1. Multiplikationsregel – 1. Pfadregel

1.1 Multiplikationsregel

Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse A und B mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ ist:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

(I) Es gilt auch:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

(II) Weiterhin kann der Satz verallgemeinert werden, so gilt für drei gleichzeitig eintretenden Ereignisse A , B und C:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | (A \cap B))$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass n voneinander **unabhängige** Ereignisse gemeinsam auftreten, ist gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.
Sind die Ereignisse nicht unabhängig, so sind die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse zu benutzen, die unter der Bedingung entstehen, dass die vorherigen Ereignisse bereits eingetreten sind.

1.2 1. Pfad-Regel

Aus der Multiplikationsregel folgt direkt die 1. Pfadregel.
In mehrstufigen Zufallsexperimenten ist die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses (jedes Pfades im Baumdiagramm) gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten an jeder Verbindungslinie = Kante des Pfades, der diesem Elementarereignis entspricht. Formelmäßig ergibt sich:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Diese Formel sieht eher grausam aus, hat aber als Hintergrund nichts weiter als die schon beschriebene Verfahrensweise im Baumdiagramm. Sucht man die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Endzustand im Diagramm, so multipliziert man die Wahrscheinlichkeit an der ersten Verbindungslinie des passenden Pfades P(A1) mit der Wahrscheinlichkeit an der nächsten Verbindungslinie auf diesem Pfad. Und die gibt nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen eines Zustandes A2 unter der Bedingung, dass man vorher den Zustand A1 erreicht hat, an. Damit wären zumindest die ersten beiden Faktoren rechts vom Gleichheitszeichen der Formel erklärt. Hat das Baumdiagramm nun noch eine dritte Stufe, wird das bisherige Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit an der nächsten passenden Verbindungslinie multipliziert. Das setzt aber voraus, dass wir zuvor die Zustände A1 und A2 durchlaufen hatten – vergleiche dritter Faktor in der Formel.

1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

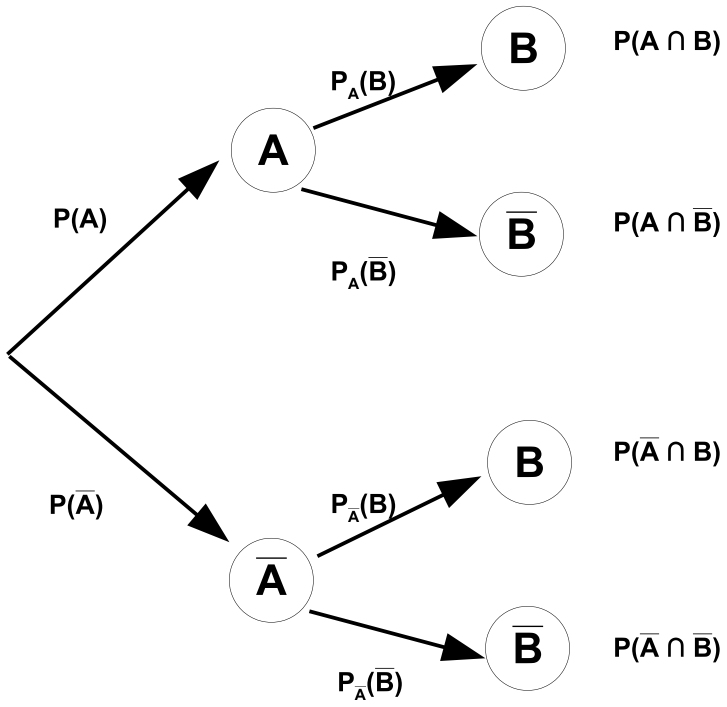
Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E unter der Bedingung F berechnet sich nach:

$$P_F(E) = \frac{P(F \cap E)}{P(F)} = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit des Eintretens von E und F}}{\text{Wahrscheinlichkeit des Eintretens von F}}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E unter der Bedingung F ist die Wahrscheinlichkeit mit der das Ereignis E eintritt, wenn man bereits weiß, dass das Ereignis F eingetreten ist. Damit sind nicht mehr alle Möglichkeiten zum Eintreten des Ereignisses E gegeben, sondern bereits auf das Eintreten des Ereignisses F eingeschränkt. Die Wahrscheinlichkeit wird nicht mehr über dem gesamten Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit P(Ω) = 1 bestimmt, sondern über dem eingeschränkten Raum F mit P(F) bestimmt.

1.4. Baumdiagramm und „umgekehrtes“ Baumdiagramm für Wahrscheinlichkeiten

1.4.1. Baumdiagramm und bedingte Wahrscheinlichkeit

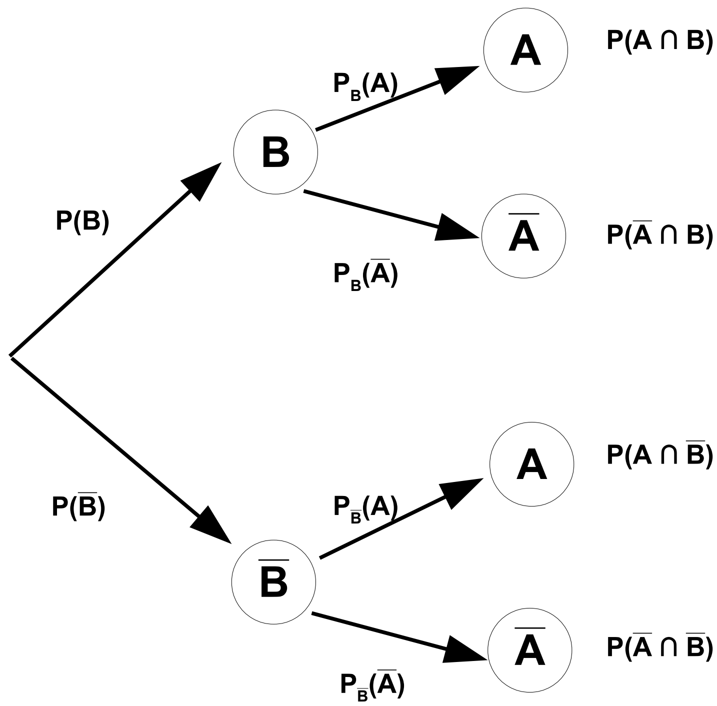


Bedingte Wahrscheinlichkeiten treten ab der zweiten Stufe des Baumdiagramms auf. Alle nachfolgenden Ereignisse treten ein, nachdem ein anderes Ereignis bereits eingetreten ist. Das bereits eingetretene Ereignis wird als Index an die Wahrscheinlichkeit angehangen.
Unter bestimmten Bedingungen ist diese Wahrscheinlichkeit gleich der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B selbst, grundsätzlich sind es aber nur bedingte Wahrscheinlichkeiten

nach der 1. Pfadregel

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(A \cap B)$$

1.4.2. „umgekehrtes“ Baumdiagramm:



Das umgekehrte Baumdiagramm vertauscht die Reihenfolge des Eintretens der beiden Ereignisse. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit nach dem Eintreten beider Ereignisse, die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts, immer die gleiche, wie im ersten Baum. Das ist eine zentrale Voraussetzung für die Arbeit mit bedingten Wahrscheinlichkeiten.

nach der 1. Pfadregel

$$P(B) \cdot P_B(A) = P(A \cap B)$$

Die rechten Seiten in beiden Gleichungen sind gleich

1.5. Vier – Felder – Tafel

1.5.1. Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse in der Vier – Felder – Tafel

Eine Vier–Felder–Tafel ist eine Umsetzung eines zweistufigen Baumdiagramms mit jeweils zwei verschiedenen Ausgängen. Andere Ereignisse lassen sich mit einer Vier-Felder-Tafel nicht darstellen.

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Spalten-summe	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

In den vier Feldern stehen jeweils die Wahrscheinlichkeiten des Durchschnitts der Ereignisse. Als Zeilen– und Spaltensumme fungieren nach den Regeln der totalen Wahrscheinlichkeit jeweils die Wahrscheinlichkeiten für ein Einzelereignis.
Grundsätzlich gelten nur die Regeln für die Zeilen– und Spaltensummen und dass die Summe der Zeilen und Spaltensummen 1 ergeben muss. Es muss mindestens eine Wahrscheinlichkeit eines Durchschnitts bekannt sein, damit die Tafel vollständig berechnet werden kann.

1.5.2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten in der Vier – Felder – Tafel

Aus dem Baumdiagramm gelten folgende Beziehungen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$
$$= P(B) \cdot P_B(A)$$

Betrachtet man die erste Zeile, stellt man fest, dass zwei der drei Ausdrücke auch in der 1. Zeile der Vier -Felder-Tafel vorkommen. Dividiert man die erste Formel durch P(A) erhält man die bedingte Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dividiert man in der Vier-Felder-Tafel jede Zeile durch ihre Zeilensumme, erhält man:

	B	$\overline{B}$	Zeilen summe
A	$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$	$\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)}$	1
$\overline{A}$	$\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}$	$\frac{P(\overline{A}\cap \overline{B})}{P(\overline{A})}$	1
Spalten-summe			

Jetzt stehen in den vier Feldern die bedingten Wahrscheinlichkeiten nach dem Eintreten von A bzw $\overline{A}$.

