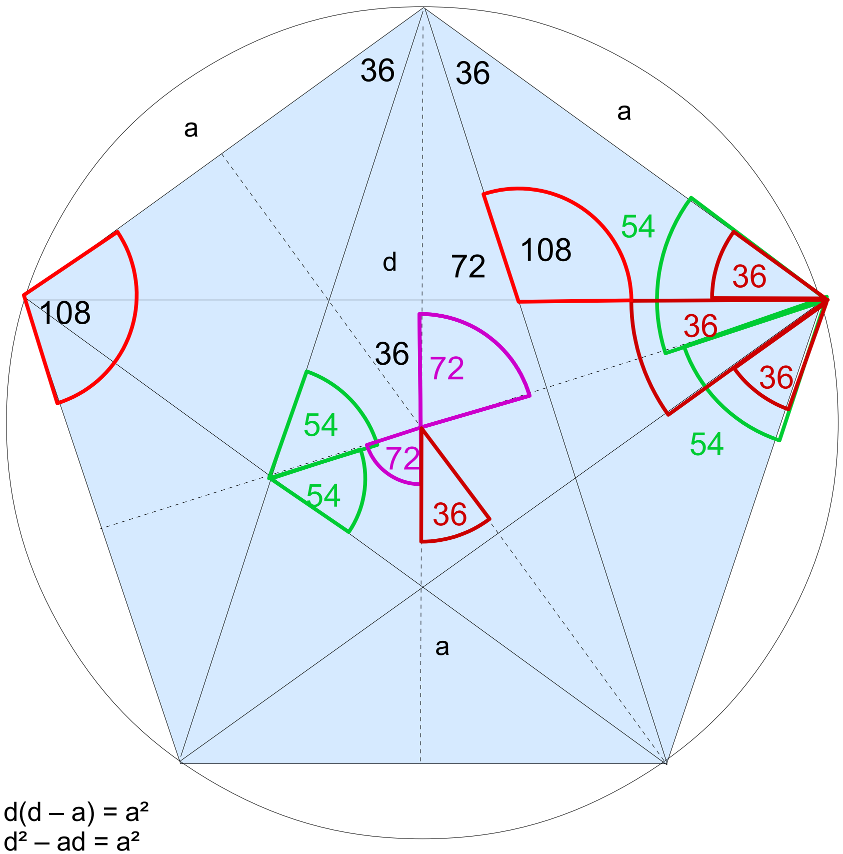
Mathematik – Intensivkurs: Fünfeck

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen

Reguläres Fünfeck

Reguläres Fünfeck



$d(d - a) = a^2$
$d^2 - ad = a^2$

$d^2 - ad - a^2 = 0$

$$d_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

$d_{1/2} = ½\, a\,(1 \pm \sqrt{5})$

$\boxed{d = ½\, a\,(\sqrt{5} + 1)}$

Die zweite Lösung mit „-“ liefert eine negative Zahl und ist deshalb unbrauchbar.

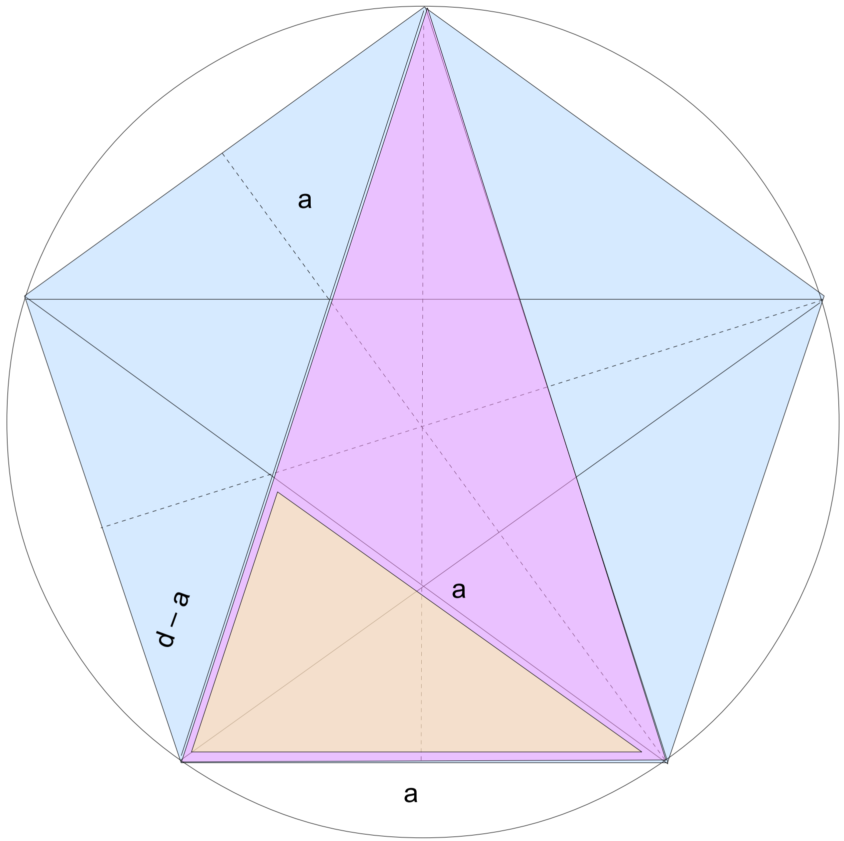
umgestellt nach a ergibt sich:

$$\frac{2\,d}{\sqrt{5} + 1} = a$$

erweitern mit $\sqrt{5} - 1$
(3. Binomische Formel) :

$$\frac{2\,d\;(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{2\,d\;(\sqrt{5} - 1)}{4}$$

