Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Polynome	**Ganzrationale Funktionen**	

Ganzrationale Funktionen

(a) Symmetrie:

Achsensymmetrie (egal zu welcher senkrechten Achse):
Grad der Funktion ist gerade

Achsensymmetrie zur y-Achse:
zusätzlich fallen alle ungeraden Exponenten weg

Punktsymmetrie (egal zu welchem Punkt)
Grad der Funktion ist ungerade

Punktsymmetrie zum Ursprung:
zusätzlich fallen alle geraden Exponenten weg

(b) Verhalten im Unendlichen:

$f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$ Koeffizient vor der höchsten Potenz ist positiv und der Grad des Polynoms ist gerade.

$f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$ Koeffizient vor der höchsten Potenz ist negativ und der Grad des Polynoms ist gerade.

$f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$ Koeffizient vor der höchsten Potenz ist positiv und der Grad des Polynoms ist ungerade.

$f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \mp\infty$ Koeffizient vor der höchsten Potenz ist negativ und der Grad des Polynoms ist ungerade.

(c) Nullstellen:

Vielfachheit 1: Nullstelle x1 schneidet x-Achse ➜ $(x - x1)^1$
Vielfachheit 2: Nullstelle x1 ist Extrempunkt ➜ $(x - x1)^2$
Vielfachheit 3: Nullstelle x1 ist Sattelpunkt ➜ $(x - x1)^3$

(d) Extrempunkte: $(x_E|y_E)$ Gleichungen $f(x_E) = y_E$ und $f'(x_E) = 0$
n Extrempunkte Grad der Funktion ≥ n+1

(e) Wendepunkte: $(x_W|y_W)$ Gleichungen $f(x_W) = y_W$ und $f''(x_W) = 0$
n Wendepunkte: Grad der Funktion ≥ n+2

(f) Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \mid s)$ ➜ konstantes Glied = s

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Polynome		

Nullstellen eines Polynoms

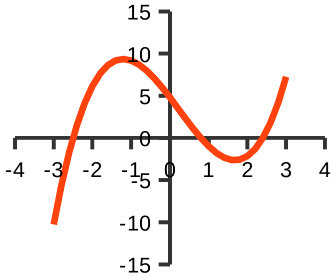
Für gebrochen rationale Funktionen in der Form Z(x)/N(x) mit P(x) =0.
Nullstellen und Polstellen einer gebrochen rationalen Funktion können nur in der Form ohne eingesondertes Polynom ermittelt werden.

1. Jedes Polynom hat soviele Nullstellen, wie seine höchste Potenz angibt
2. Nicht jede dieser Nullstellen ist innerhalb der reellen Zahlen vorhanden, sondern kann auch eine komplexe Zahl sein. Damit läßt sich diese Nullstelle im Graphen der Funktion nicht sichtbar machen.
3. Wenn ein Polynom komplexe Nullstellen hat, dann treten die immer paarweise auf.

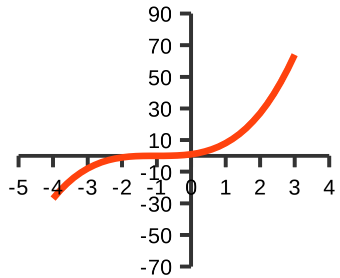
Die höchste Potenz des Polynoms ist ungerade

(hier dargestellt an einem Polynom 3. Grades; a >0)

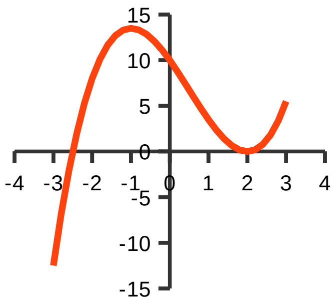
3 einfache Nullstellen
y= (x-x1)(x-x2)(x-x3)



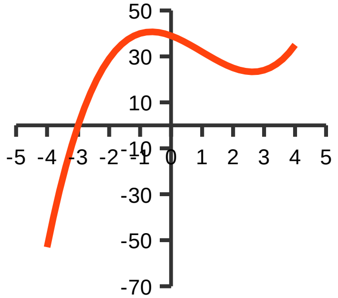
1 dreifache Nullstelle (Stufenwendepunkt)
y = $(x-x1)^3$