	B	$\overline{B}$	Zeilen summe
A	$P_A(B)$	$P_A(\overline{B})$	1
$\overline{A}$	$P_{\overline{A}}(B)$	$P_{\overline{A}}(\overline{B})$	1
Spalten-summe			

Spaltensummen machen in diesem Zusammenhang keinen Sinn, deshalb lässt man die Felder leer. Man kann aber die gleiche Rechnung mit den Spaltensummen durchführen und erhält dann die bedingten Wahrscheinlichkeiten bezogen auf B und $\overline{B}$.

Merke:
- Der **Zähler** der bedingten Wahrscheinlichkeit setzt sich aus Elementen **innerhalb**
- Der **Nenner** der bedingten Wahrscheinlichkeit setzt sich aus Randelementen **außerhalb**

der 4 – Felder – Tafel zusammen

2. Summenregel – 2. Pfadregel

2.1 Summenregel

Besitzt ein Ereignis $E = \{ e_1 ; \ldots ; e_M \}$ M durchschnittsfremde Elementarereignisse e_j, so kann die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E berechnet werden durch:

$$P(E) = P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_M) = \sum_{j=1}^{M} P(e_j)$$

2.2 2. Pfadregel

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines (zusammengesetzten) Ereignisses gleich der Summen der Wahrscheinlichkeiten aller der Pfade, die zu seinen zugehörigen Ergebnissen führen.

2.3. Satz von der „Totalen Wahrscheinlichkeit“

Aus der Summenregel folgt der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Es seien $E_1, E_2, E_3, \ldots E_n$ Ereignisse mit den folgenden Eigenschaften:

1. $P(E_i) > 0$ für alle $i = 1 \ldots n$
2. Die Ereignisse sind paarweise unvereinbar, d. h. $E_i \cap E_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
3. $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = \Omega$.

(*Die Ereignisse E_j sind eine durchschnittsfremde, aber vollständige Zerlegung der Wahrscheinlichkeitsraumes Ω*)

Dann gilt für jedes beliebige Ereignis F:

(F ist ebenfalls ein Element des Wahrscheinlichkeitsraumes Ω)

$$P(F) = P(E_1) \bullet P_{E1}(F) + P(E_2) \bullet P_{E2}(F) + P(E_3) \bullet P_{E3}(F) + \ldots + P(E_n) \bullet P_{En}(F)$$

*(Die Wahrscheinlichkeit von F ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten von F unter der Bedingung, dass ein E_j aufgetreten ist, summiert über **alle** E_j, womit der gesamte Wahrscheinlichkeitsraum Ω abgedeckt ist.)*

Der Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit entspricht genau der 2. Pfadregel.

2.3.1. Satz von der „Totalen Wahrscheinlichkeit“ in der Vier – Felder – Tafel

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	**$P(A \cap B)$**	**$P(A \cap \overline{B})$**	$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
$\overline{A}$	**$P(\overline{A} \cap B)$**	**$P(\overline{A} \cap \overline{B})$**	$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$
Spalten-summe	**$P(B)$**	**$P(\overline{B})$**	**1**

In den vier Feldern stehen jeweils die Wahrscheinlichkeiten des Durchschnitts der Ereignisse. Als Zeilen– und Spaltensumme fungieren nach den Regeln der totalen Wahrscheinlichkeit jeweils die Wahrscheinlichkeiten für ein Einzelereignis.

Die Zeilen der Vier-Felder-Tafel enthalten alle Ereignisse, in denen das Ereignis A auftritt oder $\overline{A}$ auftritt. Damit ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten der Zeile gleich der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Ereignisse A oder $\overline{A}$ insgesamt.

Die Spalten der Vier-Felder-Tafel enthalten alle Ereignisse, in denen die Ereignisse B oder $\overline{B}$ auftreten. Damit ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten der Spalten die Gesamtwahrscheinlichkeit für das eintreten der Ereignisse B oder $\overline{B}$.

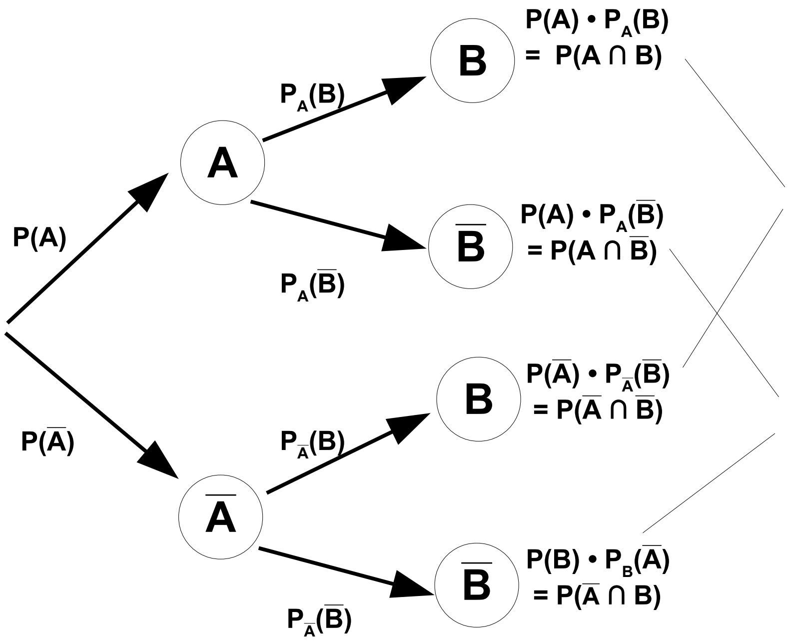
2.3.2. Satz von der „Totalen Wahrscheinlichkeit“ im Baumdiagramm

Wenn $P(A) \neq 0$ und $P(\overline{A}) \neq 0$, dann $\quad P(B) = P(A)\, P_A(B) + P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(B)$

*Wenn die Wahrscheinlichkeiten für A und $\overline{A}$ existieren, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das eintreten des Ereignisses B gleich der **Summe** aus*

- *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A **multipliziert** mit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist und*
- *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{A}$ **multipliziert** mit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass $\overline{A}$ bereits eingetreten ist*

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A lässt sich auch aus den Wahrscheinlichkeiten des Eintretens B und $\overline{B}$ berechnen. Dazu muss man allerdings die Wahrscheinlichkeit wissen, unter denen A eintritt, wenn B oder $\overline{B}$ bereits eingetreten sind, Wahrscheinlichkeiten **unter Bedingung dass** ....
Außer dem Pfeil, der zum Ereignis A oder B führt, gibt es noch eine Kette von zwei anderen Pfeilen, die zu dem Ereignis führen, diese Kette hat ihren Ursprung auf der anderen Seite des Diagramms.



nach dem
Satz von der Totalen
Wahrscheinlichkeit

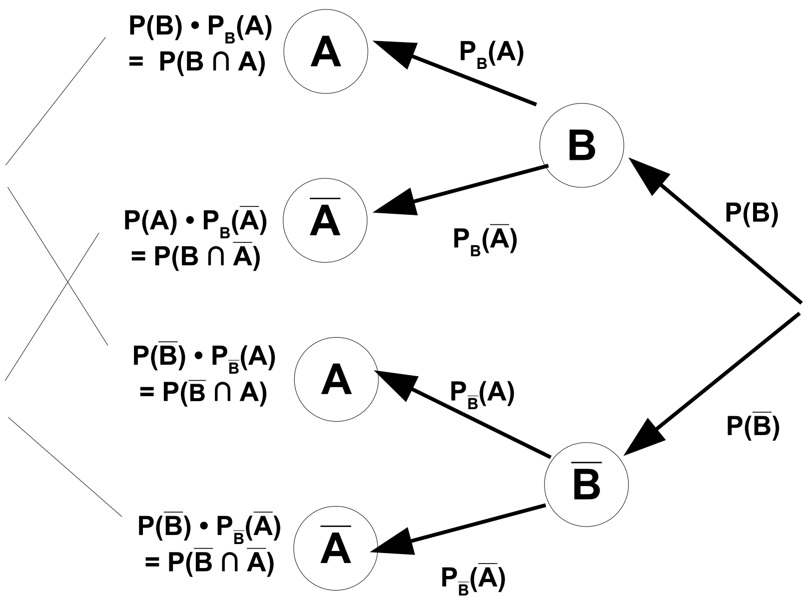
$$P(B) = P(A)\, P_A(B) + P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$P(\overline{B}) = P(A)\, P_A(\overline{B}) + P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

Besitzt man ein komplett ausgefülltes Baumdiagramm, lässt sich über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit auch die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B bzw $\overline{B}$ selbst bestimmen als Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten, in denen das Ereignis selbst auftritt. Mit diesen Informationen lässt sich dann das umgekehrte Baumdiagramm erstellen.