$\boxed{a = ½\;d\,(\sqrt{5} - 1)}$



Das orange und das pink farbige Dreieck sind ähnlich, da sie die gleichen Winkel besitzen, außer-dem sind sie gleichschenklig, deshalb ist der Abstand vom Eckpunkt zu Schnittpunkt der Diagonallinien a. Damit gilt folgende Verhältnisgleichung:

$$\frac{d - a}{a} = \frac{a}{d}$$

orange Dreieck — pink Dreieck

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen

Reguläres Fünfeck

Winkel

$$\cos 72 = \frac{a/2}{d} = \frac{\frac{1}{4} d (\sqrt{5} - 1)}{d}$$

$$\boxed{\cos 72 = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)}$$

$$\sin 72 = \sqrt{1 - (\tfrac{1}{4} (\sqrt{5} - 1))^2}$$

$$= \sqrt{1 - 1/16\,(5 - 2\sqrt{5} + 1)}$$

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{16 - (5 - 2\sqrt{5} + 1)}$$

$$\boxed{\sin 72 = \tfrac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$\cos 36 = \frac{d/2}{a} = \frac{\frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)}{a}$$

$$\boxed{\cos 36 = \tfrac{1}{4} (\sqrt{5} + 1)}$$

$$\sin 36 = \sqrt{1 - (\tfrac{1}{4} (\sqrt{5} + 1))^2}$$

$$= \sqrt{1 - 1/16\,(5 + 2\sqrt{5} + 1)}$$

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{16 - (5 + 2\sqrt{5} + 1)}$$

$$\boxed{\sin 36 = \tfrac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$\frac{1}{\cos(36)} = \frac{4}{\sqrt{5} + 1} = \frac{4\ (\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)\ (\sqrt{5} - 1)}$$

$$\frac{1}{\cos(36)} = \sqrt{5} - 1$$

Über die allgemein bekannten Winkelbeziehung erhält man

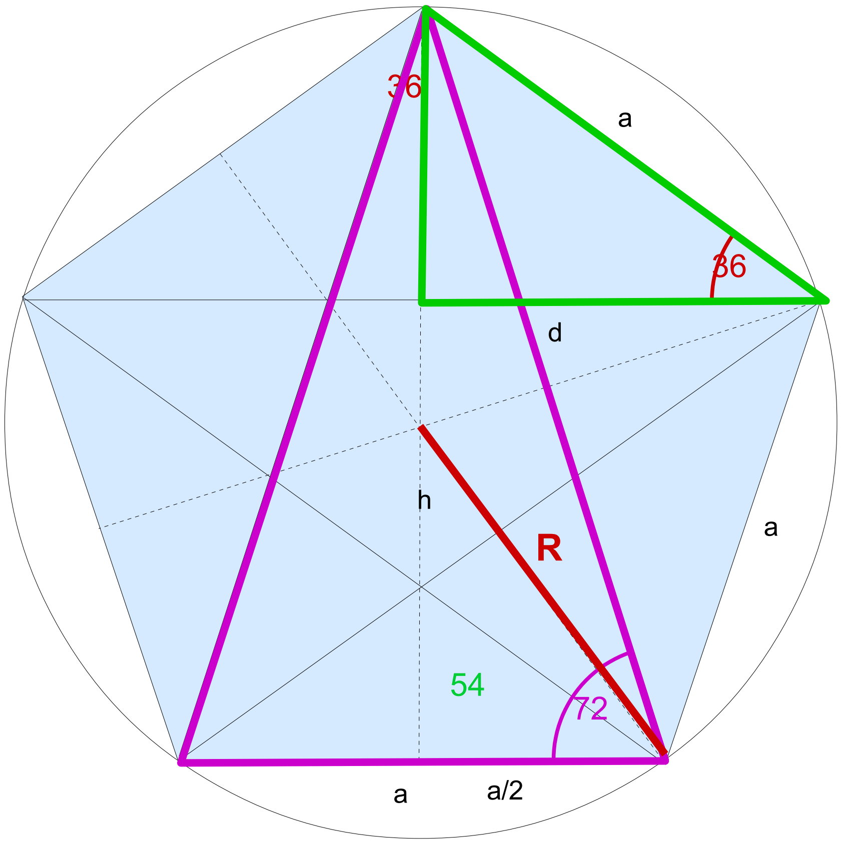
$$\boxed{\sin 18 = \cos 72 = \tfrac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)}$$

$$\boxed{\cos 18 = \sin 72 = \tfrac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{\sin 54 = \cos 36 = \tfrac{1}{4} (\sqrt{5} + 1)}$$

$$\boxed{\cos 54 = \sin 36 = \tfrac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Damit ist es möglich Strecken über Winkelfunktionen zu berechnen, ohne, dass man Winkelfunktionen benutzen muß.



Mathematik – Intensivkurs: Fünfeck

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen

Reguläres Fünfeck

Umkreis und Inkreis

$$R = a/2 \,/\, \cos 54 = a\,\frac{1}{2\cos 54} = a\,\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = a\,\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10-2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,\sqrt{(5+\sqrt{5})^2}}{20}$$

Umformung des Zählers unter einer gemeinsamen Wurzel:

$$(10-2\sqrt{5})\,(5+\sqrt{5})^2 = (10-2\sqrt{5})\,(25+10\sqrt{5}+5) = 2\;10\,(5-\sqrt{5})\,(3+\sqrt{5})$$
$$= 20\,(10+2\sqrt{5})$$

$$R = a\,\frac{\sqrt{20\,(10+2\sqrt{5})}}{20} = a\,\frac{\sqrt{5\,(10+2\sqrt{5})}}{10}$$