1 einfache reelle Nullstelle
1 doppelte reelle Nullstelle
y = (x-x1) $(x-x2)^2$



1 einfache reelle Nullstelle
1 doppelte komplexe Nullstelle
y = (x-x1)(ax^2+bx+c)



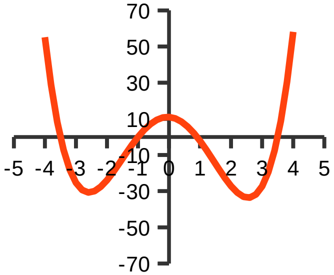
Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

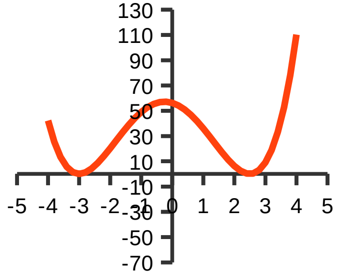
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Polynome	**Die höchste Potenz des Polynoms ist gerade**	

(hier dargestellt an einem Polynom 4. Grades; a > 0)

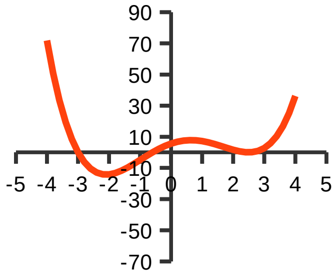
4 einfache reelle Nullstellen
y=(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)



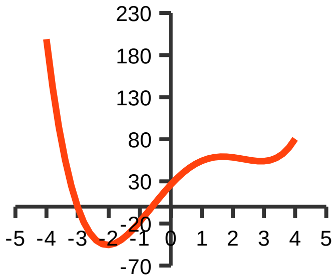
2 doppelte reelle Nullstellen
y= (x-x1)²(x-x2)²



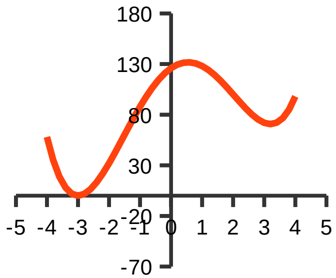
2 einfache reelle Nullstellen
1 doppelte reelle Nullstelle
y=(x-x1)(x-x2)(x-x3)²



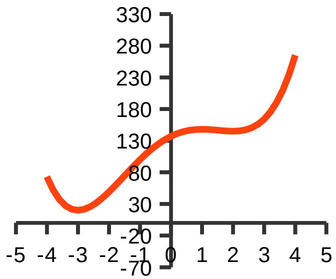
2 einfache reelle Nullstellen
1 doppelte komplexe Nullstelle
y=(x-x1)(x-x2)(ax²+bx+c)



1 doppelte reelle Nullstelle
1 doppelte komplexe Nullstelle
y=(x-x1)²(ax²+bx+c)

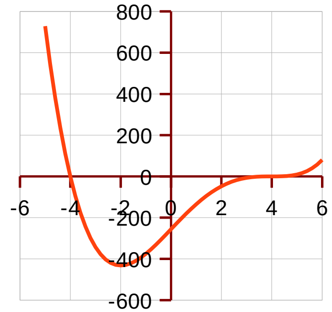


2 doppelte komplexe Nullstellen
y=(ax²+bx+c)(dx²+ex+f)

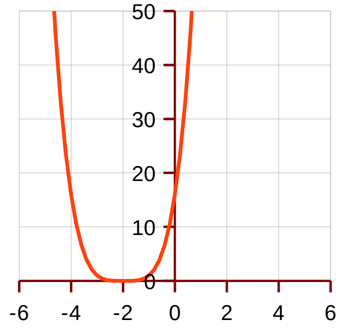


Musterbeispiele

1 einfache reelle Nullstelle
1 dreifache reelle Nullstelle
y= (x-x1)(x-x2)³



1 vierfache Nullstelle
y = (x-x1)⁴



Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Polynome		

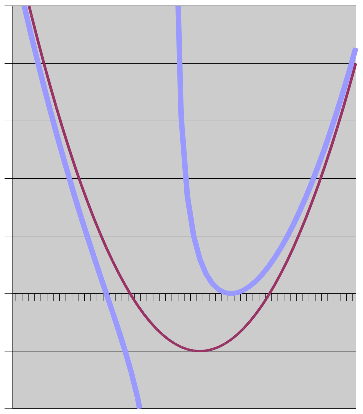
Asymptotisches Verhalten für x-> - ∞ oder x-> +∞

Gebrochen rationale Funktionen lassen sich allgemein in der Form

$R(x) = P(x) + Z(x) / N(x)$

schreiben. Auch Funktionen, die nur aus einer Funktion Z(x) und N(x) bestehen können mittels Polynomdivision auf die obige Form zurückgeführt werden.

