Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bruchrechnen

Die Division ganzer Zahlen führt im Ergebnis nicht immer zu einer ganzen Zahl. Währen 26 : 4 oder -30 : 6 im Bereich der ganzen Zahlen noch ausführbar ist, kann man das bei 27 : 6 nicht mehr. Aber allen diesen Brüchen ist eines gemeinsam:

> **Das Ergebnis besteht aus einer ganzen Zahl**
> **und**
> **einem Rest, der nicht mehr als ganze Zahl teilbar ist.**

Man kann sogar noch mehr sagen:

> **Der Rest ist immer kleiner als der Divisor bei der Divisionsaufgabe.**

Aus der Division sind die Bezeichnungen Dividend und Divisor bekannt. Der Dividend steht vor dem Doppelpunkt, der Divisor dahinter. Bei der Bruchrechnung schreibt man die beiden Zahlen übereinander mit einer waagerechten Linie, dem **Bruchstrich**, dazwischen:

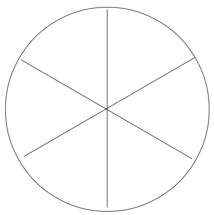
$\frac{27}{6}$ Dabei bezeichnet man die Zahl über dem Bruchstrich als **Zähler** und die unter dem Bruchstrich als **Nenner.** Der Zähler gibt an, wieviele Teile benutzt werden sollen, der Nenner gibt an, in wieviele Teile ein Ganzes zu zerlegen ist.

Im oben angegebenen Beispiel 27 : 6 erhält man das Ergebnis:

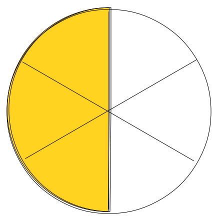
27 : 6 = 4 Rest 3.

Die Frage, die steht, ist: Wie kann man den Rest, der bereits kleiner als 1 ist trotzdem in 6 Teile teilen. Dazu veranschaulicht man sich das Problem an zwei Zeichnungen.

Wir stellen uns **das Ganze** als **eine Torte** eines Geburtstags dar und wir sollen diese Torte in 6 Teile zerlegen, da wir durch 6 dividieren sollen.



Von diesen Teilen brauchen wir noch 3, nämlich den Rest, um die Aufgabe zu lösen.



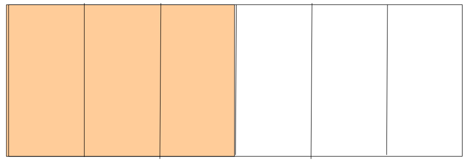
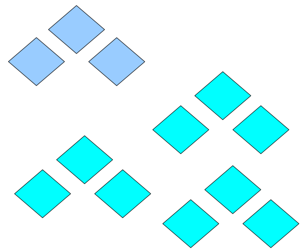
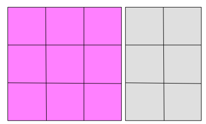
Ergebnis:
27 : 6 sind 4 Ganze
+ 3 Teile, wenn ich vorher ein weiteres Ganzes in 6 Teile geteilt habe.

Man braucht mehr als 4 Ganze, aber weniger als 5 Ganze, also liegt das Ergebnis 27 : 6 zwischen der ganzen Zahl 4 und der ganzen Zahl 5.

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	Begriffe der Bruchrechnung	
	Ein Bruch drückt einen Anteil aus. Jede Division lässt sich als Bruch schreiben. Der Dividend heißt dann **Zähler**, der Divisor heißt **Nenner**.	$\frac{3}{4}$ heißt „3 von 4“
	Ist der Zähler kleiner als der Nenner spricht man von einem **echten Bruch**	$\frac{12}{35}$
	Ist der Zähler größer als der Nenner spricht man von einem **unechten Bruch**	$\frac{37}{13}$
	Eine Kombination aus einer ganzen Zahl und einem Bruch bezeichnet man als eine **gemischten Bruch**	$2\frac{3}{8} = 2 + \frac{3}{8}$
	Jeder **gemischte Bruch** lässt sich in einen **unechten Bruch** umwandeln und auch umgekehrt	$2\frac{3}{8} = 2 + \frac{3}{8} = \frac{16}{8} + \frac{3}{8} = \frac{19}{8}$
	Ein Bruch wird **erweitert**, indem man Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor multipliziert.	$\frac{2}{3} \overset{4}{=} \frac{8}{12}$
	Ein Bruch wird **gekürzt**, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert.	$\frac{8}{12} \underset{4}{=} \frac{2}{3}$
	Das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** zweier Zahlen ist der kleinste Wert, • der in beiden Vielfachmengen vorkommt. • der durch beide Zahlen teilbar ist.	$V_8 = \{8, 16, 24, 32, 40, 48...\}$ Vielfachmenge von 8 $V_{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72...\}$ Vielfachmenge von 12 kgV(8,12) = 24
	Der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** zweier Zahlen ist der größte Wert, • der in beiden Teilermengen vorkommt. • durch den beide Zahlen teilbar sind	$T_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$ Teilermenge von 15 $T_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ Teilermenge von 20 ggT(15,20) = 5
	Der **Hauptnenner** mehrerer Brüche ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner aller Brüche	Der HN von $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ ist 12. $V_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24...\}$ $V_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36...\}$ kgV(4,6) = 12
	Haben Brüche gleiche Nenner, so ist der Bruch der größere, der den größeren Zähler hat	$\frac{8}{12} > \frac{5}{12} > \frac{2}{12}$
	Haben Brüche gleiche Zähler, so ist der Bruch der größere, der den kleineren Nenner hat.	$\frac{8}{2} > \frac{8}{7} > \frac{8}{13}$
	Sind Zähler und Nenner verschieden, so können sie nur verglichen werden, wenn man sie zuvor so erweitert (oder kürzt), dass sie den gleichen Nenner oder den gleichen Zähler haben.	
	Der **Kehrwert** eines Bruches entsteht, wenn man Zähler und Nenner vertauscht	Der Kehrwert von $\frac{16}{37}$ ist $\frac{37}{16}$