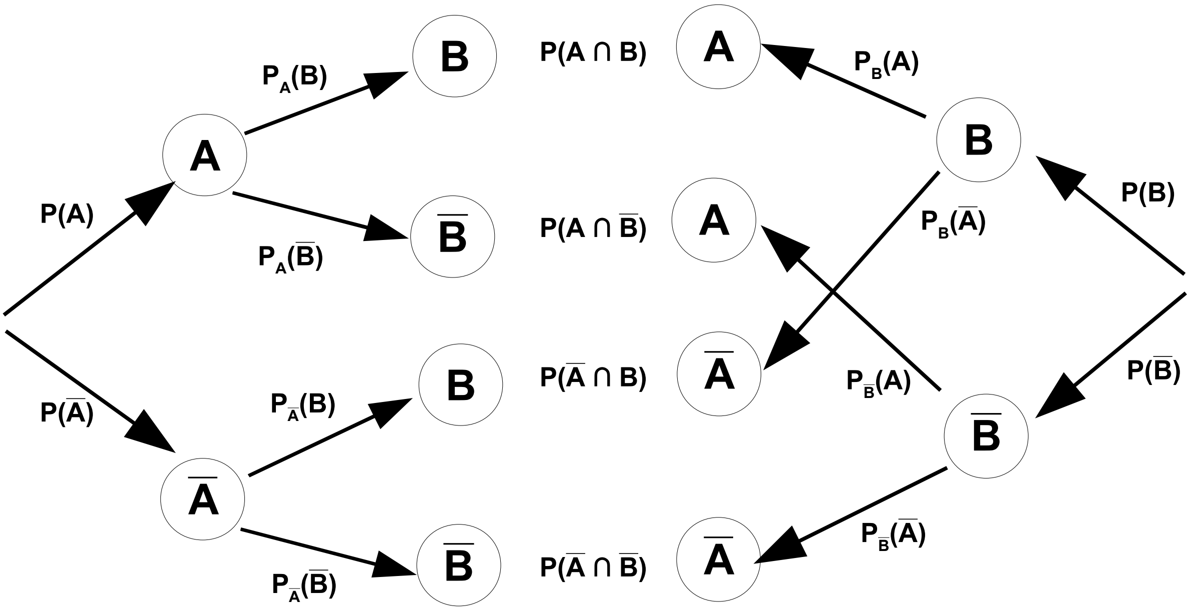
$$P(A) = P(B)\, P_B(A) + P(\overline{B})\, P_{\overline{B}}(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(\overline{A}) = P(B)\, P_B(\overline{A}) + P(\overline{B})\, P_{\overline{B}}(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$



Doppeltes Baumdiagramm

Die Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten des Durchschnitts bietet die Möglichkeit die beiden Bäume miteinander zu verkennen



Auf der rechten Seite müssen sich die beiden Pfeile kreuzen, damit die richtigen Verbindungen mit dem linken Baum entstehen. Die Wahrscheinlichkeiten von $P(B)$ und $P(\overline{B})$ lassen sich aus dem ersten Baum über den Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit berechnen. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten am rechten Baum über Division der Wahrscheinlichkeiten des Durchschnitts durch die Wahrscheinlichkeiten von B und $\overline{B}$.

3. „Satz von BAYES“ (1702-1761):

Betrachtet man in dem doppelten Baumdiagramm den oberen Pfad, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\boxed{\text{Wenn } P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0, \text{ dann } \quad P(B)\ P_B(A) = P(A \cap B) = P(A)\ P_A(B)}$$

Das erste Gleichheitszeichen stammt aus dem originalen Baumdiagramm, das zweite Gleichheitszeichen aus dem umgekehrten Baumdiagramm

Diese Gleichungen lassen sich für alle vier Pfade durch das doppelte Baumdiagramm formulieren. Aus diesen Formeln des Satzes von Bayes leiten sich die Formeln zu Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit ab:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit für
- das Eintreten des Ereignisses A
- **unter der Bedingung, dass B eingetreten ist,**
- ist der Quotient
- aus der Wahrscheinlichkeit des **Durchschnitts der beiden Ereignisse**
- dividiert durch die **Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, das eingetreten ist.**

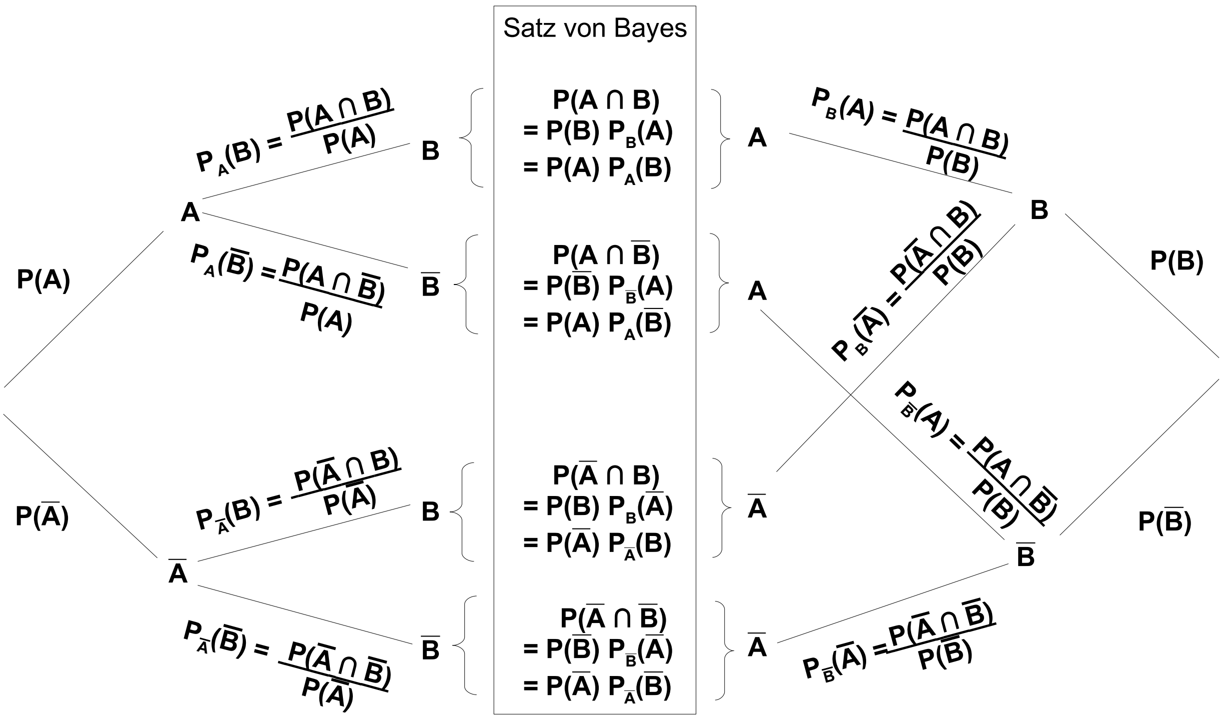
Lässt man beim Satz von Bayes den mittleren Teil weg, ergibt sich eine Formel, mit der man die „umgekehrte bedingte Wahrscheinlichkeit“ berechnen kann aus der Kenntnis der Einzelwahrscheinlichkeiten und der Kenntnis der anderen bedingten Wahrscheinlichkeit ohne der Kenntnis der Durchschnittswahrscheinlichkeit.

$$P(B)\ P_B(A) = P(A)\ P_A(B)$$

Ist eine der bedingten Wahrscheinlichkeiten bekannt, lässt sich die andere ausrechnen.

3.1. Satz von Bayes im Baumdiagramm

Unter Benutzung des „Satzes von der Totalen Wahrscheinlichkeit“ und des „Satzes von Bayes“ wird das Baumdiagramm zu einem sehr komplexen Gebilde.



Mitunter lässt sich aus Versuchen nur der linke Baum erstellen. Hat man zwei Urnen und in jeder Urne weiße und schwarze Kugeln, kann man nur die Wahrscheinlichkeit für eine weiße oder schwarze Kugel bestimmen, indem man der Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit benutzt (2. Pfadregel) und die Wahrscheinlichkeiten für beide Urnen addiert. Lautet die Frage aber „ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel aus der Urne 1 ist, kann man kein Baumdiagramm aufbauen, da die Vertauschung der Reihenfolge praktisch nicht möglich ist. Mit dem Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit und dem Satz von Bayes kann man den dualen Baum aufbauen, ohne, dass er durch Versuche erstellt werden kann. Mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten an dem rechten Baum lässt sich sogar die Frage beantworten: Die gezogene Kugel ist weiß, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus der ersten Urne stammt. Diese Frage kann durch eine Versuchsanordnung nicht geklärt werden.

3.2. Satz von Bayes in der Vier – Felder - Tafel

	B	$\bar{B}$	Zeilensumme
A	**$P(A\cap B)$**	**$P(A\cap \bar{B})$**	**$P(A)$**
$\bar{A}$	**$P(\bar{A}\cap B)$**	**$P(\bar{A}\cap \bar{B})$**	**$P(\bar{A})$**
Spalten-summe	**$P(B)$**	**$P(\bar{B})$**	**1**

Der Satz von Bayes bringt die Wahrscheinlichkeiten der Durchschnitt mit den Einzelwahrscheinlichkeiten in Verbindung. Der Quotient aus beiden liefert die bedingte Wahrscheinlichkeit. Die Einzelwahrscheinlichkeiten befinden sich in der Vier Felder Tafel als Zeilen – oder Spaltensumme und die Wahrscheinlichkeiten des Durchschnitts sind in den vier Feldern. Man muss also nur die vier Mittelfelder durch die Zeilen oder Spaltensumme dividieren und erhält so die bedingte Wahrscheinlichkeit.

Die Division durch die entsprechenden Zeilensummen liefert in den vier Feldern die bedingte Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung, dass das „Ereignis der Zeile“ eingetreten ist. Die Zeilensummen ergeben dann „1“ und die Felder der Spaltensummen bleiben leer, da sie keine sinnvollen Ergebnisse liefern.