Ist die höchste Potenz des Zählerpolynoms kleiner aus die höchste Potenz des Nennerpolynoms, dann ist P(x) =0;



Ist die höchste Potenz des Zählerpolynoms gleich der höchsten Potenz des Nenner-polynoms, dann ist P(x) eine Konstante (= Polynom 0-ter Ordnung). In allen anderen Fällen ist P(x) ein Polynom mindestens erster Ordnung.

Das Polynom P(x) (rot) ist die Asymptote der gebrochen rationalen Funktion R(x) (blau) für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

Die höchste Potenz von P(x) ist ungerade

Der Koeffizient vor der höchsten Potenz hat **positives Vorzeichen:**

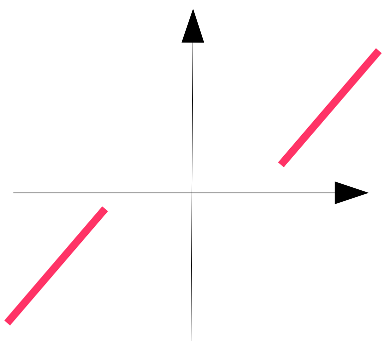
$x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty$

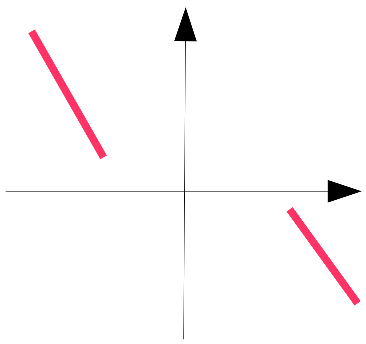
$x \to -\infty \quad f(x) \to -\infty$

Der Koeffizient vor der höchsten Potenz hat **negatives Vorzeichen:**

$x \to +\infty \quad f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty \quad f(x) \to +\infty$





Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

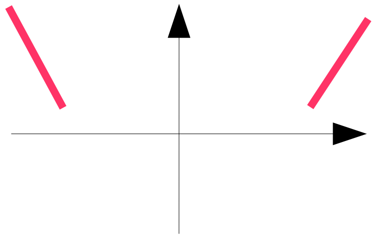
Polynome

Die höchste Potenz von P(x) ist gerade

Der Koeffizient vor der höchsten Potenz hat **positives Vorzeichen:**

$x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty$

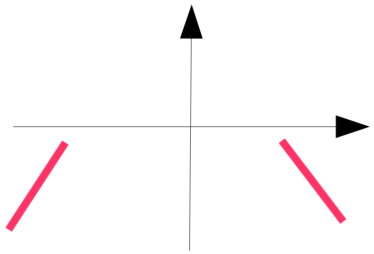
$x \to -\infty \quad f(x) \to +\infty$



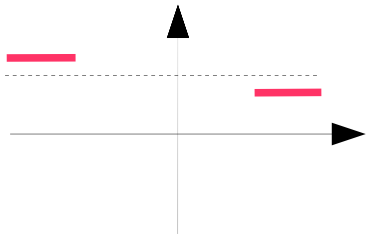
Der Koeffizient vor der höchsten Potenz hat **negatives Vorzeichen:**