Aus 20 lässt sich teilweise die Wurzel ziehen $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$\boxed{R = a\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}}{10}}$$

Außer einem Umkreis besitzt ein Fünfeck auch einen Inkreis. Beide haben den gleichen Mittelpunkt. Der Radius des Inkreises ist r = h – R oder über die Trigonometrie r = R cos 36

$$R = a\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}}{10} \qquad \cos 36 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$r = a\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}}{10}\;\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$$

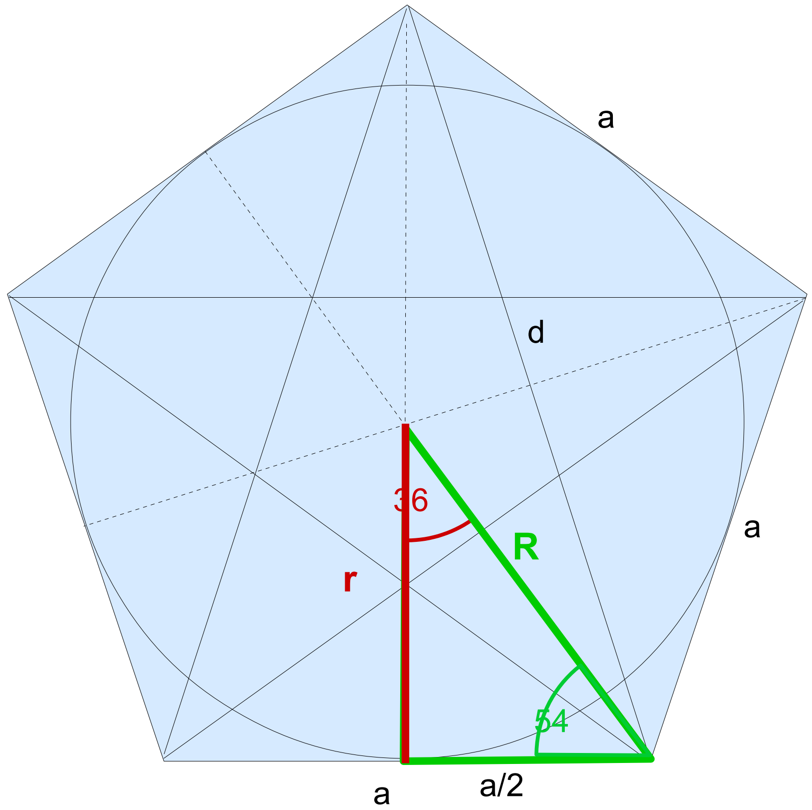
$$= a\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}\;\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{40}$$

$$r = a\,\frac{\sqrt{80\,(5+2\sqrt{5})}}{40}$$

$$r = a\,\frac{4\sqrt{5\,(5+2\sqrt{5})}}{40}$$

$$\boxed{r = a\,\frac{\sqrt{5\,(5+2\sqrt{5})}}{10}}$$

$$10(5+\sqrt{5})\;(\sqrt{5}+1)^2$$
$$= 10\,(5+\sqrt{5})\,(5+2\sqrt{5}+1)$$
$$= 2\;10\,(5+\sqrt{5})\,(3+\sqrt{5})$$
$$= 20\,(20+8\sqrt{5})$$
$$= 80\,(5+2\sqrt{5})$$



Der Inkreisradius ist gleichzeitig die Höhe der fünf kongruenten, gleichschenkligen Dreiecke, die das Fünfeck bilden.

Mathematik – Intensivkurs: Fünfeck

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen

Reguläres Fünfeck

Das Verhältnis von Umkreisradius und Inkreisradius

$$R = a\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}}{10} \qquad r = a\,\frac{\sqrt{5\,(5+2\sqrt{5})}}{10}$$

$$R = 1/10\; a\,\sqrt{10}\,\sqrt{(5+\sqrt{5})} \qquad r = 1/10\; a\,\sqrt{5}\,\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{10}\,\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{5}\,\sqrt{(5+2\sqrt{5})}} = \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{(15-5\sqrt{5})}{5}}$$

$$\boxed{\frac{R}{r} = \sqrt{2(3-\sqrt{5})} = 1{,}236068}$$

Höhe des Fünfecks

$$\boxed{h = d\,\sin 72 = d\;\tfrac{1}{4}\,\sqrt{10+2\sqrt{5}} = a\;\tfrac{1}{2}\,\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

für $d = \tfrac{1}{2}\, a\,(\sqrt{5}+1)$ folgt aus der Gleichung :