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bruchrechnen	**Wie bestimmt man den Anteil, wenn man ein Ganzes, das aus mehreren Einzelnen besteht, und dessen Bruchteil angegeben hat?** Wenn man das Ganze und dessen Bruchteil kennt, dann bestimmt man den entsprechenden Anteil, indem man • zählt, aus wie vielen Einzelnen das Ganze besteht ist - dies ist der **Nenner** des Anteils - und dann • zählt, wie viele dieser Einzelnen betrachtet werden - dies ist der **Zähler** des Anteils.	Insgesamt sind 8 x 6 = 48 Quadrate von 1 cm Länge gegeben. Damit ist der Wert des Nenners 48. Es sind 16 dieser Quadrate rot markiert; damit enthält der Zähler den markierten Anteil von Anteils ist also 16; Der gesuchte Anteil ist: $\frac{16}{48}$ 
	Wie bestimmt man den Bruchteil, wenn man ein einzelnes Ganzes und den Anteil angegeben hat? Wenn man das Ganze und den Anteil kennt, dann bestimmt man den entsprechenden Bruchteil, indem man • das Ganze in so viele gleichgroße Teile teilt, wie der **Nenner** des Anteils angibt, und dann • so viele dieser gleichgroßen Teile betrachtet, wie der **Zähler** des Anteils angibt.	Wir stellen uns **das Ganze** als **eine Blatt Papier.** Wir sollen von diesem Blatt 3 / 6 abschneiden: Man teilt das Blatt in gleichgroße Teile, wie sie der Nenner (=6) des gesuchtes Bruches vorgibt. Von diesen Teilen sind so viele zu markieren, wie sie der Zähler (=3) angibt. 
	Wie bestimmt man den Bruchteil, wenn man ein Ganzes, das aus mehreren Einzelnen besteht, und den Anteil angegeben hat? Wenn man das Ganze und den Anteil kennt, dann bestimmt man den entsprechenden Bruchteil, indem man • das Ganze in so viele gleichgroße Teile teilt, wie der **Nenner** des Anteils angibt, und dann • so viele dieser gleichgroßen Teile betrachtet, wie der **Zähler** des Anteils angibt.	Markiere 3/4 der 12 Vierecke: Dazu teilt man zuerst die 12 Vierecke in 4 (Nenner des Anteils) gleichgroße Teile; jeder dieser Teile besteht nun aus 3 Vierecken. markiere danach 3 (Zähler des Anteils) dieser gleichgroßen Teile; insgesamt hat man nun 9 Vierecke markiert. 
	Wie bestimmt man das einzelne Ganze, wenn man den Bruchteil und den Anteil angegeben hat? Wenn man den Bruchteil und den Anteil kennt, dann bestimmt man das Ganze, indem man • den Bruchteil in so viele gleichgroße Teile teilt, wie der **Zähler** des Anteils angibt, und dann • so viele dieser gleichgroßen Teile zusammenfasst, wie der **Nenner** des Anteils angibt.	Dieses Quadrat ist 9/15 eines ganzen Rechtecks: Zuerst teilt man den Bruchteil in 9 (Zähler des Anteils) gleichgroße Teile. Dann fasst man 15 (Nenner des Anteils) dieser gleichgroßen Teile zusammen. 

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bruchrechnen

Wie bestimmt man ein Ganzes, das aus mehreren Einzelnen besteht, wenn man den Bruchteil und den Anteil angegeben hat?

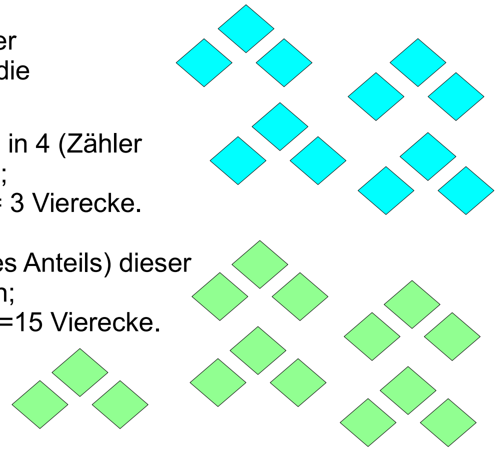
Wenn man den Bruchteil und den Anteil kennt, dann bestimmt man das Ganze, indem man
• den Bruchteil in so viele gleichgroße Teile teilt, wie der **Zähler** des Anteils angibt, und dann
• so viele dieser gleichgroßen Teile zusammenfasst, wie der **Nenner** des Anteils angibt.

Die 12 Vierecke sind 4/5 einer Gesamtmenge, wie groß ist die Gesamtmenge ?

Zuerst teilt man den Bruchteil in 4 (Zähler des Anteils) gleichgroße Teile;
jeder Teil besteht aus 12 : 4 = 3 Vierecke.

Dann fasst man 5 (Nenner des Anteils) dieser gleichgroßen Teile zusammen;
man hat nun insgesamt 5 · 3 =15 Vierecke.

Von 15 Teilen sind 4/5 genau 12 Teile.



Bezeichnungen

- Ein Bruch der Form $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6}$ heißt **Stammbruch**.
- Brüche der Form $\frac{2}{3};\frac{6}{13};\frac{34}{101};\frac{17}{56}$ bei denen der Zähler kleiner als der Nenner ist, heißen **echte Brüche**.
- Umgekehrt heißen Brüche der Form $\frac{5}{2};\frac{13}{3};\frac{56}{12};\frac{121}{56}$ bei denen der Zähler größer oder gleich dem Nenner ist, **unechte Brüche**.
- Brüche der Form $\frac{8}{2};\frac{24}{3};\frac{32}{8};\frac{0}{5}$ bei denen der Zähler ein Vielfaches des Nenners ist, heißen **Scheinbrüche**.
- Ausdrücke der Form $3\frac{2}{3}$; $18\frac{6}{13}$; $7\frac{34}{101}$ bei denen eine ganze Zahl und ein Bruch zusammenstehen heißen **gemischte Zahlen**

Bemerkung 1:
Ein unechter Bruch, der kein Scheinbruch ist, lässt sich als gemischte Zahl darstellen.
Bemerkung 2: $3\frac{2}{3}$ bedeutet nicht $3 * \frac{2}{3}$ sondern $3 + \frac{2}{3}$

