Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineare Gleichungs-systeme		

Das Gauss- Verfahren

Der Gauß Algorithmus heißt auch Gauß'sches Eliminierungsverfahren und ist von **CARL FRIEDRICH GAUSS** (1777 - 1855) im Zusammenhang mit seinen astronomischen Forschungen entwickelt worden. Eliminierungsverfahren heißt er deshalb, weil schrittweise unbekannte Größen (Variablen) beseitigt = lateinisch: eliminiert werden.
Der Gauß Algorithmus ist neben dem Algorithmus von **CRAMER** ein effektives Rechenverfahren (Algorithmus) zur Lösung von Gleichungen.

Lineare Gleichungen

Der Gauß Algorithmus wird bei der Lösung von Gleichungen verwendet, die man auch **lineare unabhängige Gleichungssysteme** nennt. Das bedeutet eine bestimmte Anzahl von zusammengehörigen Gleichungen mit einer bestimmten Anzahl von Variablen (Unbekannten).
Die dabei verwendeten Gleichungen sind im Grunde immer Summen. Links vom Gleichheitszeichen stehen die Summanden. Jeder Summand besteht aus einem **x-Wert** (Variable) und einem dazugehörigen Faktor (Zahl), der auch **Koeffizient** heißt. Bei den linearen Gleichungen haben die x-Werte die Potenz 1.
Dadurch, dass ein Summand auch negativ sein kann, kann in der Summe auch eine Subtraktion auftreten, das bedeutet aber letztlich auch eine Summe mit negativen Zahlen.
Rechts vom Gleichheitszeichen steht immer ein Wert, der der gesamten Summe entspricht.

Musterbeispiel:

x-Wert　　Koeffizient

$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4$$

Index

Damit man die x-Werte, die verschieden sind, unterscheiden kann, haben sie eine Fußnote, die man **Index** (Mehrzahl: Indices, sprich: indizehs) nennt. Eine lineare Gleichung kann beliebig viele Summanden haben.

Gleichungssystem

Ein Gleichungssystem besteht aus mehreren linearen Gleichungen. Dabei muss man beachten, dass die x-Werte mit demselben Index in allen Gleichungen gleich groß sind. Man kann also sagen, dass die x-Werte mit demselben Index dieselben Summanden darstellen. Allerdings kann ein Summand zwar denselben Index, aber verschiedene Koeffizienten haben. Das bedeutet, derselbe Summand hat verschiedene Faktoren.

Auch die rechten Seiten bei einem Gleichungssystem haben verschiedene Werte. Alles in allem geht es ja immer darum, dass durch mehrere verschiedene Gleichungen ein und dieselben x-Werte ermittelt werden können. Man kann sich jede Gleichung vorstellen als eine andere Summe mit anderen Vielfachen derselben x-Werte.

Das Verfahren arbeitet mit sogenannten Äquivalenzumformungen, das sind solche Umformungen, die die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändern.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Matrizen

Da das Lösen von Gleichungssystemen nicht von der Bezeichnung der Variablen, sondern nur von den Koeffizienten vor den Variablen abhängt, hat sich eine übersichtlichere Schreibweise eingebürgert, bei der nur die Koeffizienten geschrieben werden. Diese mathematischen Gebilde nennt man:

M a t r i z e n

Eine Tabelle in der Darstellung $A_{(mn)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt **mxn Matrix**.

Daraus folgt auch, dass Matrizen nicht notwendig die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten haben müssen. Es ist möglich, dass die Anzahl der Zeilen größer als die Anzahl der Spalten ist, aber auch, dass die Anzahl der Spalten größer als die Anzahl dem Zeilen ist.

Eine quadratische Matrix (gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten) heißt **obere (untere) Dreiecksmatrix**, wenn alle Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen 0 sind.

$$\begin{matrix} 0{,}5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Eine quadratische Matrix (gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten) heißt **Diagonalmatrix**, wenn alle Elemente unterhalb und oberhalb der Hauptdiagonalen 0 sind.

$$\begin{matrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineare Gleichungssysteme	**Der Gauss-Algorithmus**	

1.) Das Vertauschen von zwei Gleichungen / zwei Zeilen der Matrix

2.) Addition von zwei Gleichungen / Zeilen der Matrix und Ersetzen einer Gleichung / Zeile durch die Summe.