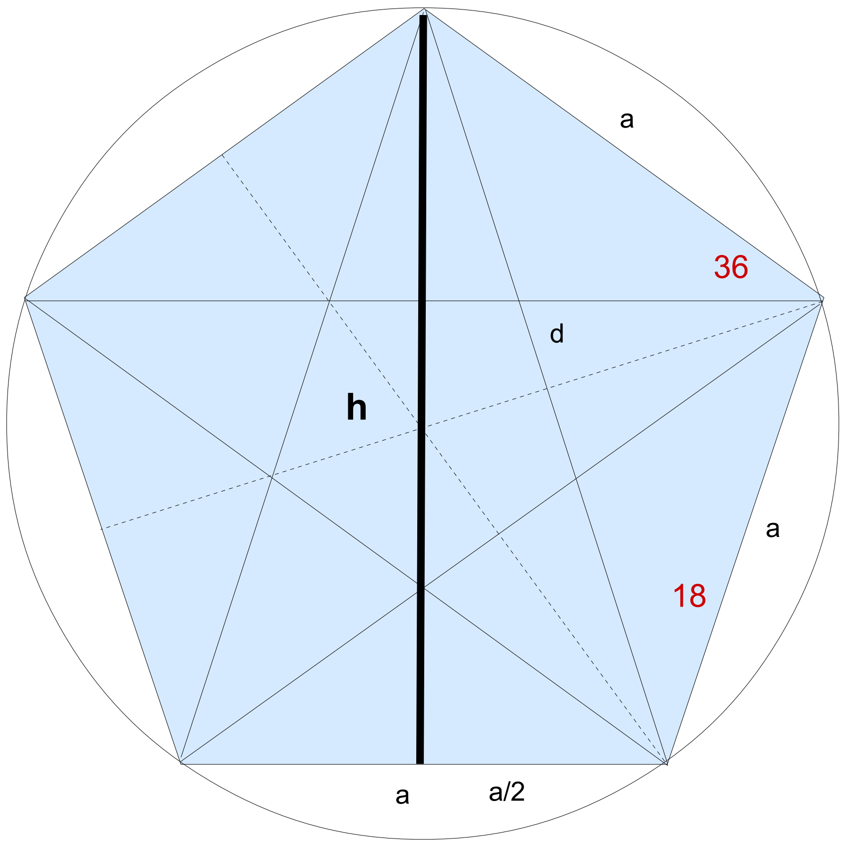
$$h = d\,\sin 72$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a\,(\sqrt{5}+1)\;\tfrac{1}{4}\;\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$h = a\,\frac{\sqrt{4\,(20+8\sqrt{5})}}{8}$$

$$h = a\,\frac{\sqrt{16\,(5+2\sqrt{5})}}{8}$$

$$h = a\,\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$$

$$(10+2\sqrt{5})\;(1+\sqrt{5})^2$$
$$= (10+2\sqrt{5})\,(1+2\sqrt{5}+5)$$
$$= 2\cdot 2\,(5+\sqrt{5})\,(3+\sqrt{5})$$
$$= 4\,(20+8\sqrt{5})$$



Treff Lernen
Christina Strauch

Mathematikkurs – Intensivkurs: Fünfeck

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen

Reguläres Fünfeck

Teilung der Höhe durch die Linie d

$\boxed{h1 = a \sin 36 = a\, \tfrac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$

$\boxed{h2 = a \cos 18 = a\, \tfrac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

Das Verhältnis von Höhe und Inkreisradius

$$r = a \frac{\sqrt{5\,(5 + 2\sqrt{5}\,)}}{10} = a \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{10} = \tfrac{1}{2}\, a \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{5}$$

$$h = a\, \tfrac{1}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$r = \frac{\sqrt{5}}{5}\, h \qquad \boxed{h = \sqrt{5}\, r}$$

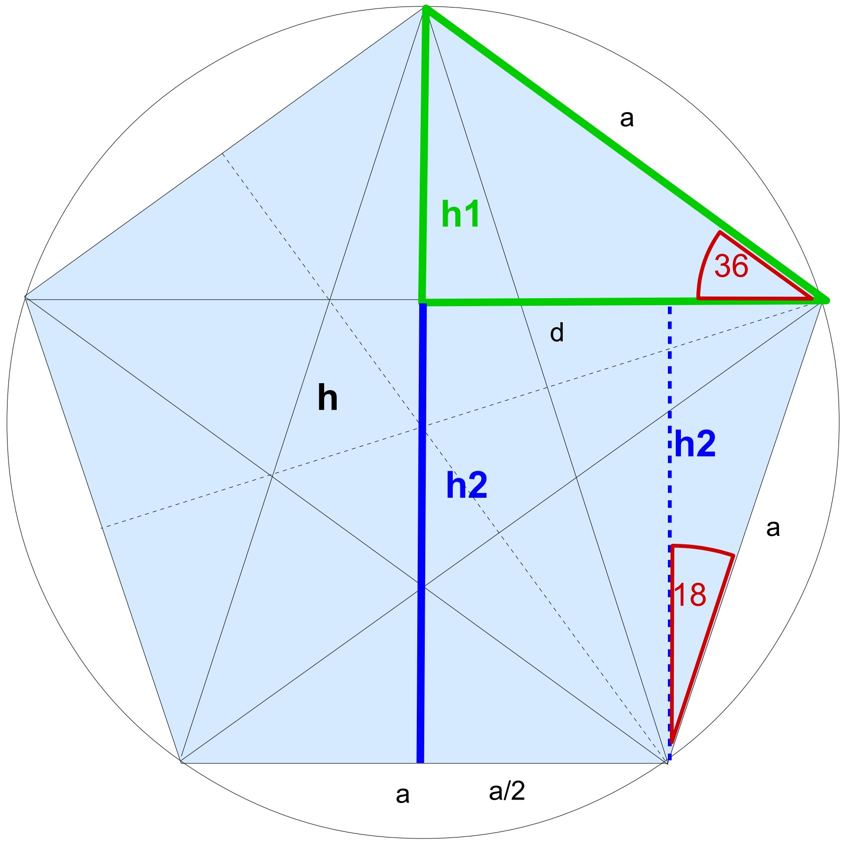
Das Verhältnis von Höhe und Umkreisradius

$$R = a \frac{\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5}\,)}}{10}$$

$$\frac{h}{R} = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5}\,)}}{10}} = \frac{10}{2\sqrt{10}} \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2} \sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{20}} = \frac{\sqrt{10 \cdot 5}}{2\sqrt{20}} \sqrt{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10 \cdot 5}}{2\sqrt{4 \cdot 5}} \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{10}\, \sqrt{3 + \sqrt{5}} = 1{,}809017$$