	B	$\bar{B}$	Zeilen summe
A	$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$	$\frac{P(A\cap \bar{B})}{P(A)}$	**1**
$\bar{A}$	$\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$	$\frac{P(\bar{A}\cap \bar{B})}{P(\bar{A})}$	**1**
Spalten-summe			

	B	$\bar{B}$	Zeilen summe
A	**$P_A(B)$**	**$P_A(\bar{B})$**	**1**
$\bar{A}$	**$P_{\bar{A}}(B)$**	**$P_{\bar{A}}(\bar{B})$**	**1**
Spalten-summe			

Die gleiche Berechnung kann auch spaltenweise vorgenommen werden, dann erhält man die bedingten Wahrscheinlichkeiten bei eingetretenem „Spaltenereignis“ B bzw $\bar{B}$.

4. Stochastische Unabhängigkeit

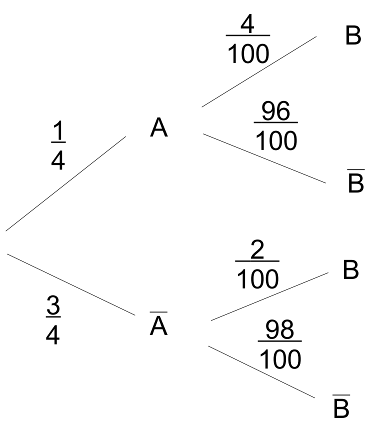
Zwei Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn gilt: $\boxed{P(B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)}$

Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, dann auch die Ereignisse A und $\overline{B}$; $\overline{A}$ und B sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$ stochastisch unabhängig. (s. Arbeitsblatt „Stochastik“ 2.7 und 2.8)

Eine Maschine M1 stellt Bauteile mit einem Ausschussanteil von 4% her. Eine zweite Maschine M2 produziert täglich dreimal so viele Bauteile wie M1, der Ausschussanteil beträgt dabei 2%.
Der Gesamtproduktion wird ein Bauteil zufällig entnommen, das sich als Ausschussteil erweist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt das Bauteil von der Maschine M1?
Für die Ereignisse

A: „Bauteil stammt von M1“,
B: „Bauteil ist Ausschuss“

sind der Beschreibung folgende Wahrscheinlichkeiten zu entnehmen:



$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{100} = \frac{1}{100}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{96}{100} = \frac{24}{100}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{100} = \frac{3}{200}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{98}{100} = \frac{147}{200}$

$P(B) = \frac{1}{40}$ $\quad$ $P(\overline{B}) = \frac{39}{40}$

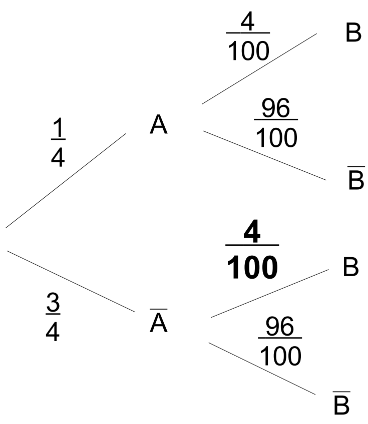
$P(A) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(B) = \frac{1}{40}$

$P(\overline{A}) = \frac{3}{4}$ $\quad$ $P(\overline{B}) = \frac{39}{40}$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{1}{100} \\ P(A)\,P(B) = \frac{1}{160} \end{array}}$$

Die Ereignisse sind stochastisch **abhängig.**

Die Aufgabestellung soll beibehalten werden, allerdings ist die Ausschußquote der zweiten Maschine ebenfalls 4%. Damit ändern sich das Baumdiagramm und die Wahrscheinlichkeiten in folgender Weise



$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{100} = \frac{1}{100}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{96}{100} = \frac{24}{100}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{100} = \frac{3}{100}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{96}{100} = \frac{72}{100}$

$P(B) = \frac{1}{25}$ $\quad$ $P(\overline{B}) = \frac{24}{25}$

$P(A) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(B) = \frac{1}{25}$

$P(\overline{A}) = \frac{3}{4}$ $\quad$ $P(\overline{B}) = \frac{24}{25}$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{1}{100} \\ P(A)\,P(B) = \frac{1}{100} \end{array}}$$

Die Ereignisse sind stochastisch **unabhängig.**

Stochastische Unabhängigkeit ist eine Eigenschaft der Wahrscheinlichkeiten, niemals der Ereignisse

Was man sich fälschlicherweise unter stochastischer Unabhängigkeit vorstellt sind solche Beziehungen wie Mann oder Frau, Raucher oder Nichtraucher. Diese Ereignisse sind **nicht unabhängig**, sie sind **unvereinbar**.
Unvereinbare Ereignisse sind immer **stochastisch abhängig**, wenn das eine Ereignis eingetreten ist, kann das andere Ereignis nicht eintreten, also hängen sie voneinander ab.
Damit sind auch **stochastisch unabhängige Ereignisse** immer **vereinbar**, dh. es muss die Möglichkeit bestehen, dass sie beide gleichzeitig eintreten können.

Stochastische Unabhängigkeit kann nur durch Rechnung nachgewiesen werden.

5. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln zur Bedingten Wahrscheinlichkeit

5.1. Zum Multiplikationssatz und Satz von BAYES :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) = P(B) \cdot P_{\overline{B}}(A)$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = P(B) \cdot P_B(\overline{A})$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(\overline{A})$$

5.2. Zum Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = P(B)\, P_B(A) + P(\overline{B})\, P_{\overline{B}}(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$
$$P(\overline{A}) = P(B)\, P_B(\overline{A}) + P(\overline{B})\, P_{\overline{B}}(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$P(B) = P(A)\, P_A(B) + P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$P(\overline{B}) = P(A)\, P_A(\overline{B}) + P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

5.3. Vier – Felder – Tafel

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$
Spalten-summe	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

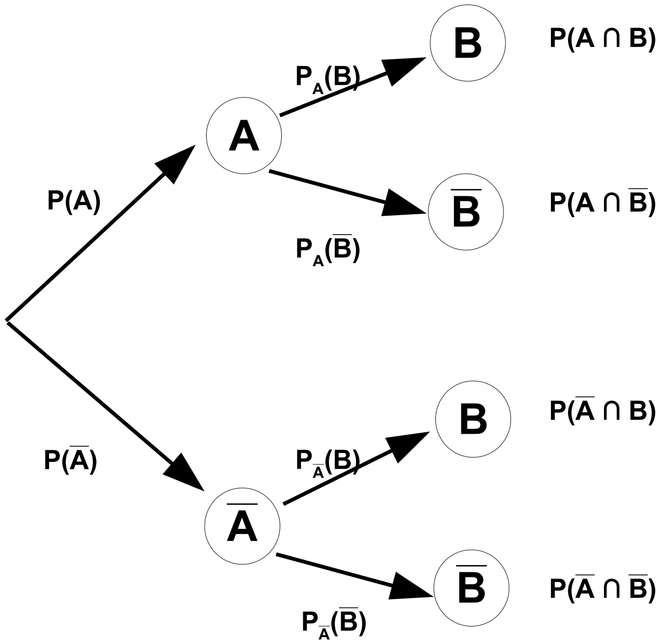
5.4. Vier – Felder – Tafel mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

	B	$\overline{B}$	Zeilen summe
A	$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	$\frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$	1
$\overline{A}$	$\frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$	$\frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})}$	1
Spalten-summe			

	B	$\overline{B}$	Zeilen summe
A	$P_A(B)$	$P_A(\overline{B})$	1
$\overline{A}$	$P_{\overline{A}}(B)$	$P_{\overline{A}}(\overline{B})$	1
Spalten-summe			

Die gleiche Berechnung kann auch spaltenweise vorgenommen werden, dann erhält man die bedingten Wahrscheinlichkeiten bei eingetretenem Ereignis B.

5.5. Baumdiagramm mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

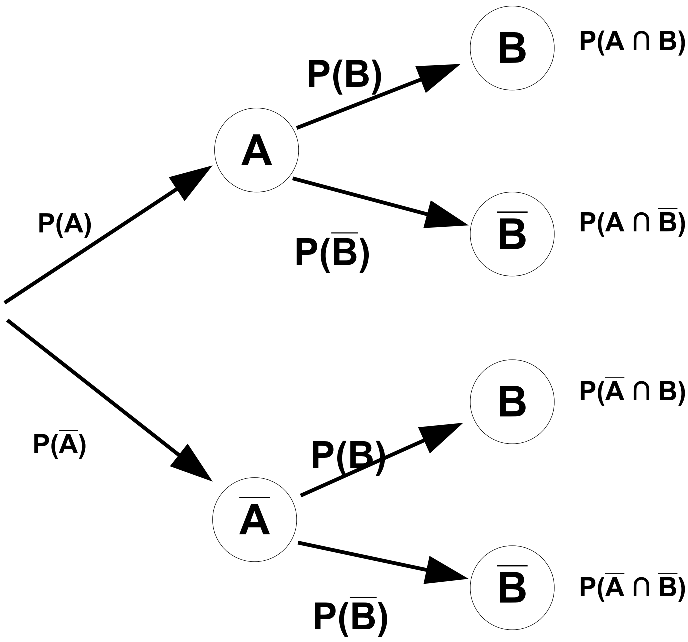


5.6. Vier – Felder – Tafel bei stochastisch unabhängigen Ereignissen

	B	$\overline{B}$	Zeilensumme
A	P(A) • P(B)	P(A) • P($\overline{B}$)	P(A)
$\overline{A}$	P($\overline{A}$) • P(B)	P($\overline{A}$) • P($\overline{B}$)	P($\overline{A}$)
Spalten-summe	P(B)	P($\overline{B}$)	1