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bruchrechnen		

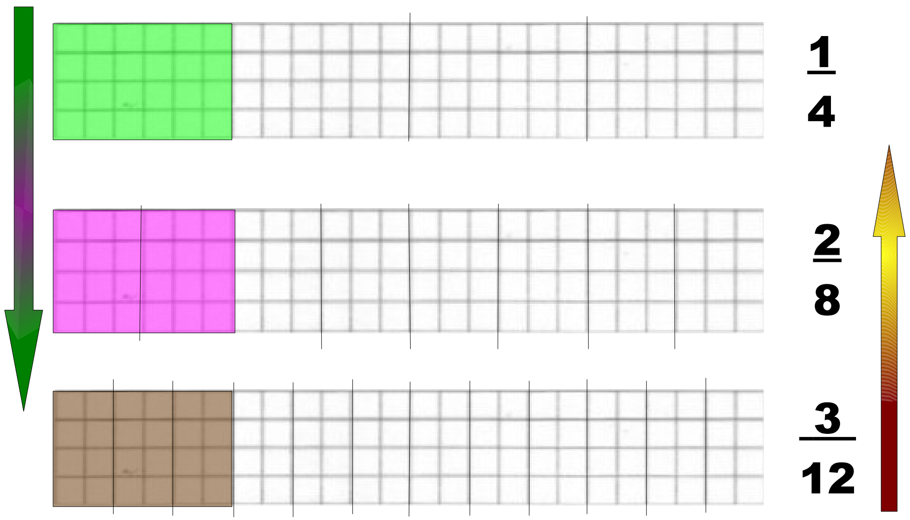
Spezielle Brüche

$$\frac{a}{b} = a * \frac{1}{b} \qquad \frac{a}{a} = a \qquad \frac{a}{1} = a \qquad \frac{0}{a} = 0$$

$$\frac{a}{0} = \text{unzulässig} \qquad \frac{0}{0} = \text{erlaubt, Ergebnis unbestimmt}$$

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner mit dem gleichen **Faktor multipliziert**.



Im Umkehrschuss dazu gilt ebenfalls:
Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner mit dem gleichen **Faktor dividiert**.

Erweitern:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 * 5}{5 * 5} = \frac{15}{25} \qquad \frac{9}{8} = \frac{9 * 3}{8 * 3} = \frac{27}{24} \qquad \frac{5}{6} = \frac{5 * 9}{6 * 9} = \frac{45}{54}$$

$$\frac{3}{7} \overset{?}{=} \frac{39}{91}\ (*13) \qquad \frac{21}{31} \overset{?}{=} \frac{84}{124}\ (*4) \qquad \frac{12}{9} \overset{?}{=} \frac{144}{108}\ (*12)$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{(a + b)(a + b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{14}{49} = \frac{2 * 7}{7 * 7} = \frac{2}{7} \qquad \frac{65}{91} = \frac{5 * 13}{7 * 13} = \frac{5}{7} \qquad \frac{1000}{1256} = \frac{125 * 8}{157 * 8} = \frac{125}{157}$$

Kürzen:

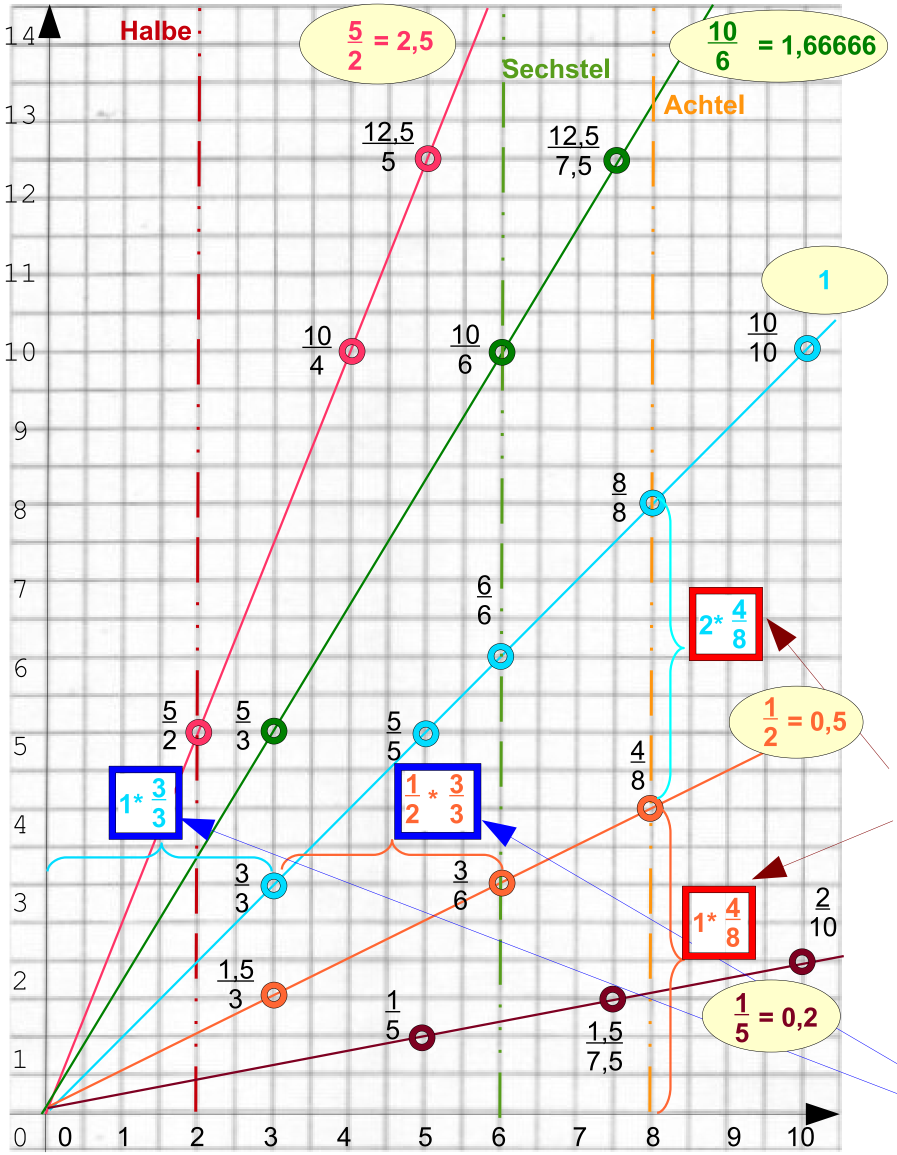
$$\frac{75}{115} \overset{?}{=} \frac{15}{23}\ (:5) \qquad \frac{190}{135} \overset{?}{=} \frac{38}{27}\ (:5) \qquad \frac{196}{266} \overset{?}{=} \frac{14}{19}\ (:14) \qquad \frac{24a(b - c)}{6(b - c)} = 4a$$

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bruchrechnen

Da Brüche ein Ausdruck sind, an dem zwei Zahlen beteiligt sind, kann man sich einen Bruch auch als ein Zahlenpaar P(x|y) in einer Koordinatenebene vorstellen. Der Nenner ist der x-Wert und der Zähler der y-Wert.



$$\frac{5}{2} = \frac{2*5}{2*2} = \frac{10}{4} = \frac{2,5*5}{2,5*2} = \frac{12,5}{5}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{2*5}{2*3} = \frac{5}{3} = \frac{1,25*10}{1,25*6} = \frac{12,5}{7,5}$$

Senkrechte Linien stellen jeweils den gleichen Nenner dar

Waagerechte Linien stellen jeweils den gleichen Zähler dar.