Mathematik – Intensivkurs: Fünfeck

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen
Reguläres Fünfeck	**Die Höhe ist die Summe von Umkreis- und Inkreisradius**	

$$R = a\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5}\,)}}{10} = a\,\tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{10\,(5+\sqrt{5}\,)}}{5}$$

$$r = a\,\frac{\sqrt{5\,(5+2\sqrt{5}\,)}}{10} = a\,\tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{5\,(5+2\sqrt{5}\,)}}{5}$$

$$h = a\ \tfrac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

Es soll zunächst $(R + r)^2$ berechnet werden. Nachträglich kann man wieder die Wurzel ziehen

$$R^2 \quad + \quad 2\,R\,r \quad + \quad r^2$$

$$\frac{10\,(5+\sqrt{5}\,)}{25} + \frac{2\cdot\sqrt{10\,(5+\sqrt{5}\,)\,5\,(5+2\sqrt{5}\,)}}{25} + \frac{5\,(5+2\sqrt{5}\,)}{25}$$

Zusammenfassung des ersten und dritten Ausdrucks:

$$\frac{75+20\sqrt{5}}{25} = \frac{5\,(15+4\sqrt{5})}{25}$$

Zusammenfassung des mittleren Wurzelausdrucks

$$10\,(5+\sqrt{5}\,)\,5\,(5+2\sqrt{5}\,) = 50\,(35+15\,\sqrt{5}) = 250\,(7+3\,\sqrt{5})$$

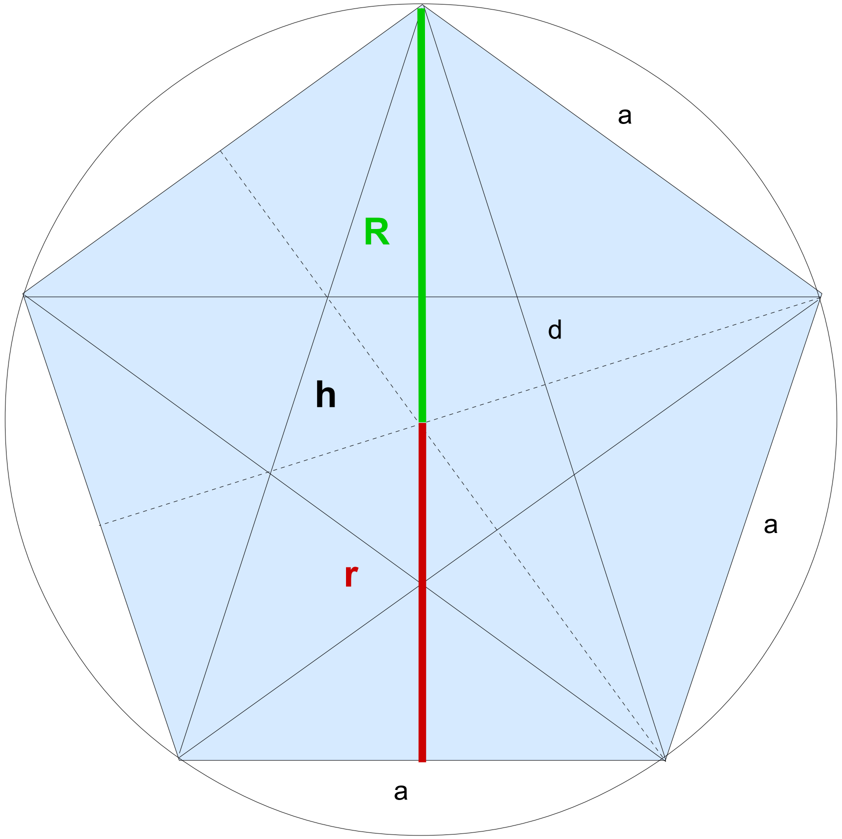
$$\frac{5\,(15+4\sqrt{5})}{25} + \frac{2\,\sqrt{250\,(7+3\,\sqrt{5})}}{25}$$

$$\frac{15+4\sqrt{5}}{5} + \frac{2\,\sqrt{10\,(7+3\,\sqrt{5})}}{5} = \frac{25+10\sqrt{5}}{5}$$

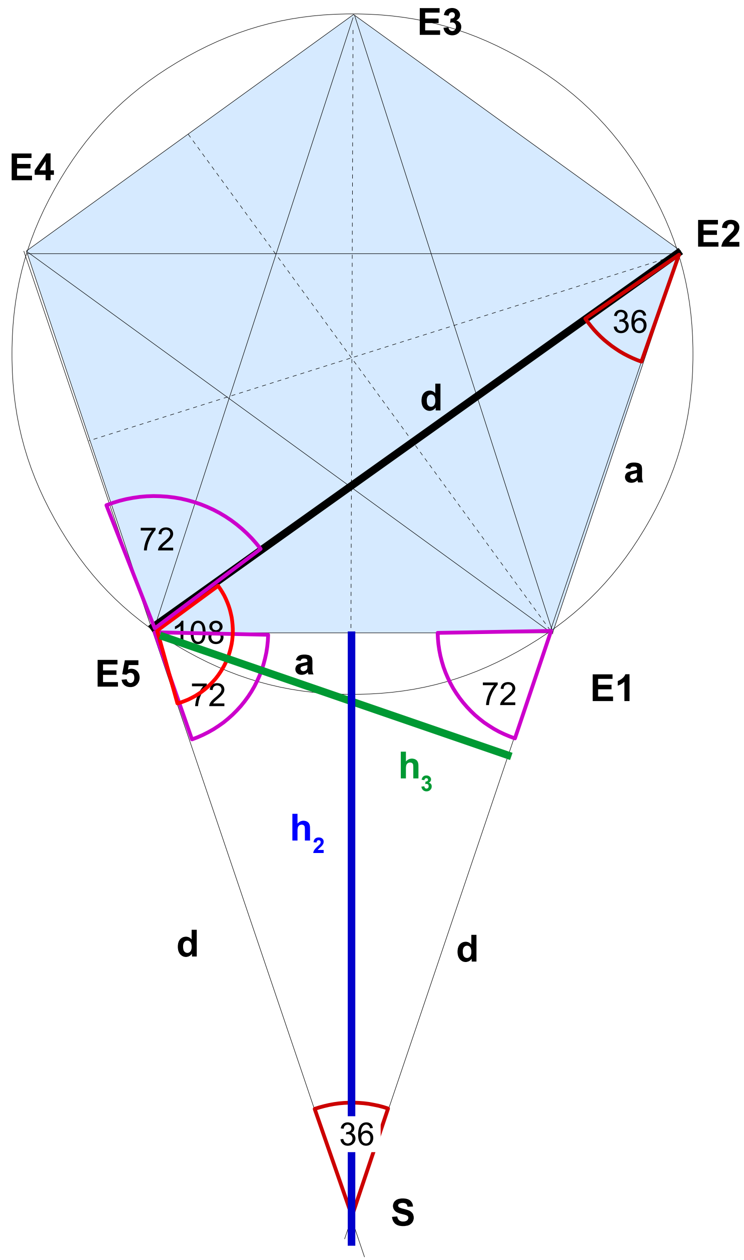
Diese Umrechnung kennt nur ein CAS Taschenrechner