3.) Multiplikation einer Gleichung / Zeile der Matrix mit einer Zahl ungleich Null.

Für jede Zeile i, startend mit der obersten Zeile mit i = 1 bis zur vorletzten Zeile tue folgendes:

- für jede Zeile j, wobei j > i – Die Zeile j liegt somit immer unter der Zeile i – addiere oder subtrahiere ein Vielfaches der Zeile i von j, so dass die Variable a_{ji} – i gibt die Spaltennummer an – 0 wird.

Beim Gauß Algorithmus werden schrittweise zwei Rechenschritte mehrfach ausgeführt.

a) Eine Gleichung wird mit einem Faktor multipliziert, es wird also ein Vielfaches der Gleichung gebildet.

b) Das Vielfache der Gleichung wird zu einer anderen Gleichung (oder zu mehreren Gleichungen) addiert.

zu a)
Man beginnt grundsätzlich mit der Gleichung in der ersten Zeile. Es kann durch aus sinnvoll sein, dass man die Zeilen vertauscht, damit der manuelle Rechenaufwand klein bleibt. Für maschinelles Rechnen hat das keine Bedeutung.

Die Idee der Vervielfachung ist folgende: Wenn man alle Glieder der Gleichung, also alle Summanden und **auch** die rechte Seite mit ein und demselben Faktor multipliziert, dann ändert sich der Gesamtwert der Gleichung nicht. Wird die erste Gleichung aus dem Beispiel mit (-3) multipliziert, ändert sich zwar die Form der Summanden und die Summe, aber nicht der Gesamtwert der Gleichung.

Dieses Verfahren ist bereits vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit 2 Variablen bekannt. Zur Anwendung des Additionsverfahrens oder auch für das Gleichsetzungsverfahren ist es oftmals notwendig die gesamte Gleichung zu multiplizieren.

Musterbeispiele:

Zur Vereinfachung soll im Folgenden die Matrixschreibweise für lineare Gleichungssysteme verwendet werden.

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & 3x_2 & -4x_3 & =5 \\ x_1 & & +2x_3 & =0 \\ -5x_1 & -4x_2 & +3x_3 & =-1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Lineares Gleichungssytem... ...in Matrixschreibweise

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = -15$$

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineare Gleichungs-systeme	**Welches Vielfache muss man bilden ?**	

Gesetze und Regeln

Zuerst bleibt die Gleichung 1 unberührt. Man muss von Gleichung1 oder einer darunterliegenden Gleichung dasjenige Vielfache bilden, das zu den anderen Gleichungen addiert einen kompletten Summanden (auf der linken Seite) verschwinden lässt (eliminiert). Bei Benutzung der Gleichung 1 muss es der Summand mit der Variablen x_1 sein.
Kompletter Summand heißt: x-Wert und Koeffizient.

Die Gleichung1 bleibt unangetastet und jede der folgenden Gleichungen wird auf diese Weise bearbeitet.
Sind alle Koeffizienten für die Variable x_1 ab der Gleichung 2 verschwunden, startet man mit der Gleichung 2 aufs Neue. Gleichung 1 und 2 bleiben jetzt unangetastet. Ab der Gleichung 3 bildet man jetzt den Multiplikationsfaktor so, dass ab der Zeile 3 die Variable x_2 verschwindet.
Anschließend setzt man das Verfahren fort, bist eine Matrix entsteht, die unterhalb der Diagonale nur noch 0 Einträge zu stehen hat.