Eine durch den Nullpunkt gehende Gerade stellt immer den gleichen Wert des Bruches dar.

$$\frac{1}{2} = \frac{3*1}{3*2} = \frac{3}{6} = \frac{4*1}{4*2} = \frac{4}{8}$$

Multiplikation mit einer ganzen Zahl ist verdoppeln des y-Wertes (=des Zählers) hier von 4 / 8 zu 8 / 8

$$\frac{1}{5} = \frac{1,5*1}{1,5*5} = \frac{1,5}{7,5} = \frac{2*1}{2*5} = \frac{2}{10}$$

Division durch eine ganze Zahl ist verdoppeln des x-Wertes (=des Nenner) hier von 3 / 3 zu 3 / 6

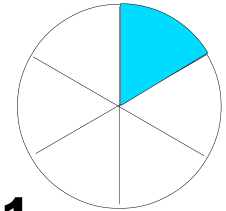
Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bruchrechnen		

Addition von Brüchen

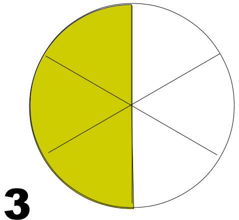
Wir beschränken uns bei der Addition zunächst auf Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen.

Brüche mit gleichem Nenner



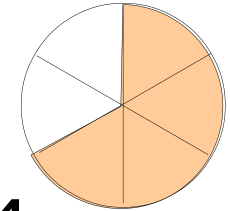
$\frac{1}{6}$

+



$\frac{3}{6}$

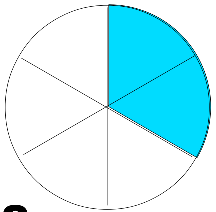
=



$\frac{4}{6}$

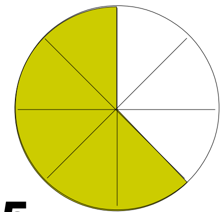
Brüche mit gleichem Nenner werden addiert, indem man die Zähler addiert und die Nenner beibehält.

Brüche mit unterschiedlichem Nenner – wie es nicht geht



$\frac{2}{6}$

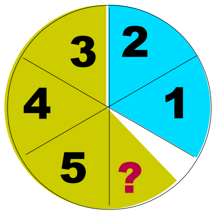
+



$\frac{5}{8}$

=

7/8 plus ein unbekanntes Stück



5/6 plus ein unbekanntes Stück

Wie soll man da die Teile zusammenfügen können und am Ende durchzählen ?

=> also nicht möglich

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bruchrechnen

Bestimmung des Hauptnenners

Bei der Addition und Subtraktion von zwei oder mehreren Brüchen müssen alle Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden. Eine Möglichkeit einen solchen gemeinsamen Nenner zu bestimmen ist das Produkt aller Nenner zu bilden. Diese Zahl kann mitunter größer sein, als unbedingt notwendig und führt zu unnötig großen Zahlen beim Erweitern der Zähler. Die Lösung des Problems heißt:

Primfaktorzerlegung der Nenner

Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von Potenzen von Primzahlen schreiben: $n = a^{n1} * b^{n2} * c^{n3} * .....$, wobei a,b,c Primzahlen sind.

$N1 = a^{p1} * b^{k1} * c^{l1} * ....$
$N2 = b^{p2} * d^{k1} * f^{l1} * ....$
$N3 = a^{p3} * c^{k1} * f^{l1} * ....$

Der Hauptnenner ist das Produkt der höchsten Potenzen aller Primzahlen von allen Nennern.

Achtung!
Nicht 8 ∗ 6, da 6 und 8 keine Primzahlen sind

Beispiel:
$N1 = 48 = 2*2*2*2*3 = 2^4 * 3$
$N2 = 70 = 2*5*7 = 2 * 5 * 7$
$N3 = 63 = 3*3*7 = 3^2 * 7$

Erweiterungsfaktoren:
$3 * 5 * 7$
2^3
$2^4 * 5$

Hauptnenner: $2^4 * 3^2 * 5 * 7$

Erweiterungsfaktoren für den jeweiligen Zähler sind
die Primzahlen die zum Hauptnenner fehlen
(beim ersten Nenner 5 und 7 beim dritten Nenner 5 und 2^4)
oder die Potenzen von Primzahlen die fehlen
(beim ersten Nenner eine 3 beim zweiten Nenner $2*2*2 = 2^3$)

Der so gebildete Hauptnenner ist der kleinste mögliche Nenner für alle Brüche, deshalb wird er auch häufig als das **kleinste gemeinsame Vielfache** bezeichnet.

Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen

1	**1**	16	2^4	31	**31**	46	$2 * 23$
2	**2**	17	**17**	32	2^5	47	**47**
3	**3**	18	$2 * 3^2$	33	$3 * 11$	48	$2^4 * 3$
4	2^2	19	**19**	34	$2 * 17$	49	7^2
5	**5**	20	$2^2 * 5$	35	$3 * 7$	50	$2 * 5^2$
6	$2 * 3$	21	$3 * 7$	36	$2^2 * 3^2$	51	$3 * 17$
7	**7**	22	$2 * 11$	37	**37**	52	$2^2 * 13$
8	2^3	23	**23**	38	$2 * 19$	53	**53**
9	3^2	24	$2^3 * 3$	39	$3 * 13$	54	$2 * 3^3$
10	$2 * 5$	25	5^2	40	$2^3 * 5$	55	$5 * 11$
11	**11**	26	$2 * 13$	41	**41**	56	$2^3 * 7$
12	$2^2 * 3$	27	3^3	42	$2 * 3 * 7$	57	$3 * 19$
13	**13**	28	$2^2 * 7$	43	**43**	58	$2 * 29$
14	$2 * 7$	29	**29**	44	$2^2 * 11$	59	**59**
15	$3 * 5$	30	$2 * 3 * 5$	45	$3^2 * 5$	60	$2^2 * 3 * 5$