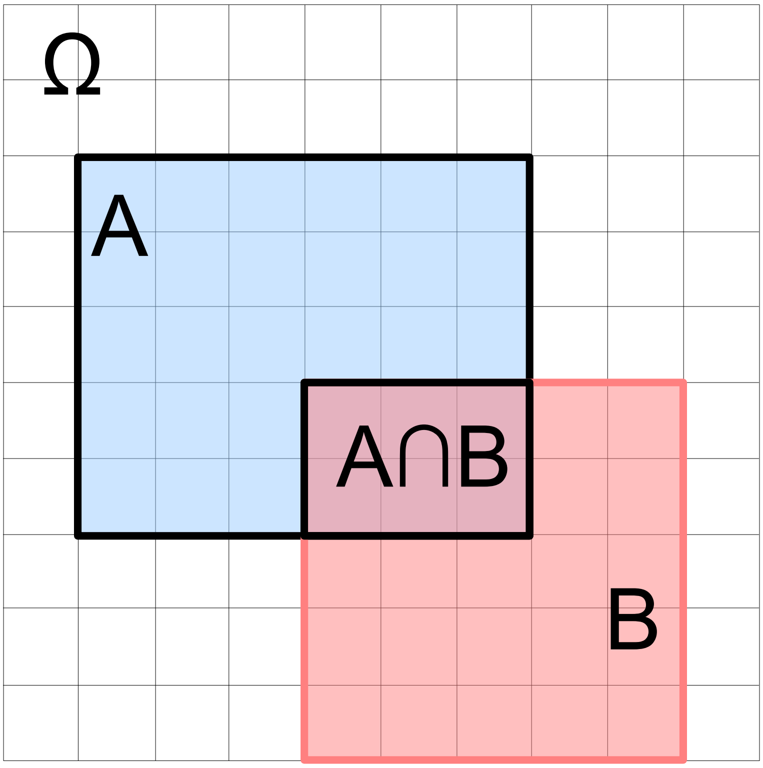
Wenn in allen vier Feldern diese Beziehungen gelten, dann sind die Ereignisse stochastisch unabhängig.

5.7. Baumdiagramm bei stochastisch unabhängigen Ereignissen



An den Bäumen der zweiten Stufe sind die Wahrscheinlichkeiten, die zum gleichen Ereignis führen an allen Bäumen gleich. Im nebenstehenden Baum sind das die Wahrscheinlichkeiten P(B) und P($\overline{B}$), die sowohl vom Ereignis A, als auch von Ereignis $\overline{A}$ gleich sind.

5.8. Bedingte Wahrscheinlichkeit graphisch dargestellt.



Ω = 100

A = 30

B = 20

$A \cap B$ = 6

$P(A) = 30/100 = 3/10$

$P(B) = 25/100 = 1/4$

$P(A \cap B) = 6/100 = 3/50$

Bedingte Wahrscheinlichkeit nach der Formel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{6/100}{30/100} = \frac{1}{5}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit Textformulierung:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit Elemente aus B zu erhalten, wenn bekannt ist, dass A bereits eingetreten ist. In diesem Fall steht nicht mehr ganz Ω zur Verfügung, sondern nur der Ausschnitt A aus dem Bereich Ω.

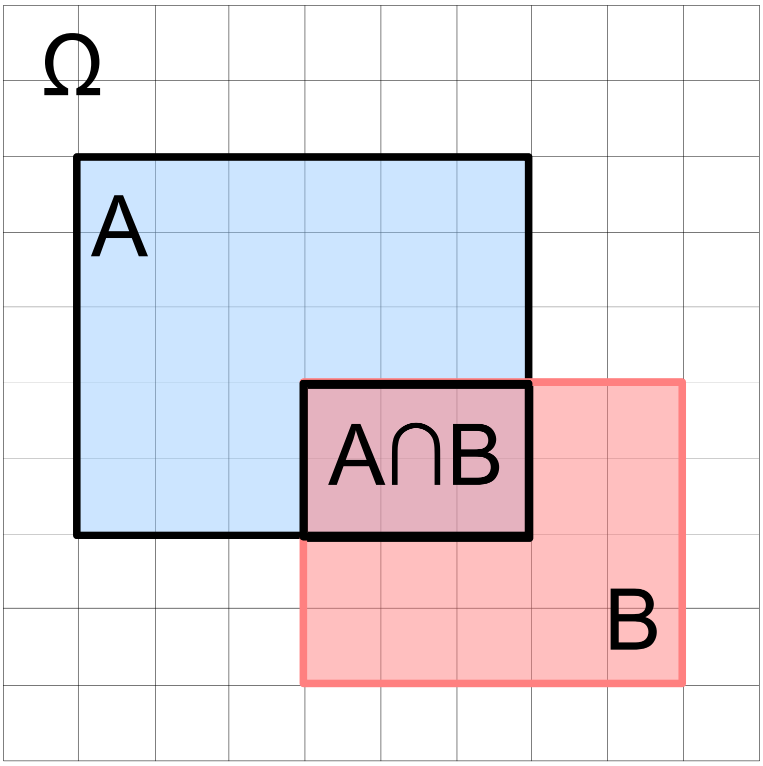
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein Element aus B zu erreichen, wenn man sich nur innerhalb der Menge A befindet.

Damit kann es sich eindeutig nur um die Elemente des Durchschnitts $A \cap B$ handeln, Elemente, die in auch in B liegen, wenn man weiß, dass A eingetreten ist.

Das sind 6 Felder innerhalb der 30 Felder, die zu A gehören.
Damit ist die Wahrscheinlichkeit 6 /30 = 1/5.

Die Bedingte Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts, beide Ereignisse treten ein, eingeschränkt auf das Ereignis, von dem man weiß, dass es schon eingetreten ist.

5.9. Stochastische Unabhängigkeit graphisch dargestellt.



$\Omega = 100$

$A = 30 \qquad \overline{A} = 70$

$B = 20 \qquad \overline{B} = 80$

$A \cap B = 6$

$P(A) = 30/100$

$P(B) = 20/100$

$P(A \cap B) = 6/100$

$P(\overline{A}) = 7/10$

$P(\overline{B}) = 8/10 = 4/5$

$P(\overline{A} \cap B) = 14/100$

$P(A \cap \overline{B}) = 24/100$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 56/100$

Bedingte Wahrscheinlichkeit nach der Formel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{6/100}{30/100} = \frac{1}{5}$$

$P(B) = 2/10 = 1/5 = P_A(B)$ Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig.

$P_B(A) = 6/20 = 3/10 = P(A)$ Die Ereignisse B und A sind stochastisch unabhängig.

> Wenn das Ereignis A unabhängig ist von B, dann ist auch das Ereignis B unabhängig von A.

$P_A(\overline{B}) = 24/30 = 4/5 = P(\overline{B})$ Die Ereignisse A und $\overline{B}$ sind stochastisch unabhängig.

Es gibt von den 30 Elementen aus A 24 Elemente , die zu $\overline{B}$ gehören.

$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 56/70 = 4/5 = P(\overline{B})$ Die Ereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind stochastisch unabhängig.

Es gibt von den 70 Elementen aus $\overline{A}$ 56 Elemente , die zu $\overline{B}$ gehören.

> Wenn die Ereignisse A und B unabhängig sind, dann sind auch die Ereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig.

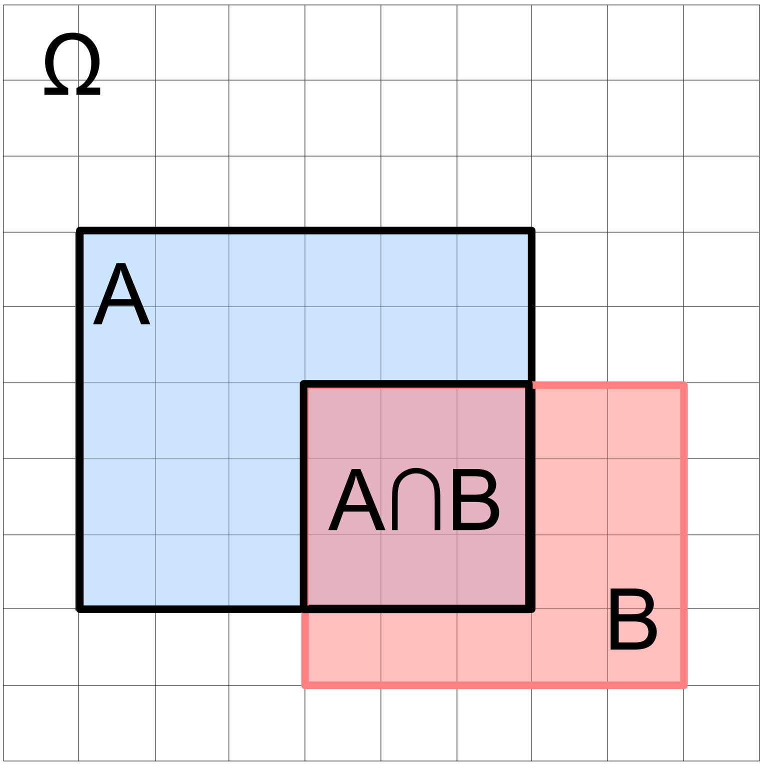
Stochastische Unabhängigkeit ist ein gewöhnlicher Dreisatz:

> Der Anteil von B bezogen auf ganz Ω ist das Gleiche, wie der Anteil von A ∩ B bezogen auf A.