$$\frac{5(5+2\sqrt{5})}{5} = 5+2\sqrt{5}$$

Zieht man aus diesem Ausdruck die Wurzel, erhält man h, da die anderen Faktoren a u8nd ½ bereits ausgeklammert wurden.



Treff Lernen
Christina Strauch

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen
Reguläres Fünfeck	**Das Ergänzungsdreieck** Der Winkel $\sphericalangle E_4E_5E_2$ ist ein Winkel des Fünfecks und beträgt 72°. Damit ist der Winkel $\sphericalangle E_2E_5S$ als Ergänzungswinkel zu 180° gleich 108° und der Winkel $\sphericalangle E_5SE_2$ = 36° Das Dreieck E5SE2 ist damit ein gleichschenkliges Dreieck und deshalb die Seite E5S = d Das Dreieck E1SE5 ist ebenfalls ein gleichschenkliges Dreieck und deshalb die Seite E1S = d Die Höhe auf die Grundlinie im Dreieck E2SE5 ist h3 = d sin 36° Die Höhe auf die Grundlinie im Dreieck E1SE5 ist h2 = d sin 72°	

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen

Reguläres Fünfeck

Koordinaten der Eckpunkte

Bestimmung der Koordinaten der Eckpunkte unter der Bedingung, dass der Mittelpunkt des Umkreises im Koordinatenursprung liegt

① $(0\,;\,R)$ $\quad (0\,;\,a \cdot 0{,}85065)$

② $(R \cos 18\,;\,R \sin 18)$ $\quad \left(\tfrac{1}{4} a(\sqrt{5}+1) \,/\, \tfrac{1}{20} a\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\right)$

$(a \cdot 0{,}8090 \,/\, a \cdot 0{,}2628)$

③ $(R \cos 54\,;\,-R \sin 54)$ $\quad \left(\tfrac{1}{2} a \,/\, -a \dfrac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{10}\right)$

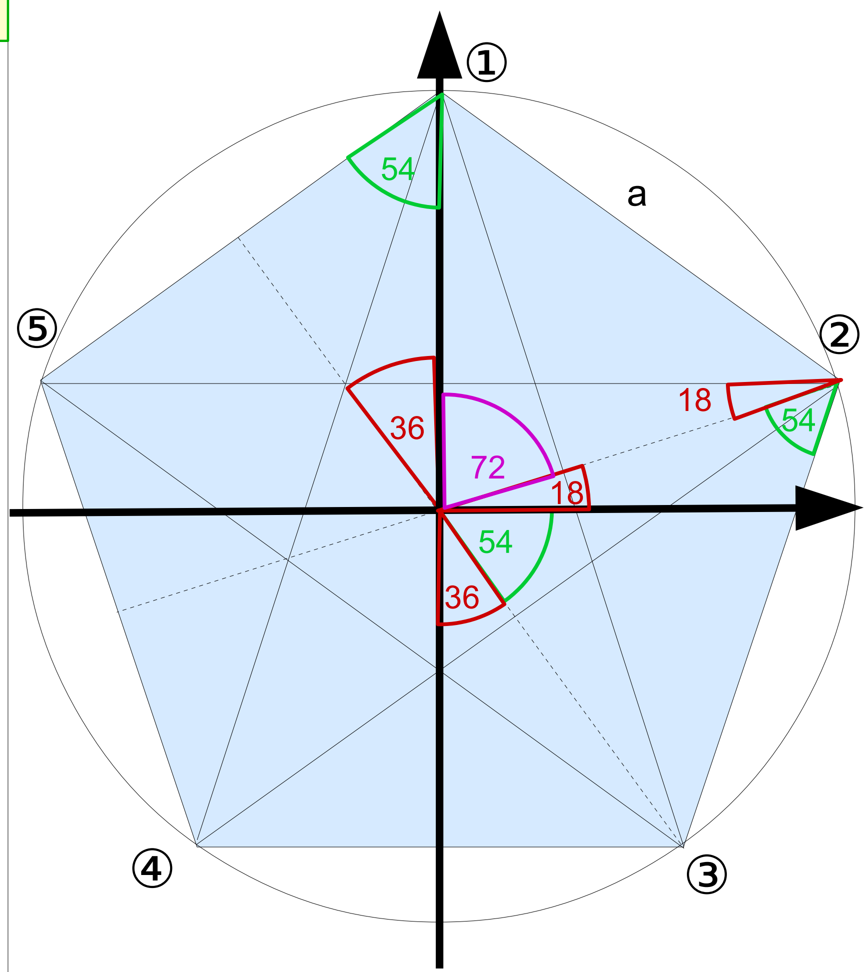
$(a \cdot 0{,}5 \,/\, -a \cdot 0{,}6882)$