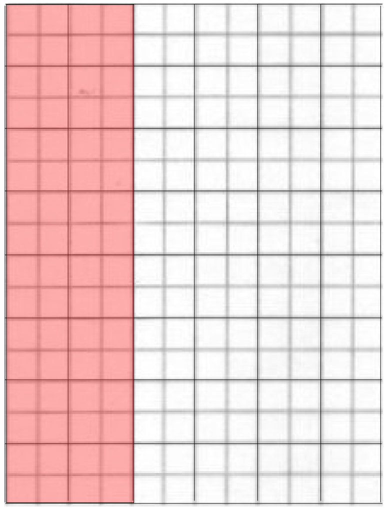
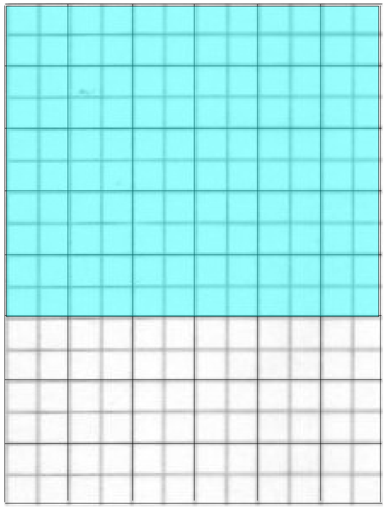
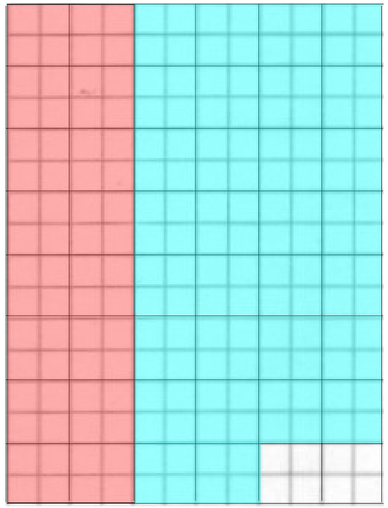
Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bruchrechnen

Brüche mit unterschiedlichem Nenner – wie es geht

$\frac{2}{6}$  $+$ $\frac{5}{8}$  $=$ $\frac{46}{48}$ 

Lösung:

- Erzeuge ein Rechteck mit den Seitenlängen der beiden Nenner.
- Trage jeweils die im Zähler stehende Anzahl von Streifen auf der Seitenlänge des zugehörigen Nenners ab.
- Erzeuge das gleiche Rechteck und verteile alle vorher vorhandenen Quadrate in dem neuen Rechteck.

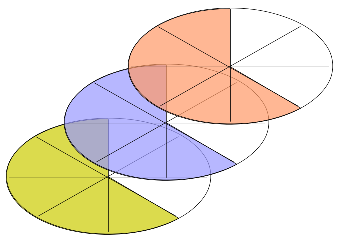
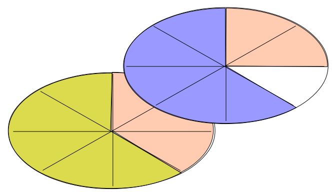
Mathematische Umsetzung:

- Bilde das Produkt der beiden Nenner und erzeuge so einen sogenannten Hauptnenner: 6 * 8 = 48
- Erweitere jeden Bruch so, dass das Produkt im Nenner immer die Größe des Hauptnenners ist. 2*8/ 6*8 = 16 / 48 (ergibt 16 kleine rote Quadrate); 5*6 / 8*6 = 30 / 48 (ergibt 30 kleine blaue Quadrate)
- Addiere die Zähler der beiden Brüche wie vorher, da jetzt Brüche mit gleichem Nenner addiert werden: 16 + 30 = 46

Es werden jetzt 48-igstel addiert
- weder 6-tel (rote Längsstreifen)
- noch 8-tel (blaue Querstreifen)
- sondern einzelne kleine Quadrate (in rot und blau)

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

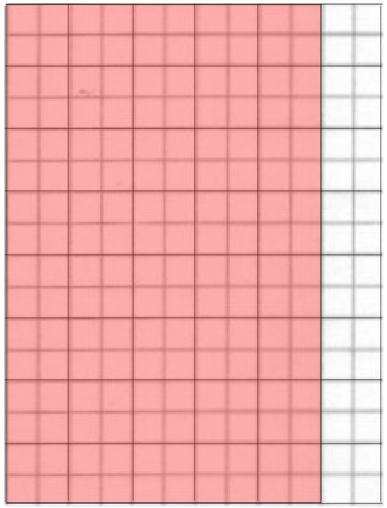
Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bruchrechnen	**Addition gemischter Zahlen**	
	Wie soll man Ausdrücke bearbeiten, die eine ganze Zahl und einen Bruch beinhalten:	$4\frac{2}{7} + 3\frac{3}{5}$
	Ausdrücke dieser Art sind grundsätzlich als Summe von Ganzen und Teilen zu verstehen. Das Rechenzeichen bestimmt die Art der Verknüpfung.	$\left(4+\frac{2}{7}\right)+\left(3+\frac{3}{5}\right)=\left(4+3\right)+\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\right)=7+?$
	Damit reduziert sich die Berechnung auf die Addition von ganzen Zahlen und die Addition von Brüchen mit unterschiedlichen Nennern. Damit bleibt das Problem des Hauptnenners bestehen. Deshalb entschließt man sich üblicherweise die ganzen Zahlen mit als Bruch des zugehörigen Nenners zu schreiben:	$\left(\frac{4*7}{7}+\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3*5}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{30}{7}+\frac{18}{5}$
	Der Hauptnenner ist das Produkt der beiden Nenner. Um den Wert des Bruches zu erhalten muss der vorhandene Bruch so erweitert werden, dass im Nenner der Hauptnenner als Ergebnis einer Multiplikation (nicht Addition) entsteht:	$\frac{30}{7}+\frac{18}{5}=\frac{30*5}{7*5}+\frac{18*7}{5*7}=\frac{150+126}{35}$
	Multiplikation mit einer ganzen Zahl	
	 	
	$3*\frac{5}{8}=\frac{15}{8}=\frac{8}{8}+\frac{7}{8}=1\frac{7}{8}$	
	Multipliziere den Zähler und lasse den Nenner unberührt.	