Erster Durchlauf i = 1:

$$\begin{array}{r c c c c} \text{Aktuelles i} \rightarrow & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles j} \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{array}$$

$$\begin{array}{r c c c c} \text{Aktuelles i} \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles j} \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{array}$$

$$\begin{array}{r c c c c} \text{Aktuelles i} \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles j} \rightarrow & 0 & X & X & X \end{array}$$

Zweiter Durchlauf i = 2:

$$\begin{array}{r c c c c} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles i} \rightarrow & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles j} \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ & 0 & X & X & X \end{array}$$

$$\begin{array}{r c c c c} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles i} \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles j} \rightarrow & 0 & 0 & X & X \end{array}$$

Aus der so gewonnenen Zeilenstufenform der Matrix lassen sich die Lösungen berechnen. Dies machen wir, indem wir das Gleichungssystem in Matrixschreibweise wieder in einzelne Gleichungen umformen und von unten beginnend nach den jeweiligen Variablen auflösen. Wenn das Gleichungssystem mehrere Lösungen haben kann, dann erkennen wir hierbei, dass es Variablen gibt, deren Werte wir nicht bestimmen können. Dieses sind dann die freien Variablen.

Musterbeispiele

Im Beispiel wird das negative 2-fache der Gleichung 2 zur Gleichung 1 addiert. Damit wird $\mathbf{x_1}$ in der Gleichung 2 gleich 0, fällt also weg.

$$\begin{array}{l r} \text{Gleichung 2:} & x_1 + \quad + 2x_3 = 0 \quad | * -2 \\ & = -2x_1 \quad - 4x_3 = 0 \\ \text{Gleichung 1:} & + \quad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ \hline \text{neue Gleichung 2:} & + 3x_2 - 8x_3 = 5 \end{array}$$

Dritter Durchlauf i = 3:

$$\begin{array}{r c c c c} & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles i} \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles j} \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \end{array}$$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise:

Die **Koeffizientenmatrix** besteht nur aus den Koeffizienten vor den Variablen

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die **erweiterte Matrix** ist die um die rechte Spalte des Gleichungssystems erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

Die rechte Seite wird üblicherweise durch einen senkrechten Strich abgetrennt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 1 \downarrow + \;\; 2 \downarrow + \\ -3 \\ \qquad\;\; 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 11 & -7 & -10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ 11 \downarrow + \\ -10 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right)$$

Die unterste Matrix ist jetzt in Dreiecksform. Jetzt kann man schrittweise nach den Variablen auflösen:

Aus (III) $-51 x3 = -153$ folgt: $x_3 = 3$

eingesetzt in (II) ergibt sich: $10x_2 - 33 = -23$; daraus folgt: $x_2 = 1$

x_2 und x_3 in (I) eingesetzt ergibt: $3x_1 + 4 - 6 = 4$; daraus folgt $x_1 = 2$

Der Algorithmus läßt sich auch fortsetzen, um von einer Dreiecksmatrix zu einer Diagonalmatrix zu kommen. Diesen Weg beschreitet auch der GTR, wenn er das Ergebnis eines Gleichungssystem angibt. Das Ergebnis der Dreiecksmatrix war folgendes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ll} & 51 \uparrow + \\ 51 \uparrow + & \\ -11 & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 153 & 204 & 0 & 510 \\ 0 & 510 & 0 & 510 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right)$$

Um die Zahlen zu verkleinern wurde jede Zeile entsprechend dividiert.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 51 & 68 & 0 & 170 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -1 \uparrow + \\ 68 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-51} & 0 & 0 & -102 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-17} & -51 \end{array}\right)$$

Damit ist eine Diagonalmatrix entstanden, dh. eine Matrix, die nur noch in der Hauptdiagonale Zahlen hat und alle anderen Einträge sind 0. Jetzt ist jede Zeile durch den Wert, der in der Hauptdiagonale steht zu dividieren und man erhält auf der rechten Seite die Werte der einzelnen Variablen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen

Rang einer Matrix

In diesem Zusammenhang spielt der Begriff vom Rang einer Matrix eine Rolle. Unter dem Rang einer Matrix versteht man Anzahl die linear unabhängigen Zeilen. (Der Begriff wird in der Vektorrechnung noch einmal erklärt).

Bei Anwendung des Gauss-schen Algorithmus sind es die Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilen, dh. Gleichungen bei denen nicht alle Elemente = 0 sind.

