 7/2\,x - 2) = 2\left[\left(x^2 - 7/2x + (7/4)^2\right) - (7/4)^2 - 2\right]$$

$$2\left[\left(x^2 - 7/2x + (7/4)^2\right) - (7/4)^2 - 2\right] = 2\left[(x - 7/4)^2 - \frac{49}{16} - \frac{32}{16}\right]$$

$$= 2\left[\underbrace{(x - 7/4)^2}_{a^2} \underbrace{- \frac{81}{16}}_{-b^2}\right]$$

3. Schritt: Dritte Binomische Formel anwenden

Der jetzt entstandene Ausdruck kann mittels der dritten Binomischen Formel faktorisiert werden. Steht zwischen den beiden Ausdrücken statt den – ein +, dann kann keine weitere Faktorisierung erfolgen, da es für $a^2 + b^2$ keine Binomische Formel gibt. In diesem Fall muss der quadratische Term als nicht weiter zerlegbar stehen bleiben.

$$= 2\left[\underbrace{(x - 7/4)}_{a} \underbrace{- \frac{9}{4}}_{-b}\right]\left[\underbrace{(x - 7/4)}_{a} \underbrace{+ \frac{9}{4}}_{+b}\right]$$

$$= 2\left[x - \frac{16}{4}\right]\left[x + \frac{2}{4}\right]$$

$$= (x - 4)(2x + 1)$$

Den Faktor 2 in die zweite Klammer reinmultipliziert

Mit dem vorher bestimmten Wert (x–3) ist die komplette Faktorisierung (x–3)(x – 4) (2x + 1), was mit der auf der Seite „Hauptnenner“ angegebenen Faktorisierung übereinstimmt.

3. Lösungsweg Quadratische Lösungsformel

ACHTUNG! Quadratische Lösungsformel ist erst Thema der 9. Klasse

Man kann natürlich auch den Ausdruck $2x^2 - 7x - 4$ mit der quadratischen Lösungsformel bearbeiten. Dabei darf allerdings nicht der Faktor 2 später bei der Faktorisierung vergessen werden, da dieser auf die Nullstellenbestimmung keinen Einfluss hat, wohl aber auf die Faktorisierung des ursprünglichen Polynoms.

Die Begründung für dieses Vorgehen ist wieder der Wurzelsatz von Vieta. Es werden die Nullstellen des quadratischen Polynoms gesucht, da diese eine Faktorisierung des Ausdruckes ermöglichen.

$$2x^2 - 7x - 4 = 2\,(x^2 - 7/2\,x - 2) = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{32}{16}}$$

$$x_1 = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = 4$$

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$2(x^2 - 7/2\,x - 2) = 2\left[x - 4\right]\left[x + \frac{1}{2}\right] = (x - 4)(2x + 1)$$

Mathematik – Intensivkurs: Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Gleichungen

3. Lösungsweg: allgemeine Vorgehensweise erste Version

Die im folgenden vorgestellten zwei Möglichkeiten zum Faktorisieren sind nicht Bestandteil der Schulausbildung, aber nicht schwer. Wer mit Gleichungen umgehen kann, sollte sich das ansehen.

Beachte !
Nicht jeder Ausdruck lässt sich mit ganzen Zahlen faktorisieren. Deshalb wird es nicht immer eine Lösung geben.

Ein Faktorisieren ist immer über die Nullstellen und der Anwendung des Satzes von Vieta möglich. Diese ergeben aber nicht notwendig ganze Zahlen

Faktorisiere einen Ausdruck $ax^2 + bx + c$, wobei $c > 0$

gesucht ist ein Ausdruck $(gx + m)(hx + n) = ax^2 + bx + c$

zunächst sind zwei Bedingungen sehr schnell zu erkennen:
$g * h = a$
$m * n = c$

- Bilde jede Kombination der Faktorenzerlegung von a und c
- Da $c = m*n$ positiv ist, haben m und n das gleiche Vorzeichen
- Der mittlere Koeffizient ergibt sich aus:
  $b = g * n + h * m$

Faktorisiere einen Ausdruck $ax^2 + bx + c$, wobei $c < 0$

gesucht ist ein Ausdruck $(gx + m)(hx + n) = ax^2 + bx + c$

zunächst sind zwei Bedingungen sehr schnell zu erkennen:
$g * h = a$
$m * n = c < 0$

- Bilde jede Kombination der Faktorenzerlegung von a mit gleichem Vorzeichen
- Da $c = m*n$ negativ ist, haben m und n das verschiedene Vorzeichen
- Der mittlere Koeffizient ergibt sich aus:
  $b = g * n + h * m$

Musterbeispiele

Faktorisiere $2x^2 + 23x + 11$
$g * h = 2$
$m * n = 11$

Zerlegung von g	und h	Zerlegung von n	und m	g * n + h * m
1	2	1	11	1 + 22 = 23
1	2	11	1	11 + 2 = 13

Die weitere mögliche Zerlegung

g	h	n	m
–1	–2	– 1	–11
–1	–2	–11	– 1

muß nicht untersucht werden, da diese Kombinationen aus einer Multiplikation jedes Linearfaktors mit -1 entsteht. Dieser kann in jedem Linearfaktor ausgeklammert werden und damit entstehen wieder positive Vorzeichen:
$(-1-2)(-1-11) = (-1)(1+2) * (-1)(1+11) = (1+2) * (1+11)$