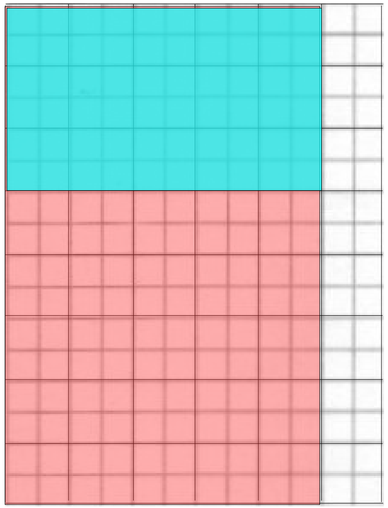
Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

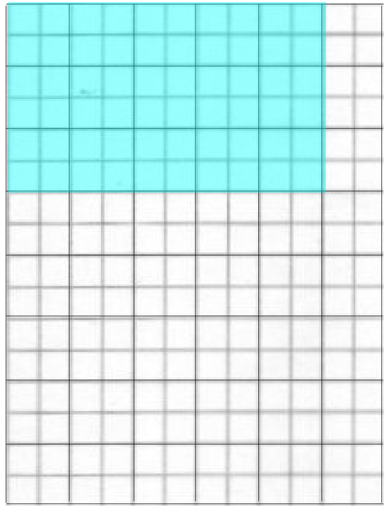
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bruchrechnen	**Multiplikation von Brüchen**	



$\frac{5}{6} * \frac{3}{8}$



$= \frac{15}{48}$



Lösung:

- Erzeuge ein Rechteck mit den Seitenlängen der beiden Nenner.
- Trage jeweils die im Zähler des ersten Bruchs stehende Zahl als Streifen in diesem Rechteck ab.
- Von dem so entstandenen Ausgangsrechteck (rot) markiere so viele Streifen, wie sie im Zähler des zweiten Bruches angegeben sind (blau). das Ergebnis ist die Zahl der von beiden Farben überdeckten Quadrate.

Mathematische Umsetzung:

- Bilde das Produkt der beiden Nenner: 6 * 8 = 48
- Bilde das Produkt der beiden Zähler: 5 * 3 = 15

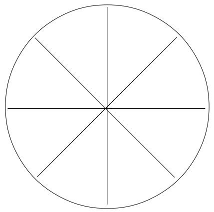
Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bruchrechnen	**Division von Brüchen**	

Division:

1) Ganze Zahlen: 12 : 3
   In wieviele Teile kann man 12 Zerlegen, damit jedes Teil 3 Einheiten groß ist in 4 Teile

2) Ein Ganzes durch einen Stammbruch: 1 : 1/ 8
   In wieviele Teile kann man 1Ganzes zerlegen, damit jedes Teil 1/8 Einheiten groß ist in 8 Teile:



Man dividiert durch einen Stammbruch, indem man mit dem Nenner des Bruches multipliziert:

$$\boxed{1 : \frac{1}{n} = 1 * n = 1 * \frac{n}{1}}$$

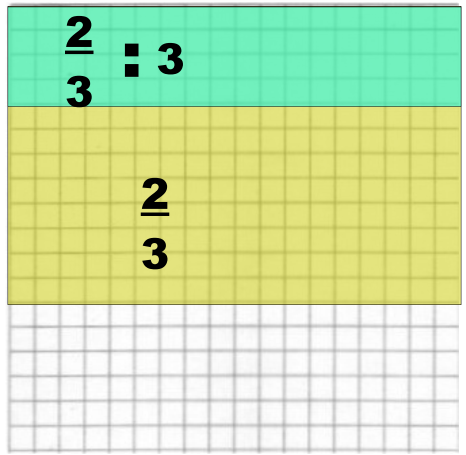
Aus der Division wird eine Multiplikation und beim Bruch werden Zähler und Nenner vertauscht => Kehrwert eines Bruches.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$$

Das Quadrat enthält 18 * 18 = 324 kleine Quadrate

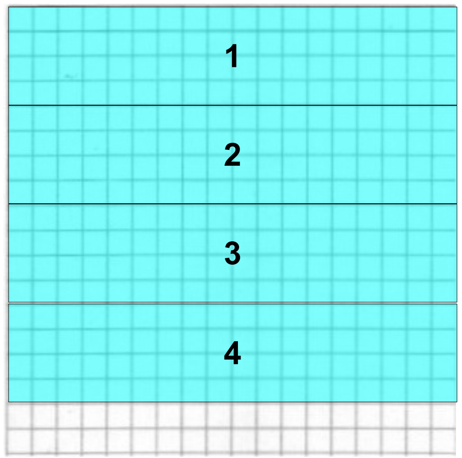
Davon sind 2/3 216 kleine Quadrate (gelbes Rechteck)

Teilt man dieses Rechteck durch 3 erhält man 72 kleine Quadrate (grünes Rechteck).



Wie groß ist das Ganze, wenn die grüne Fläche ¼ des Ganzen darstellen soll?

Bei Division von Stammbrüchen muss ich mit dem Wert im Nenner Multiplizieren. Es gibt also 4 solche gleich-großen Einheiten.
Die überdeckten Kästchen sind 288.



288 = 16/18 * 324 = 8 / 9 * 324

$$\boxed{\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9} = \frac{2}{3} * \frac{4}{3}}$$

Treff Lernen
Christina Strauch

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Bruchrechnen

Doppelbrüche

Doppelbrüche sind Brüche, bei denen der Zähler und der Nenner selbst wieder Brüche sind. Solche Brüche bestehen aus einem Hauptbruchstich und untergeordneten Bruchstrichen.

- Gleichheitszeichen und Vorzeichen sollen auf der Höhe des Hauptbruchstriches stehen.
- Es handelt sich dabei um eine Division von zwei Brüchen, die mit Hilfe der Multiplikation mit dem Kehrwert des Nennerausdrucks gelöst wird.
- Zuerst müssen die beiden Teilbrüche zu einem Bruch zusammengefasst werden.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$$

Musterbeispiele:

$$\frac{\frac{3}{8} * \frac{4}{7}}{\frac{5}{21} * \frac{9}{16}} = \frac{3 * 4 * 21 * 16}{8 * 7 * 5 * 9} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{7}{3} : \frac{49}{8}} = \frac{\frac{9-10}{12}}{\frac{7 * 8}{49 * 3}} = \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{8}{7 * 3}} = -\frac{7 * 3}{12 * 8} = -\frac{7}{32}$$

Vorzeichen von Brüchen

Das Vorzeichen eines Bruches kann vor dem Bruchstrich, vor dem Zähler oder vor dem Nenner stehen. Schreibt man das Vorzeichen vor den Zähler oder Nenner, sind die Zähler oder Nennerausdrücke in Klammern zu setzen, da das Vorzeichen für den ganzen Zähler oder Nenner gilt.