$P(B) : P(\Omega) = P(A \cap B) : P(A)$ Da $P(\Omega) = 1$ ist ergibt sich aus der Formel:

$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ das heißt aber nichts anderes als: $P(B) = P_A(B)$, da rechts die Bedingte Wahrscheinlichkeit steht.

5.10. Stochastische Abhängigkeit graphisch dargestellt.



$\Omega = 100$

$A = 30$ $\quad \overline{A} = 70$

$B = 20$ $\quad \overline{B} = 80$

$A \cap B = 9$

$P(A) = 30/100$

$P(B) = 20/100$

$P(A \cap B) = 9/100$

Bedingte Wahrscheinlichkeit
nach der Formel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{9/100}{30/100} = \frac{3}{10}$$

$$\neq P(B)$$

Die Ereignisse sind stochastisch abhängig.

<u>Worin liegt der Unterschied zur vorherigen Aufstellung</u>

In der vorigen Aufstellung war P(B) = 20/ 100 = 1/5.
B hat 1/5 der Fläche von Ω überdeckt.

Innerhalb der 30 Elemente von A hat der Durchschnitt mit B 6 Elemente überdeckt.
Das ist 1/5 der Fläche von A.

<u>Stochastisch unabhängig</u>
= es ist gleichgültig ob man ganz zugrunde legt, oder nur die Ereignisse von A, die Elemente von B überdecken immer 1/5 der Fläche.

Auch in der jetzigen Aufstellung ist P(B) = 1/5 .
B hat 1/5 der Fläche von Ω überdeckt.

Innerhalb der 30 Elemente von A hat der Durchschnitt mit B 9 Elemente überdeckt.
Das ist 3/10 der Fläche von A.

<u>Stochastisch abhängig</u>
= es macht einen Unterschied, ob man ganz Ω zugrunde legt, oder nur die Ereignisse von A, die Elemente von B überdecken 1/5 der Fläche von Ω, aber 3/10 der Fläche von A.

Damit macht es einen Unterschied, ob man B auf ganz Ω bezieht oder nur auf das Ereignis A.

$P_A(B)$ = 9 Felder von 30 Feldern = 9/30
Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt : 30/100

$$\frac{9}{30} \cdot \frac{30}{100} = \frac{9}{100}$$

$P_B(A)$ = 9 Felder von 20 Feldern = 9/20
Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt : 20/100

$$\frac{9}{20} \cdot \frac{20}{100} = \frac{9}{100}$$

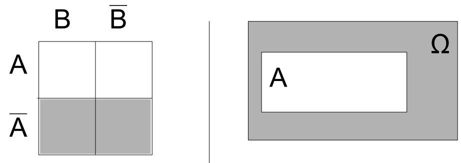
$= P(A \cap B)$

6. Mengen, Ereignisse, Aussagen

6.1. Mengenbilder (VENN-Diagramme), Symbole, Sprechweisen

$\overline{A}$

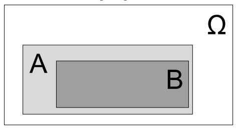
Das **Gegenereignis** $\overline{A}$ tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt.



P(A)

$B \subseteq A$

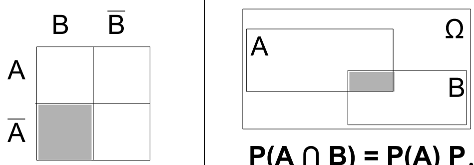
Das Ereignis B **zieht** das Ereignis A **nach sich** ; immer, wenn B eintritt, tritt auch A ein.



P(B) < P(A)

$A \cap B$

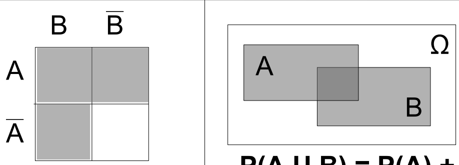
Das Ereignis **A und B** (A geschnitten B) tritt genau dann ein, wenn *sowohl A als auch B eintritt*



$P(A \cap B) = P(A)\ P_A(B) = P(B)\ P_B(A)$

A U B

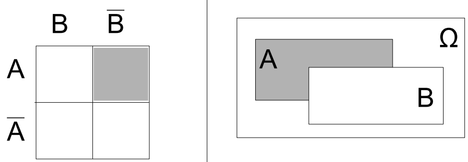
Das Ereignis **A oder B** (A vereinigt B) tritt genau dann ein, wenn *mindestens eines* der Ereignisse A, B eintritt.



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A \ B

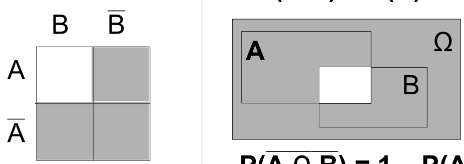
Das Ereignis A und nicht B (A minus B) tritt genau dann ein, wenn A eintritt und B nicht eintritt.
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$



$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$\overline{A \cap B}$

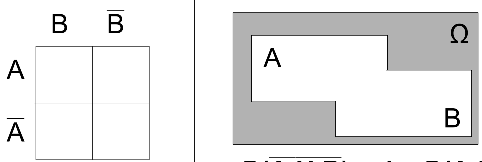
Höchsten eines der Ereignisse A,B tritt ein, wenn *entweder A oder B* oder *keines von beiden* eintritt.
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$
$= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$\overline{A \cup B}$

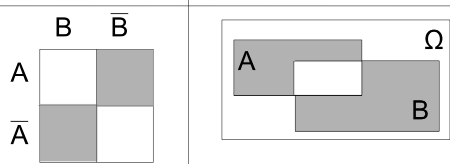
Das Ereignis **Weder A noch B** tritt genau dann ein, wenn keines der beiden Ereignisse A,B eintritt.
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$
$= P(\overline{A})\ P_{\overline{A}}(\overline{B})$

$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

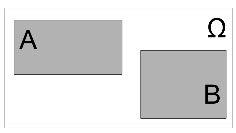
Das Ereignis **Entweder A oder B** tritt genau dann ein, wenn *genau eines* der Ereignisse A,B eintritt.



$P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(B) - 2\ P(A \cap B)$

$A \cap B = Ø$

Die Ereignisse A und B sind **unvereinbar**, d.h. sie können nicht gleichzeitig eintreten.



6.2 Mengenformeln und Verknüpfungen

6.2.1 äquivalente Terme (de Morgansche Regeln)

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ $\qquad$ $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

6.2.2 einfache Verknüpfungen

$A \cup \overline{A} = \Omega$ $\qquad$ $B \cup \overline{B} = \Omega$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\qquad$ $B \cap \overline{B} = \varnothing$

6.2.3 komplexe Verknüpfungen

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$

$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$

$(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}$ $\qquad$ $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{B}$

$(\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \varnothing$ $\qquad$ $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \varnothing$

6.2.4 Distributivgesetze

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = A \cap (C \setminus B)$

$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Die Rechenzeichen für Mengenoperationen können wie „+“ oder “ • „ angesehen werden, wobei der Operator außerhalb der Klammer immer als „ • “ anzusehen ist und der in der Klammer immer als „+“.
Es spielt keine Rolle, ob außerhalb das Durchschnittszeichen oder das Vereinigungszeichen steht.

6.2.5 Assoziativgesetze

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Alle drei Ereignisse treten ein.	$A \cap B \cap C$
Keines der drei Ereignisse tritt ein.	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
Mindestens eines der drei Ereignisse tritt ein.	$A \cup B \cup C$
Höchstens zwei der drei Ereignisse treten ein.	$\overline{A \cap B \cap C}$
Von den drei Ereignissen tritt nur C ein.	$C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
Von den drei Ereignissen treten nur B und C ein.	$\overline{A} \cap B \cap C$
Genau eines der drei Ereignisse tritt ein.	$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
Höchstens eines der drei Ereignisse tritt ein.	$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
Genau zwei der drei Ereignisse treten ein.	$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$
Mindestens zwei der drei Ereignisse treten ein.	$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

7. Regeln für 3 Ereignisse

Im Abitur 2008 war eine Aufgabe gestellt, in der drei verschiedene Ereignisse auftraten. Dazu sollte eine bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet werden, unter der Bedingung des „nicht Eintretens“ eines Ereignisses. Die drei Ereignisse konnten sowohl in der 1. Stufe, als auch in der 2. Stufe eintreten. Damit stell sich das „nicht Eintreten“ eines Ereignisses in jeder Stufe als Zusammensetzung von zwei Ereignissen dar. Es gibt deshalb nicht $\overline{A}$, sondern $\overline{A}$ ist B und C.