Gleichungssystem nicht lösbar

1) Ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der um die rechte Seite erweiterten Matrix, so ist das Gleichungssystem lösbar.

$$Rg\,(A) = Rg(A|b)$$

Ist der Rang der beiden Matrizen verschieden, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

$$Rg\,(A) \neq Rg(A|b)$$

Veranschaulichung:
Ein Gleichungssystem der Größe 3x3 kann interpretiert werden als drei Ebenen, die sich im Raum (R^3) schneiden.

- Im Falle der linearen Unabhängigkeit schneiden die sich in einem Punkt.
- Liegen zwei Ebenen parallel, dann gibt es keine Schnittpunkte.
- Sind die Ebenen linear abhängig, dann schneiden sie sich in einer Geraden. Eine Gerade hat einen frei wählbaren Parameter.

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 12\,x_3 &= 5 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

liefert nach Anwendung des Gauss-schen Algorithmus folgende Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Rg\,(A) = 1 \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Rg(A|b) = 2$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Matrix sind unterschiedlich
=> Gleichungssystem unlösbar

Erklärung:
Die zweite Zeile ist genau das doppelte von der ersten Zeile, sowohl bei den Koeffizienten, als auch bei der rechten Seite. Geometrisch gesehen handelt es sich dabei um die gleiche Ebene im R^3
Die dritte Zeile ist bei den Koeffizienten das Dreifache der ersten Zeile, aber nicht bei der rechten Seite. Das bedeutet, dass die Ebenen parallel sind und deshalb keine Schnittpunkte entstehen können.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

Gleichungssystem hat genau eine Lösung

2) Ist der Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix gleich der Anzahl der Variablen, dann ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

$$Rg\,(A) = Rg(A|b) = n$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

liefert nach Anwendung des Gauss-schen Algorithmus folgende Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \quad Rg\,(A) = 3 \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -2 \end{pmatrix} \quad Rg(A|b) = 3$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Matrix sind gleich

=> Gleichungssystem lösbar

Der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Matrix sind gleich Anzahl der Variablen

=> Gleichungssystem eindeutig lösbar

Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

3) Ist der Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix gleich, aber kleiner der Anzahl der Variablen, dann ist das System lösbar, aber nicht eindeutig, sondern unter Verwendung eines Parameters.

$$Rg\,(A) = Rg(A|b) < n$$

Je Größer die Differenz zwischen der Anzahl der Variablen und der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen, desto mehr Parameter sind zu verwenden.

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 12x_3 &= 6 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

liefert nach Anwendung des Gauss-schen Algorithmus folgende Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Rg\,(A) = 1 \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Rg(A|b) = 1$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Matrix sind gleich

=> Gleichungssystem lösbar

Der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Matrix kleiner als die Anzahl der Variablen

=> Gleichungssystem mit Parametern lösbar

Da der Rang um 2 niedriger ist, als die Anzahl der Variablen werden zwei Parameter gebraucht: $x_2 = t$; $x_3 = s$ $\quad x_1 = 2 - 4t - 4s$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineare Gleichungssysteme	**Das Determinantenverfahren (Cramersche Regel)** **Die zweireihige Determinante** Als Determinante bezeichnet man ein mathematisches Konstrukt, das nur aus den Koeffizienten des Gleichungssystems besteht. $a_1 x + b_1 y = c_1$ $a_2 x + b_2 y = c_2$ Koeffizientendeterminante: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ Berechnung einer zweireihigen Determinante: $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$	Beispiel: $3x + 6y = 12$ $-4x + 2y = 4$ $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3*2 - (-4)*6 = 30$
	Ersetze in der ersten Spalte die Werte a_i durch die Werte c_i $\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$	$\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12*2 - 4*6 = 0$
	Ersetze in der zweiten Spalte die Werte b_i durch die Werte c_i $\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$	$\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 3*4 - (-4)*12 = 60$
	Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten spiegeln sich auch bei der Berechnung über Determinanten wider: 1. Eindeutige Lösung: D ist von 0 verschieden 2. Unendlich viele Lösungen: $D = D_x = D_y = 0$; alle drei Determinanten haben den Wert 0. 3. Nicht Lösbar: D = 0 und mindesten eine der anderen Determinanten ist verschieden von 0	$x = \frac{\mathbf{D_x}}{\mathbf{D}} = \frac{0}{30}$ Die Determinante, in der die rechte Seite in die erste Spalte eingesetzt wird(D_x), wird durch die Determinante dividiert, die aus den Koeffizienten errechnet wurde. Das Ergebnis ist die Variable x. $y = \frac{\mathbf{D_y}}{\mathbf{D}} = \frac{60}{30}$ Die Determinante, in der die rechte Seite in die zweite Spalte eingesetzt wird(D_y), wird durch die Determinante dividiert, die aus den Koeffizienten errechnet wurde. Das Ergebnis ist die Variable y.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 11