$$\boxed{-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}}$$

Damit sind Vorzeichen bei gemischten Zahlen so zu lesen, dass die gemischte Zahl sich in einer Klammer hinter dem Vorzeichen befindet:

$$-3\frac{3}{5} = -\left(3\frac{3}{5}\right) = -\left(3 + \frac{3}{5}\right) = -3 - \frac{3}{5}$$

Musterbeispiel:

$$-\frac{45a + 5b - 7c}{6b - 5a + 4c} = \frac{-(45a + 5b - 7c)}{6b - 5a + 4c} = \frac{45a + 5b - 7c}{-(6b - 5a + 4c)}$$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dezimalbrüche

Erzeugen von Dezimalbrüchen

Das heute überall verwendete Zahlensystem ist ein Stellensystem. dazu wird jeder Position einer Ziffer in einer Zahl eine bestimmter Wert zugewiesen. Im normalen Gebrauch hat sich das Zehnersystem durchgesetzt, das es ursprünglich mit den Fingern der menschlichen Hand korrespondiert. Jeder Position in einer Zahl wird ein Wert wird ein Produkt mit der Zahl 10 zugewiesen:

Position 3 2 1 0
Zahl: 1 3 6 7

1*10*10*10 + 3*10*10 + 6*10 + 7 * 1

Die Ziffer an der Position
3 2 1 0
wird
3 2 1 0
mal dem Faktor 10 multipliziert.

Nun kann man dieses System weiter nach rechts fortsetzen. Um die Positionen dann noch eindeutig zu bestimmen, setzt man nach der Position 0 ein Komma.

Position 0 -1 -2 -3 -4
Zahl: 5 , 3 4 8 7

5*1 + 3/10 + 4/(10*10) + 8/(10*10*10) + 7/(10*10*10*10)

Bei der Fortsetzung nach rechts werden die Ziffern nicht mit den Faktoren 10 multipliziert, sondern dividiert. Damit lässt sich eine solche Zahl auch als Bruch schreiben:

$$5 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{7}{10000}$$

Frage, die steht:

Lässt sich jeder beliebige Bruch in eine Dezimalschreibweise umwandeln?

Die Antwort ist eindeutig JA , denn gibt man im Taschenrechner 345 : 2398 ein, dann macht er genau diese Umwandlung: 0,14386......,
aber wo hört eine solche Zahl auf ?

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dezimalbrüche

Umwandlung Bruch in Dezimalbruch

Am einfachsten formt man Brüche um, die im Nenner bereits eine Zehnerpotenz besitzen, oder bei denen man den Nenner durch Erweitern oder Kürzen auf eine Zehnerpotenz bringen kann.

- Dann beginnt man bei der Dezimalzahl mit der Stelle, die zu der Zehnerpotenz im Nenner gehört.
- Man Setzt die Ziffernfolge des Zählers rechtsbündig an die Dezimalstelle, an der begonnen wird.
  - Jeder Dezimalbruch mit n Dezimalen (Stellen nach dem Komma) lässt sich als Bruch mit dem Nenner $10^n = 2^n\ 5^n$ schreiben. Die Grundform (vollständig gekürzte Form) dieses Bruches hat im Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5.
  - Brechen Dezimalbrüche ab, heißen sie ***endliche Dezimalbrüche***. Einen endlichen Dezimalbruch erhält man nur, wenn der Nenner des vollständig gekürzten Bruchs **nur** die Primfaktoren 2 oder 5 enthält.
  - Ein vollständig gekürzter Bruch, dessen Nenner andere Primfaktoren als 2 oder 5 enthält, ist ***periodisch unendlich*** oder kurz *periodisch*. Die Länge der Periode ist kleiner als der Nenner.
  - Ein periodischer Dezimalbruch heißt ***reinperiodisch***, wenn die Periode direkt nach dem Komma beginnt.
  - Ein periodischer Dezimalbruch heißt ***gemischtperiodisch***, wenn zwischen Komma und Periode noch weitere Ziffern stehen.

Musterbeispiele

Beispiel 1:
Forme den Bruch 75/100 in eine Dezimalzahl um.

- Der Nenner des Bruches ist die Zehnerpotenz 100; der Bruch ist geeignet.
- Die zugehörige Dezimalstelle ist Hundertstel, die Dezimalzahl beginnt also hier: _ , _ _ .
- Die Ziffernfolge ist 75, also ist 0,75 die Dezimalzahl.

Beispiel 2:
Forme den Bruch 3/8 in eine Dezimalzahl um.

- Der Bruch lässt sich durch Erweitern mit 125 auf den Nenner Tausend bringen:
- 3 / 8 = 375 / 1000
- Die zugehörige Dezimalstelle ist Tausendstel, die Dezimalzahl beginnt also hier: _ , _ _ _ .
- Die Ziffernfolge ist 375, also ist 0,375 die Dezimalzahl.

① $\frac{5}{8}$ = 5 : 8 = 0, 6 2 5

$$\begin{array}{l}
5 \\
\underline{0} \\
5\,0 \\
\underline{4\,8} \\
\quad 2\,0 \\
\quad \underline{1\,6} \\
\qquad 4\,0 \\
\qquad \underline{4\,0} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

② $\frac{13}{6}$ = 1 3 : 6 = 2, 1 6 6 6

$$\begin{array}{l}
1\,3 \\
\underline{1\,2} \\
\quad 1\,0 \\
\quad\ \ \underline{6} \\
\quad 4\,0 \\
\quad \underline{3\,6} \\
\qquad 4\,0 \\
\qquad \underline{3\,6} \\
\qquad\quad 4\,0 \\
\qquad\quad \underline{3\,6}
\end{array}$$