7.1. Multiplikationssatz für 3 Ereignisse

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cap C))$$
$$= P(A \mid B \cap C) \cdot P(B \cap C) \qquad = P(B \cap C) \cdot P_{B \cap C}(A)$$
$$= P(A \mid B \cap C) \cdot P(B \mid C) \cdot P(C) \qquad = P_{B \cap C}(A) \cdot P_C(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C \mid (A \cap B))$$
$$= P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

7.2. Additionssatz für 3 Ereignisse

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\ \ P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\ \ P(B)}{P(A|B)\,P(B) + P(A|\overline{B})\,P(\overline{B})}$$

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A|C)\ \ P(C)}{P(A)} = \frac{P(A|C)\ \ P(C)}{P(A|C)\,P(C) + P(A|\overline{C})\,P(\overline{C})}$$

$$P_A(B) = 1 - P_A(\overline{B}) \qquad \text{aber:} \qquad P_{\overline{A}}(B) \neq 1 - P_A(B)$$

7.3. Formeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P_A(C|B) = P(C \mid A \cap B)$$

$$P_B(A|C) = P(A \mid B \cap C)$$

$$P_{A \cap B}(C) = P(C|A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)\,P(B|A)}$$

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

$$\boxed{P(A \cap B|C)\,P(C) = P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)\,P(B|A)\,P(A)}$$

$$P_A(B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)}$$

$$\boxed{P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)}$$

$$P(A \cup B \mid C) = P(A|C) + P(B|C) \quad \text{wenn } A \cap B = \emptyset$$

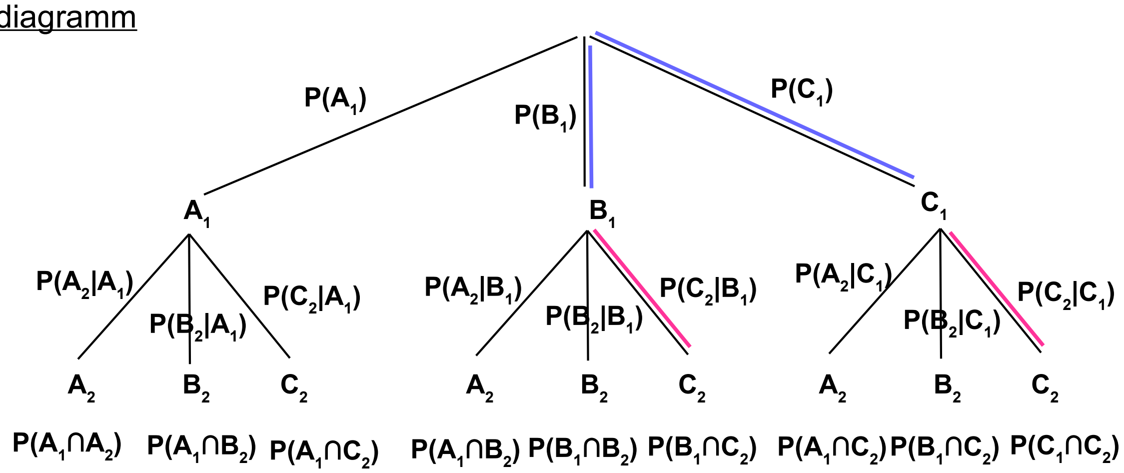
7.4. Bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im zweiten Versuch unter der Bedingung, dass ein Ereignis im ersten Versuch nicht eingetreten ist.

$P_{\overline{A1}}(C_2)$

- gleiche Ereignisse in beiden Stufen
- keine wirklichen Gegenereignisse; Gegenereignisse sind die Summe der beiden anderen Ereignisse
- da in beiden Stufen gleiche Ereignisse auftreten, ist es empfehlenswert, die Ereignisse mit der Stufennummer zu versehen

Gesucht ist ein Ereignis im zweiten Versuch, unter der Bedingung, dass im ersten Versuch ein Ereignis nicht eingetreten ist. Dieses Nicht – Eintreten setzt sich zusammen, dass eines von zwei anderen Ereignisse eingetreten ist.

Baumdiagramm



$P(\overline{A_1}) = P(B_1) + P(C_1)$

$P(\overline{B_1}) = P(A_1) + P(C_1)$

$P(\overline{C_1}) = P(A_1) + P(B_1)$

$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)\, P(B_2|A_1) \;=\; P(B_1)\, P(A_2|B_1) = P(A_2 \cap B_1)$

$P(A_1 \cap C_2) = P(A_1)\, P(C_2|A_1) \;=\; P(C_1)\, P(A_2|C_1) = P(A_2 \cap C_1)$

$P(B_1 \cap C_2) = P(B_1)\, P(C_2|B_1) \;=\; P(C_1)\, P(B_2|C_1) = P(B_2 \cap C_1)$

Formeln der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P_{\overline{A1}}(C_2) = P_{B1UC1}(C_2) = \frac{P(\,(B_1 U C_1) \cap C_2)}{P(B_1 U C_1)} = \frac{P(\,(B_1 \cap C_2)\; U\; (C_1 \cap C_2)\,)}{P(B_1) + P(C_1) - P(B_1 \cap C_1)}$$

$P(B_1 \cap C_1) = 0$, da beim ersten Versuch nicht gleichzeitig B und C eintreten kann.

$$= \frac{P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap C_2) - P(\,(B_1 \cap C_2) \cap (C_1 \cap C_2)\,)}{P(B_1) + P(C_1)}$$

$$= \frac{P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap C_2) - P(\,B_1 \cap C_1 \cap C_2\,)}{P(B_1) + P(C_1)}$$

mit der gleiche Begründung $P(B_1 \cap C_1) = 0$ ist auch $P(\,B_1 \cap C_1 \cap C_2\,) = 0$

$$= \frac{P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap C_2)}{P(B_1) + P(C_1)}$$

Im Zähler sind die Gesamtpfade *blau* plus *rot*;
im Nenner sind die *blauen* Pfade für die Ereignisse der Bedingung

$$\boxed{P_{\overline{A1}}(C_2) = P_{B1UC1}(C_2) = \frac{P(B_1) \bullet P(C_2\,|B_1) + P(C_1) \bullet P(C_2\,|\,C_1)}{P(B_1) + P(C_1)}}$$

9 – Felder – Tafel

Für diese Art der Berechnung gibt es keine adäquate Felder Tafel, mit der sich die Berechnung anschaulich darstellen lässt. Das erste und Hauptproblem liegt in der Tatsache, dass das Gegenereignis eines Ereignisses, A zum Beispiel, aus zwei Ereignissen B und C besteht. Damit gibt zwei mögliche Ereignisse, die als Gegenereignis von A zu betrachten sind. Es wird hier der Versuch gemacht, eine adäquate Tabelle zu entwickeln, die eine solche Berechnung anschaulich macht. Eine solche Tabelle ist also nicht Bestandteil der normalen Wahrscheinlichkeitsrechnung.

2. Ziehung

1. Ziehung

	$P(X\cap A_2)$	$P(X\cap B_2)$	$P(X\cap C_2)$	
$P(A_1\cap X)$	$P(A_1\cap A_2)$ $P(A_1)\,P_{A1}(A_2)$	$P(A_1\cap B_2)$ $P(A_1)\,P_{A1}(B_2)$	$P(A_1\cap C_2)$ $P(A_1)\,P_{A1}(C_2)$	$P(A_1)$
$P(B_1\cap X)$	$P(B_1\cap A_2)$ $P(B_1)\,P_{B1}(A_2)$	$P(B_1\cap B_2)$ $P(B_1)\,P_{B1}(B_2)$	$P(B_1\cap C_2)$ $P(B_1)\,P_{B1}(C_2)$	$P(B_1)$
$P(C_1\cap X)$	$P(C_1\cap A_2)$ $P(C_1)\,P_{C1}(A_2)$	$P(C_1\cap B_2)$ $P(C_1)\,P_{C1}(B_2)$	$P(C_1\cap C_2)$ $P(C_1)\,P_{C1}(C_2)$	$P(C_1)$
	$P(A_2)$	$P(B_2)$	$P(C_2)$	

Hier handelt es sich um drei alternative Ereignisse, die selbst kein Gegenereignis haben. Die Gegenereignisse stellen jeweils die beiden anderen Ereignisse dar. Es gibt also nicht ein Gegenereignis, sondern zwei. Die beiden Gegenereignisse müssen nach dem Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit behandelt werden.und die Wahrscheinlichkeiten addiert werden. Da sie aber durchschnittsfremd sind, gibt es keine Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts, die subtrahiert werden muss. Die Darstellung in dieser 9 – Felder – Tafel ist ein eigener Vorschlag dazu.

Im Mittelteil der 9 – Felder Tafel erscheinen alle die Wahrscheinlichkeiten, die zu zwei Ereignissen führen, damit der Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts zweier Ereignisse, wie in der 4 – Felder Tafel. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten über die Produktregel.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass z.B das Ereignis B2 eintritt, wenn A1 eingetreten ist, lässt sich in dieser Tafel genau so leicht ermitteln , wie in einer normalen Vier – Felder – Tafel, da nur durch die Zeilensumme der eingetretenen Wahrscheinlichkeit zu dividieren ist. Schwieriger ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, wenn als erstes Ereignis zwei Ereignisse möglich sind, bzw. wenn die Bedingung lautet, dass ein Ereignis nicht eingetreten ist. Das Hauptproblem ist, dass der Nenner aus einer Summe besteht und dass jede Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts durch diese Summe dividiert werden muss.