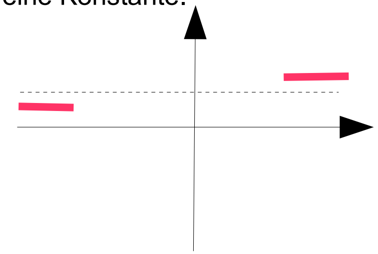
$x \to +\infty \quad f(x) \to -\infty$

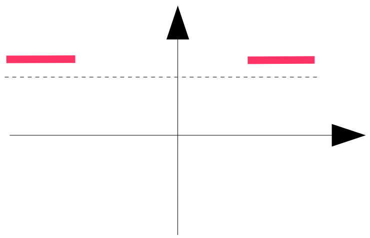
$x \to -\infty \quad f(x) \to -\infty$

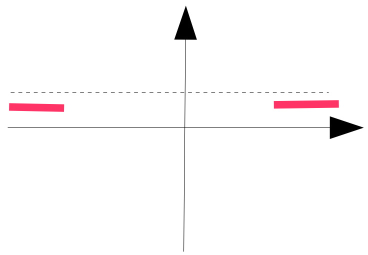


Für gebrochen rationale Funktionen in der Form R(x) = Z(x) / N(x)
Für die die höchste Potenz des Zählers gleich der höchsten Potenz des Nenners ist die Asymptote ein Parallele zur x- Achse. Der Wert ist der Quotient des Koeffizienten der höchsten Potenz des Zählers durch den Koeffizienten der höchsten Potenz im Nenner. In diesem Fall wäre bei einer Polynomdivision der Funktion P(x) eine Konstante.









Es sind alle vier Varianten der Annäherung an die Asymptote möglich. Das ist abhängig von den nachfolgenden Koeffizienten. Wenn die höchste Potenz des Zählers kleiner ist, als die des Nenners, dann ist die Asymptote die x-Achse selbst.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Gebrochen rationale Funktionen	**Gebrochen rationale Funktionen** **a) Symmetrie**: Achsensymmetrie zur y-Achse: Zähler und Nenner beide achsensymmetrisch oder beide punktsymmetrisch Punktsymmetrie zum Ursprung: Zähler und Nenner haben unterschiedliche Symmetrie **b) Verhalten im Unendlichen**: waagrechte Asymptote y = 0 (x-Achse): Zählergrad < Nennergrad waagrechte Asymptote $y = c \neq 0$: Zählergrad = Nennergrad und Vorfaktoren vor dem Bruch = c (und Vorfaktoren vor den höchsten Exponenten = 1) schiefe Asymptote y = mx + n: Zählergrad = Nennergrad + 1 oder zweiteilig: $f(x) = mx + n + \frac{u(x)}{v(x)}$ mit Grad(u) < Grad(v) Näherungspolynom n(x): Zählergrad > Nennergrad + 1 oder zweiteilig: $f(x) = n(x) + \frac{u(x)}{v(x)}$ mit Grad(u) < Grad(v) **c) Nullstellen**: Vielfachheit 1: Nullstelle $x1$ schneidet x-Achse : $(x - x1)^1$ Vielfachheit 2: Nullstelle $x1$ ist Extrempunkt : $(x - x1)^2$ Vielfachheit 3: Nullstelle $x1$ ist Sattelpunkt: $(x - x1)^3$ **d) Polstellen** (=Nullstellen des Nenners): Vielfachheit 1: Polstelle $x1$ mit Vorzeichenwechsel $(x - x1)$ Vielfachheit 2: Polstelle $x1$ ohne Vorzeichenwechsel $(x - x1)^2$ **e) Extrempunkte**: $(x_E \| y_E)$ Gleichungen $f(x_E) = y_E$ und $f'(x_E) = 0$ **f) Wendepunkte**: $(x_W \| y_W)$ Gleichungen $f(x_W) = y_W$ und $f''(x_W) = 0$	

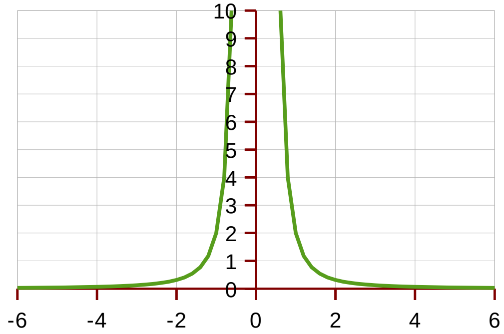
Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Gebrochen rationale Funktionen	**Asymptotisches Verhalten für x-> - ∞ oder x-> +∞**	