$= 2{,}1\overline{6}$

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dezimalbrüche	**Umwandlung Bruch in Prozente**	
	Zunächst wandelt man einen Bruch in einen Dezimalbruch um. Für die Prozentangabe ist diese Dezimalzahl mit 100 zu multiplizieren. Dazu reicht es, wenn man das Komma um zwei Stellen nach rechts setzt.	$\frac{629}{1000} = 0{,}629 = 62{,}9\ \%$ $\frac{629}{100} = 6{,}29 = 629\ \%$
	Umwandlung nicht periodischer Dezimalbrüche in Brüche	
	• Zähler aufschreiben: Ziffernfolge des Dezimalbruchs ohne Komma • Nenner aufschreiben: 1 mit so vielen Nullen, wie der Dezimalbruch Nachkommastellen hat	$81{,}945 = \frac{81945}{1000}$
	Umwandlung periodischer Dezimalbrüche in Brüche	
	• Rein periodischen Dezimalbruch bilden • Zähler aufschreiben: Ziffernfolge der Periode • Nenner aufschreiben: so viele Neunen, wie Periodenlänge	$0{,}\overline{5} = \frac{5}{9}$ $4{,}\overline{14} = 4\,\frac{14}{99}$ $0{,}00\overline{4} = 0{,}\overline{4} : 100 = \frac{4}{9} : 100 = \frac{4}{900}$ $1{,}1\overline{2} = 11{,}\overline{2} : 10 = 11\,\frac{2}{9} : 10 = \frac{101}{9} * \frac{1}{10} = \frac{101}{90}$
	Zweite Möglichkeit	
	• Dezimalbruch so oft mit 10 multiplizieren, wie die Periode lang ist • Von dem n * 10 fachen der Zahl die Zahl 1 mal subtrahieren (dadurch verschwindet die Periode) • Das Ergebnis durch so viele Neunen teilen, wie Periodenlänge	$\begin{array}{lr} 4{,}\overline{14} * 100: & 414{,}14141414 \\ -\ 4{,}\overline{14}\ : & \underline{4{,}14141414} \\ & 410{,}00000000 \end{array} = \frac{410}{99} = 4\,\frac{14}{99}$ $0{,}\overline{\text{Periode}} = \frac{\text{Periode}}{999.....9}$ Perioden-länge p p mal die Ziffer '9'
	Umwandlung Prozente in Dezimalzahlen	
	Für die Umwandlung in eine Dezimalzahl ist die Prozentangabe durch 100 zu dividieren. Dazu reicht es, wenn man das Komma um zwei Stellen nach links setzt. Möglicherweise muss zwischen dem Komma und der ersten gültigen Ziffer mit 0-en aufgefüllt werden.	82,95 % = 0,8295 256,342 % = 2,56342
	Umwandlung Dezimalzahlen in Prozente	
	Für die Prozentangabe ist die Dezimalzahl mit 100 zu multiplizieren. Dazu reicht es, wenn man das Komma um zwei Stellen nach rechts setzt. Möglicherweise muss mit 0-en aufgefüllt werden.	0,8123 = 81,23 % 2,4583 = 245,83 %
	Umwandlung Prozente in Brüche	
	Zunächst wandelt man die Prozentzahl in eine Dezimalzahl um. Danach wandelt man die Dezimalzahl in einen Bruch, wie vorher beschrieben.	$61{,}29\ \% = 0{,}6129 = \frac{6129}{10000}$

Mathematik – Intensivkurs: Brüche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dezimalbrüche		

Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

- Überschlag machen
- Brüche stellengerecht (Komma unter Komma) untereinander schreiben
- Stellenweise addieren bzw. subtrahieren
- Ergebnis mit dem Überschlag vergleichen

Addiere und subtrahiere die Zahlen 26,24 und 5,18

Überschlag:

26 + 5 = 31

26 – 5 = 21

Rechnung:

```
   2 6, 2 4          2 6, 2 4
+  1 5, 1 1 8     –     5, 1 1 8
-----------------  ---------------
   3 1, 4 2          2 1, 0 6
```

Multiplikation von Dezimalbrüchen

- Überschlag machen;(dazu durch Multiplikation und Division mit 10 die Zahl so verschieben, dass genau eine Ziffer vor dem Komma steht. Multiplikation Ausführen und das Komma gemäß der entstandenen Anzahlen von 10 richtig setzen)
- Zahlen ohne Komma multiplizieren
- Komma so setzen, dass das Ergebnis genauso viele Stellen nach dem Komma hat, wie die beiden Faktoren zusammen.
- Ergebnis mit Überschlag vergleichen

Multipliziere 0,5 mit 0,8

Überschlag (und Rechnung, da einfach)

0,5 * 0,8 = (5,0 : 10) * (8,0 : 10) – eine Ziffer vor dem Komma
= (5 * 8) : (10 * 10) – Ziffern multiplizieren
= 40 : 100 – Division durch 100 heißt Komma 2 Stellen nach links
= 0,40 – Abschließende 0 hinter dem Komma kann entfallen
= 0,4

Multipliziere 23,4 mit 0,34

Überschlag

23,4 * 0,34 = (2 * 10) * (3 : 10) – eine Ziffer vor dem Komma
= (2 * 3) : (10 : 10) – Ziffern multiplizieren; 10:10 = 1 Komma nicht verschieben
= 6 : 1
= 6

Rechnung:

```
  2 3, 4 * 0, 3 4
        7 0 2
          9 3 6
  ---------------
        7 9 3 6      insgesamt 3 Nachkommastellen

        7, 9 3 6
```

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Dezimalbrüche

Division von Dezimalbrüchen

- Überschlag machen;(dazu durch Multiplikation und Division mit 10 die Zahl so verschieben, dass genau eine Ziffer vor dem Komma steht. Multiplikation Ausführen und das Komma gemäß der entstandenen Anzahlen von 10 richtig setzen)
- Bei beiden Dezimalbrüchen das Komma um gleich viele Stellen nach rechts oder links verschieben, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist.
- Regeln für Division zweier natürlicher Zahlen anwenden.
- Position des Kommas beim Dividenden berücksichtigen. Wird beim Dividenden die erste Ziffer nach dem Komma heruntergezogen, ist beim Ergebnis zuerst das Komma zu setzen.

Musterbeispiele:

8, 0 2 2 : 1, 0 5 =

8 0 2, 2 : 1 0 5 = 7, 6 4
7 3 5
 6 7 2 ← Hier wird eine '2' nach dem Komma heruntergezogen, also ist nach der '7' das Komma zu setzen
 6 3 0
  4 2 0
  4 2 0
   0

2 3 5, 4 : 0, 2 5 =

2 3 5 4 0 : 2 5 = 9 4 1, 6
2 2 5
 1 0 4
 1 0 0
   4 0
   2 5
   1 5 0 ← Hier wird eine '0' nach dem Komma heruntergezogen, also ist nach der '1' das Komma zu setzen
   1 5 0

Multiplikation und Division mit 10, 100, 1000

- Bei der Multiplikation eines Dezimalbruches mit 10, 100, 1000,... verschiebt sich das Komma um 1, 2, 3... Stellen nach rechts.
- Bei der Division eines Dezimalbruches durch 10, 100, 1000,... verschiebt sich das Komma um 1, 2, 3,... Stellen nach links.

Musterbeispiele:

22,316 * 10 = 223,16	22,316 : 10 = 2,2316
22,316 * 100 = 2231,6	22,316 : 100 = 0,22316
22,316 * 1000 = 22316	22,316 : 1000 = 0,022316