④ $(-R \cos 54\,;\,-R \sin 54)$ $\quad \left(-\tfrac{1}{2} a \,/\, -a \dfrac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{10}\right)$

$(-a \cdot 0{,}5 \,/\, -a \cdot 0{,}6882)$

⑤ $(-R \cos 18\,;\,R \sin 18)$ $\quad \left(-\tfrac{1}{4} a(\sqrt{5}+1) \,/\, \tfrac{1}{20} a\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\right)$

$(-a \cdot 0{,}8090 \,/\, a \cdot 0{,}2628)$



Mathematik – Intensivkurs: Fünfeck

Thema	Maße und Formeln	Darstellungen
Reguläres Fünfeck	**Berechnung der Eckpunktkoordinaten**	
	$R \cos 18 = a \dfrac{\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5}\,)}}{10} \bullet \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ $= a \dfrac{\sqrt{20\,(5 + \sqrt{5})^2}}{40} = a\ 1/20\ \sqrt{5}\,(5 + \sqrt{5})$ $= \frac{1}{4}\,a\,(\sqrt{5} + 1)$	$10\,(5 + \sqrt{5})\ \ (10 + 2\sqrt{5})$ $=\ 10\,(5 + \sqrt{5})\ \ 2\,(5 + \sqrt{5})$ $=\ 20\,(5 + \sqrt{5})^2$
	$R \sin 18 = a \dfrac{\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5}\,)}}{10} \bullet \frac{1}{4}\,(\sqrt{5} - 1)$ $= a \dfrac{\sqrt{40\,(5 - \sqrt{5})}}{40}$	$10\,(5 + \sqrt{5})\ \ (\sqrt{5} - 1)^2$ $=\ 10\,(5 + \sqrt{5})\,(5 - 2\sqrt{5} + 1)$ $=\ 10\,(5 + \sqrt{5})\,(6 - 2\sqrt{5})$ $=\ 20\,(5 + \sqrt{5})\,(3 - \sqrt{5})$ $= 20\,(10 - 2\sqrt{5})$ $= 40\,(5 - \sqrt{5})$
	$R \cos 54 = a \dfrac{\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5}\,)}}{10} \bullet \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ $= a \dfrac{\sqrt{400}}{40}$ $= \frac{1}{2}\,a$	$10\,(5 + \sqrt{5})\ \ (10 - 2\sqrt{5})$ $=\ 10\,(5 + \sqrt{5})\ \ 2\,(5 - \sqrt{5})$ $=\ 20\ \ 20$ $= 400$
	$R \sin 54 = a \dfrac{\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5}\,)}}{10} \bullet \frac{1}{4}\,(\sqrt{5} + 1)$ $= a \dfrac{\sqrt{80\,(5 + 2\sqrt{5})}}{40}$ $= a \dfrac{\sqrt{5\,(5 + 2\sqrt{5})}}{10}$	$10\,(5 + \sqrt{5})\ \ (\sqrt{5} + 1)^2$ $=\ 10\,(5 + \sqrt{5})\,(5 + 2\sqrt{5} + 1)$ $=\ 10\,(5 + \sqrt{5})\,(6 + 2\sqrt{5})$ $=\ 20\,(5 + \sqrt{5})\,(3 + \sqrt{5})$ $= 20\,(20 + 8\sqrt{5})$ $= 80\,(5 + 2\sqrt{5})$

Mathematik – Intensivkurs: Fünfeck		
Thema	**Maße und Formeln**	**Darstellungen**

Reguläres Fünfeck

Teilung der Diagonale

Jede Diagonale wird durch zwei andere Diagonalen in drei Teile geteilt.
Die beiden äußeren Abschnitte sind dabei gleich.

$$d1 = \frac{a/2}{\cos 36}$$

$$\cos 36 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

$$d1 = \frac{\tfrac{1}{2}\ a}{\tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)}$$

$$d1 = 2a \frac{(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}$$

$$d1 = 2a \frac{\sqrt{5} - 1}{5 - 1}$$

$$d1 = 2a \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\boxed{d1 = d3 = \tfrac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1) = d - a}$$

$$\begin{aligned} d2 &= d - 2(d - a) = 2a - d \\ &= 2a - \tfrac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1) \\ &= \tfrac{1}{2} a (3 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