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineare Gleichungs-systeme	**Die dreireihige Determinante**	Beispiel:

Gesetze und Regeln

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$

Koeffizientendeterminante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Berechnung einer dreireihigen Determinante:

(Ergänze die Determinante rechts noch einmal um die erste und zweite Spalte. Multipliziere alle Diagonalen von links oben nach rechts unten mit + und multipliziere alle Diagonalen von links unten nach rechts oben mit –)

$$\mathbf{D} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

(rote Pfeile) *(blaue Pfeile)*

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 \; - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Ersetze in der ersten Spalte die Werte a_i durch die rechte Seite d_i

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ersetze in der zweiten Spalte die Werte b_i durch die rechte Seite d_i

$$\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ersetze in der dritten Spalte die Werte c_i durch die rechte Seite d_i

$$\mathbf{D_z} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Dieses Verfahren ist auch für größere Gleichungssysteme anwendbar, allerdings ist dann die Berechnung der Determinanten etwas aufwendiger.

Musterbeispiele

Beispiel:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 7 \\ 2x - 3y + 5z &= 17 \\ 3x - 2y - z &= 12 \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right. = 1\cdot(-3)\cdot(-1) + (-1)\cdot 5\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot(-2) - 3\cdot(-3)\cdot 2 - (-2)\cdot 5\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot(-1)$$

= 1*(-3)*(-1) + (-1)*5*3 + 2*2*(-2) – 3*(-3)*2 – (-2)*5*1 – (-1)*2 * (-1)

$= 3 - 15 - 8 \quad + 18 + 10 - 2$

$= -23 + 26 = \mathbf{6}$

$$\mathbf{D_x} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & -1 & 2 & 7 & -1 \\ 17 & -3 & 5 & 17 & -3 \\ 12 & -2 & -1 & 12 & -2 \end{array}\right.$$

= 7*(-3)*(-1) + (-1)*5*12 + 2*17*(-2) – 12*(-3)*2 – (-2)*5*7 – (-1)*17*(-1)

$= 21 - 60 - 68 \quad + 72 + 70 - 17$

$= -107 \quad + 125$

$= \mathbf{18}$

$$\mathbf{D_y} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 7 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 17 & 5 & 2 & 17 \\ 3 & 12 & -1 & 3 & 12 \end{array}\right.$$

= 1*17*(-1) + 7*5*3 + 2*2*12 – 3*17*2 – 12*5*1 – (-1)*2*7

$= -17 + 105 + 48 \quad - 102 - 60 + 14$

$= 136 \quad - 148$

$= \mathbf{-12}$

$$\mathbf{D_z} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 7 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 17 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 12 & 3 & -2 \end{array}\right.$$

= 1*(-3)*12 + (-1)*17*3 + 7*2*(-2) – 3*(-3)*7 – (-2)*17*1 – 12*2 * (-1)

$= -36 - 51 - 28 \quad + 63 + 34 + 24$

$= -115 + 121 = \mathbf{6}$

$$x = \frac{\mathbf{D_x}}{\mathbf{D}} = \mathbf{3} \qquad y = \frac{\mathbf{D_y}}{\mathbf{D}} = \mathbf{-2} \qquad y = \frac{\mathbf{D_z}}{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$