Faktorisiere $6x^2 + x - 5$
$g * h = 6$
$m * n = -5$

Zerlegung von g	und h	Zerlegung von n	und m	g * n + h * m
2	3	1	–5	2 – 15 = – 13
2	3	–1	5	– 2 + 15 = 13
2	3	5	–1	10 – 3 = 7
2	3	–5	1	– 10 + 3 = – 7
1	6	1	–5	1 – 30 = – 29
1	6	–1	5	– 1 + 30 = 29
1	6	5	–1	5 – 6 = – 1
1	6	–5	1	– 5 + 6 = 1

(gx + m) (hx + n)
(x + 1) (6x – 5)

Treff Lernen
Christina Strauch

Mathematik – Intensivkurs: Gleichungen

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Gleichungen

4. Lösungsweg: allgemeine Vorgehensweise zweite Version

Faktorisiere einen Ausdruck $ax^2 + bx + c$

- Bilde das Produkt von a * c und suche zwei Faktoren für dieses Produkt, die zusammen b ergeben.
- Hat a * c gleiches Vorzeichen wie b müssen die Faktoren addiert werden, haben sie verschiedene Vorzeichen müssen die Faktoren subtrahiert werden.

Faktorisiere $12x^2 + 25x + 12$

$a * c = 144$

Zerlegung von 144

1	144	=	145
2	72	=	74
3	48	=	51
4	38	=	42
6	24	=	30
8	18	=	26
9	16	=	25
12	12	=	24

$12x^2 + 9x \quad + 16x + 12$

$3x(4x + 3) \quad + 4(4x + 3)$

$(3x + 4)(4x + 3)$

$6x^2 – 19x + 11$

$a * c = 66$

Zerlegung von 66

1	– 66	=	– 65
2	– 33	=	– 31
3	– 22	=	– 19
4	– 14	=	– 10
6	– 11	=	– 5

$6x^2 + 3x \quad – 22x + 11$

$3x(2x + 1) \quad – 11(2x + 1)$

$(3x – 11)(2x + 1)$

Der Wert b = – 19 ist nur möglich, wenn die größere Zahl negativ ist, deshalb ist vor dem größeren Faktor ein Minuszeichen zu schreiben

$– 6x^2 + 5x + 4$

$a * c = – 24$

Zerlegung von –24

– 1	24	=	23
– 2	12	=	10
– 3	8	=	5
– 4	6	=	2

Der Wert b = + 5 ist nur möglich, wenn der größere Faktor positiv ist.

$– 6x^2 – 3x \quad + 8x + 4$

$–3x(2x + 1) \quad + 4(2x + 1)$

$(– 3x + 4)(2x + 1)$

$6x^2 – 19x + 11$ Zerlegung nach Methode 1:

Zerlegung von g	und h	Zerlegung von n	und m	g * n + h * m
2	3	1	–11	2 – 33 = – 31
2	3	–1	11	– 2 + 33 = 31
2	3	11	–1	22 – 3 = 19
2	3	–11	1	– 22 + 3 = –19
1	6	1	–11	1 – 66 = – 65
1	6	–1	11	– 1 + 66 = 65
1	6	11	–1	11 – 6 = 5
1	6	–11	1	– 11 + 6 = – 5

$(gx + m)\ (hx + n)$

$(2x + 1)\ (3x – 11)$

$–6x^2 + 5x + 4$ Zerlegung nach Methode 1:

(da c positiv, haben n und m gleiche Vorzeichen)

Zerlegung von g	und h	Zerlegung von n	und m	g * n + h * m
– 2	3	1	4	– 2 + 12 = 10
– 2	3	–1	– 4	2 – 12 = – 10
– 2	3	4	1	– 8 + 3 = – 5
– 2	3	–4	– 1	8 – 3 = 5
– 1	6	2	2	– 2 + 12 = 10
– 1	6	–2	– 2	2 – 12 = – 10
– 1	6	2	2	– 2 + 12 = 10
– 1	6	–2	– 2	2 – 12 = – 10

$(gx + m)\ (hx + n)$

$(–2x – 1)\ (3x – 4)$

Klammert man im ersten Faktor – 1 aus und multipliziert es in den zweiten Faktor rein:

$(–1)(2x+1)(3x – 4) = (2x+1)(– 3x +4)$

erhält man das gleiche Ergebnis, wie auf der linken Seite.

Hätte man in der obigen Tabelle das Minuszeichen nicht vor die 2, sondern die 3 gesetzt, wäre sofort das gleiche Ergebnis entstanden.

Mathematik – Intensivkurs: Gleichungen		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Ungleichungen Treff Lernen Christina Strauch	Wenn für zwei reelle Zahlen gilt: $a \leq b$ dann gilt $-a \geq -b$ für $a > 0$ $1/a > 0$ für $0 < a \leq b$ $0 < 1/b \leq 1/a$ für alle c aus $\mathbb{R}$ $a + c \leq b + c$ $a - c \leq b - c$ für alle $c > 0$ aus $\mathbb{R}$ $a * c \leq b * c$ $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ für alle $c < 0$ aus $\mathbb{R}$ $a * c \geq b * c$	