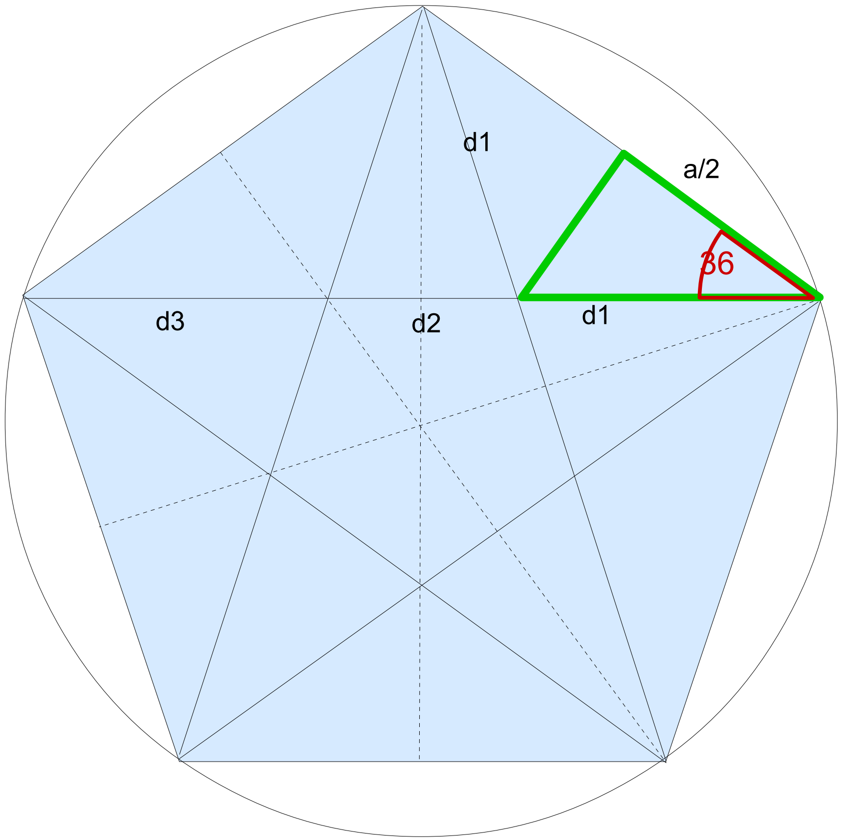
$$d = \tfrac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1)$$

$$\boxed{d2 = \tfrac{1}{2} a (3 - \sqrt{5})}$$

$$\frac{d1}{d} = \frac{d2}{a}$$

$$d2 = \frac{a\ d1}{d}$$

$$\boxed{\frac{d1}{d2} = \frac{d}{a}}$$



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Fünfeck		
Thema	**Maße und Formeln**	**Darstellungen**

Reguläres Fünfeck

Die Raute im Fünfeck

Im Fünfeck gibt es auch eine interessante Raute

$d = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1)$

$d - a = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1)$

$e^2 = (d - a)^2 - (a/2)^2$

$= \frac{1}{4} a^2 (5 - 2\sqrt{5} + 1) - \frac{1}{4} a^2$
$= \frac{1}{4} a^2 (6 - 2\sqrt{5}) - \frac{1}{4} a^2$
$= \frac{1}{4} a^2 (5 - 2\sqrt{5})$

$e = \frac{1}{2} a \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$

$\sin 36 = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$e = (d - a) \sin 36 = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1) \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$= \frac{1}{8} a \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2 (10 - 2\sqrt{5})}$

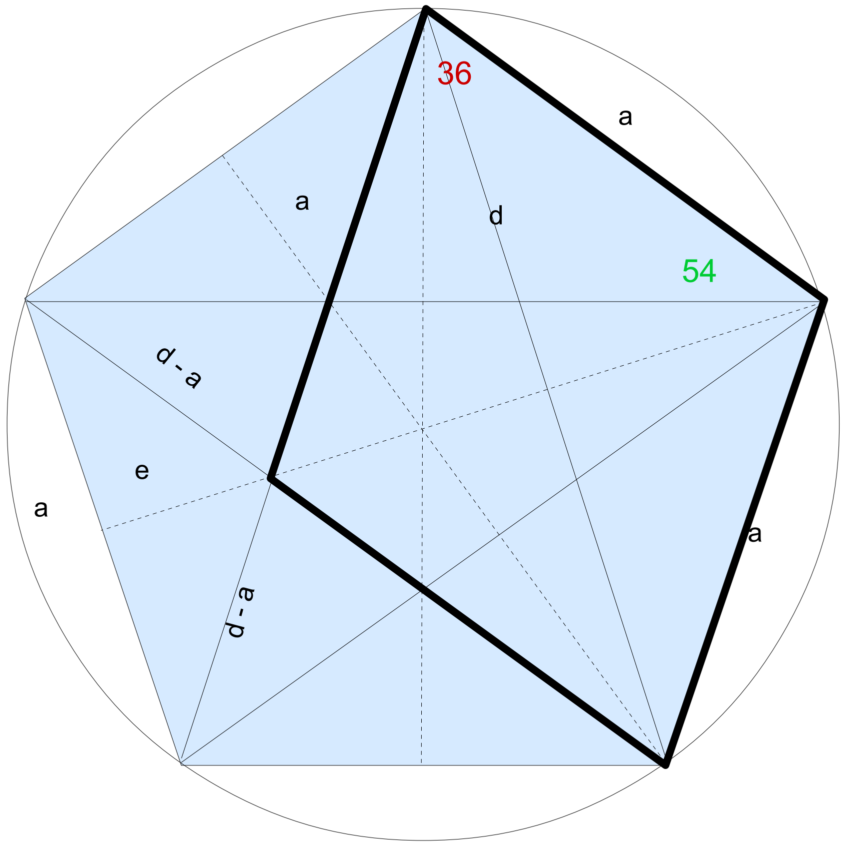
$= \frac{1}{8} a \; 4\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$

$e = \frac{1}{2} a \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$

e ist nicht die Hälfte des Inkreisradius

Die lange Diagonale in der Raute ist d.
Die kurze Diagonale ist $\frac{1}{2} a \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2a \sin 36 = 2 h_1$

$\cos 54 = \sin 36 = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$



$(6 - 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})$
$= 60 + 20 - 32\sqrt{5}$
$= 80 - 32\sqrt{5}$
$= 16 (5 - 2\sqrt{5})$

Treff Lernen
Christina Strauch