Grad des Zählerpolynoms < Grad des Nennerpolynoms

In diesen Fällen ist die x-Achse eine waagerechte Asymptote

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^4}$$

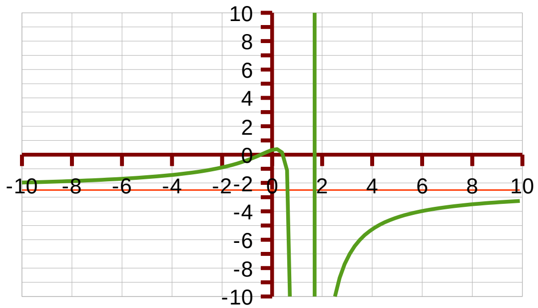


Grad des Zählerpolynoms = Grad des Nennerpolynoms

In diesen Fällen existiert eine waagerechte Asymptote. Der y-Wert ist der Quotient der beiden Koeffizienten der höchsten Potenzen.

$$y = \frac{-5x^2 - 1}{2x^2 - 5x + 3}$$

Asymptote y = -5/2

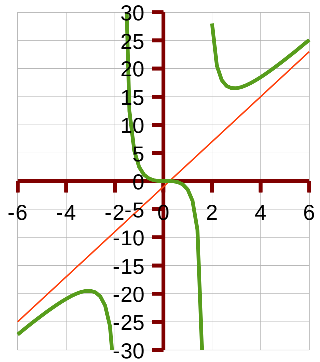


Grad des Zählerpolynoms = Grad des Nennerpolynoms + 1

In diesen Fällen ist die Asymptote eine Gerade, die durch Polynomdivison erzeugt werden kann.

$$y = \frac{4x^4 - x^2}{x^2 - 3}$$

Asymptote y = 2x + 4



Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

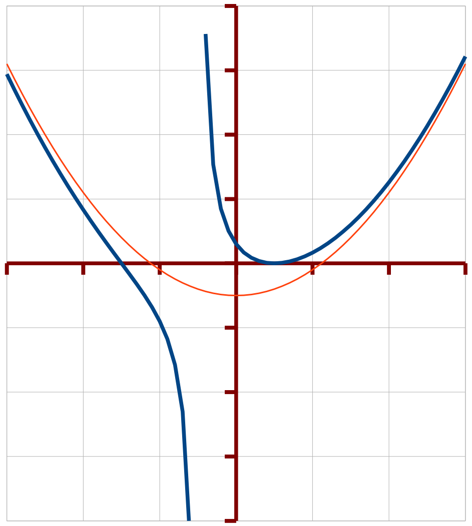
Gebrochen rationale Funktionen

Grad des Zählerpolynoms > Grad des Nennerpolynoms + 1

In all diesen Fällen ist die Asymptote ein Polynom, das aus Polynomdivision des Zählers und Nenners erzeugt werden kann.

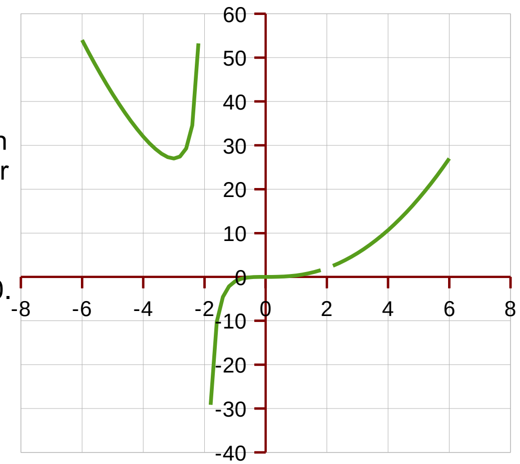
$$y = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x+1}$$

Asymptote $y = x^2 - 5$



Behebbare Unstetigkeitsstellen

Funktionen, die sich als Quotient von zwei anderen Funktionen schreiben lassen, haben an den Nullstellen des Nenners meistens eine Polstelle. das trifft genau dann nicht zu, wenn der Zähler an dieser Stelle auch eine Nullstelle hat.das Funktionsergebnis ist dann 0:0, und dieser Ausdruck ist unbestimmt, er ist weder ∞ noch 0. Der Funktionswert muss mit speziellen Methoden ermittelt werden.



$$y = \frac{x^4 - 2x^3}{x^2 - 4} = \frac{x^3(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

x=-2 und x=2 sind Nullstelle der Nennerfunktion, aber x=2 ist auch Nullstelle der Zählerfunktion. Deshalb lässt sich der Linearfaktor (x-2) kürzen. Am Kurvenverlauf ist deutlich zu erkennen, dass es sich bei x=2 nicht um eine Polstelle handelt.