Dazu soll der vorherige Fall noch einmal betrachtet werden:

$$P_{\overline{A1}}(C_2) = P_{B1 \cup C1}(C_2) = \frac{P(B_1)\cdot P(C_2\,|B_1) + P(C_1)\cdot P(C_2\,|\,C_1)}{P(B_1) + P(C_1)}$$

2. Ziehung

1. Ziehung

	$P(X\cap A_2)$	$P(X\cap B_2)$	$P(X\cap C_2)$	
$P(A_1\cap X)$	$P(A_1\cap A_2)$ $P(A_1)\,P_{A1}(A_2)$	$P(A_1\cap B_2)$ $P(A_1)\,P_{A1}(B_2)$	$P(A_1\cap C_2)$ $P(A_1)\,P_{A1}(C_2)$	$P(A_1)$
$P(B_1\cap X)$	$P(B_1\cap A_2)$ $P(B_1)\,P_{B1}(A_2)$	$P(B_1\cap B_2)$ $P(B_1)\,P_{B1}(B_2)$	$P(B_1\cap C_2)$ $P(B_1)\,P_{B1}(C_2)$	$P(B_1)$
$P(C_1\cap X)$	$P(C_1\cap A_2)$ $P(C_1)\,P_{C1}(A_2)$	$P(C_1\cap B_2)$ $P(C_1)\,P_{C1}(B_2)$	$P(C_1\cap C_2)$ $P(C_1)\,P_{C1}(C_2)$	$P(C_1)$
	$P(A_2)$	$P(B_2)$	$P(C_2)$	

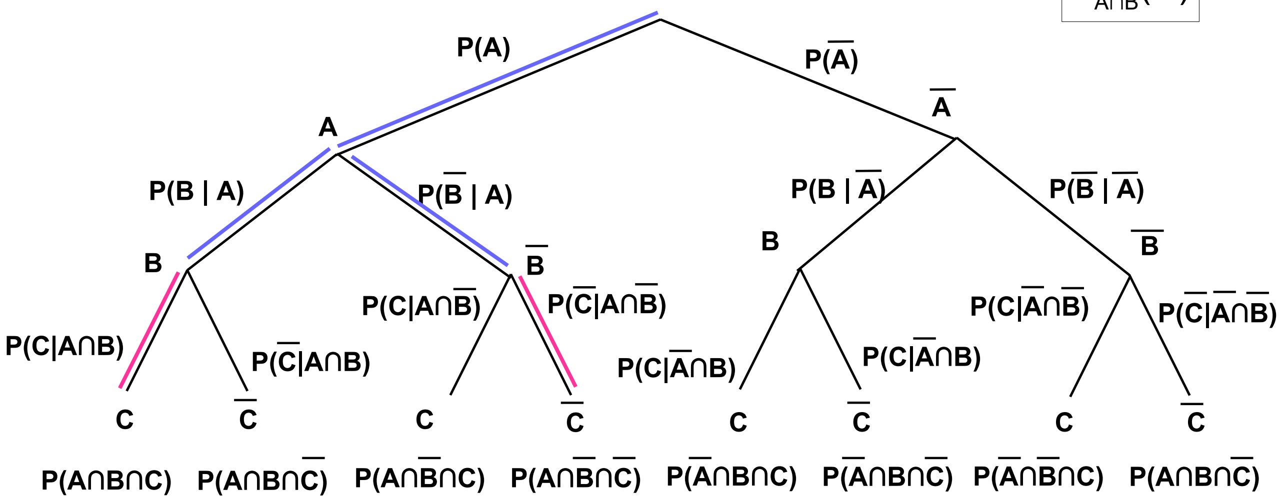
7.5. Bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unter der Bedingung, dass zwei andere Ereignisse eingetreten sind.

7.5.1. Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung des Durchschnitts zweier Ereignisse

$P_{A\cap B}(C)$

$P_{A\cap B}(C)$

Baumdiagramm



Formeln der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P_{A\cap B}(C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A\cap B)} \quad \boxed{= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)\ P(B|A)}}$$

$$P_{B\cap \overline{C}}(A) = \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B\cap \overline{C})} = \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B)\ P(\overline{C}|B)}$$

8 – Felder - Tafel

Für drei verschiedene Ereignisse ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine 8 – Felder – Tafel bekannt. Insbesondere die Anordnung der Summen gestaltet sich hier etwas schwierig und muss für die dritte Ereignis geteilt werden. Es gibt diese Anordnungen sowohl in horizontaler, wie auch in vertikaler Form. Hier wurde sich für die horizontale Form entschieden, da sie das Blatt besser ausnutzt.

		B		$\overline{B}$	
		$P(B)$		**$P(\overline{B})$**	
A	**$P(A)$**	**$P(A\cap B\cap \overline{C})$**	**$P(A\cap B\cap C)$**	**$P(A\cap \overline{B}\cap C)$**	**$P(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})$**
$\overline{A}$	**$P(\overline{A})$**	**$P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})$**	**$P(\overline{A}\cap B\cap C)$**	**$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)$**	**$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C})$**
		$P(\overline{C})$	**$P(C)$**		**$P(\overline{C})$**
		$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Die Ereignisse A und $\overline{A}$

Da das Ereignis A das erste Ereignis ist, welches Eintritt, ist es kein Problem die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A oder das Ereignis $\overline{A}$ zu bestimmen.

Die Ereignisse B und $\overline{B}$

Etwas schwieriger ist es mit der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B. Dieses Ereignis kann erst eintreten, wenn entweder A oder $\overline{A}$ eingetreten ist, da es das Ereignis der zweiten Stufe ist. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B über die Berechnung der Totalen Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

		B		$\overline{B}$	
		P(B)		**P($\overline{B}$)**	
A	**P(A)**	**P(A∩B∩$\overline{C}$)**	**P(A∩B∩C)**	**P(A∩$\overline{B}$∩C)**	**P(A∩$\overline{B}$∩$\overline{C}$)**
$\overline{A}$	**P($\overline{A}$)**	**P($\overline{A}$∩B∩$\overline{C}$)**	**P($\overline{A}$∩B∩C)**	**P($\overline{A}$∩$\overline{B}$∩C)**	**P($\overline{A}$∩$\overline{B}$∩$\overline{C}$)**
		P($\overline{C}$)	**P(C)**		**P($\overline{C}$)**
		$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse B und $\overline{B}$ ergeben sich aus den vier umrahmten Ereignissen und sind die dem vorgesehenen Feld unter dem Ereignis einzutragen.

Die Ereignisse C und $\overline{C}$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse C und $\overline{C}$ lassen sich auf ähnliche Weise berechnen.

		B		$\overline{B}$	
		P(B)		**P($\overline{B}$)**	
A	**P(A)**	**P(A∩B∩$\overline{C}$)**	**P(A∩B∩C)**	**P(A∩$\overline{B}$∩C)**	**P(A∩$\overline{B}$∩$\overline{C}$)**
$\overline{A}$	**P($\overline{A}$)**	**P($\overline{A}$∩B∩$\overline{C}$)**	**P($\overline{A}$∩B∩C)**	**P($\overline{A}$∩$\overline{B}$∩C)**	**P($\overline{A}$∩$\overline{B}$∩$\overline{C}$)**
		P($\overline{C}$)	**P(C)**		**P($\overline{C}$)**
		$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass für P($\overline{C}$) alle vier Felder zu addieren sind und die Gesamtsumme in beide Felder oberhalb des Ereignisses $\overline{C}$ einzutragen sind. Es sollten dort nicht nur die jeweiligen Spaltensummen eingetragen werden.

Die Ereignisse A ∩ B und $\overline{A}$ ∩ B und andere

Für die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit sind die Durchschnittswahrscheinlichkeiten der ersten beiden Ereignisse notwendig, die bereits eingetreten sind, bevor das Ereignis C eintreten kann. Diese Ereignisse lassen sich in dieser Struktur noch nicht unterbringen.

Dazu wird eine Erweiterung der 8 – Felder Tafel empfohlen.

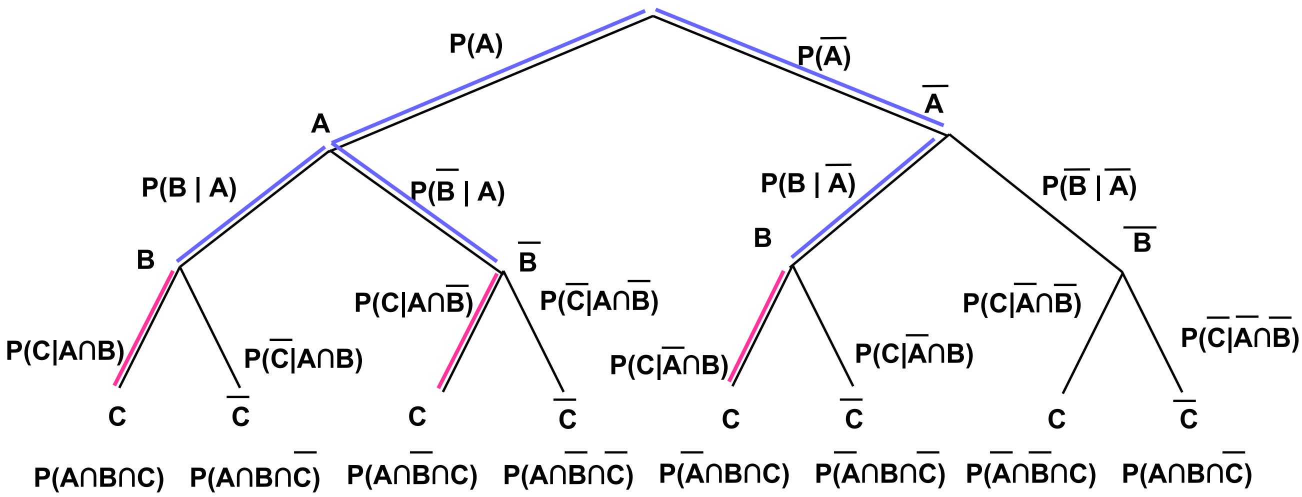
		B			$\overline{B}$		
		P(B)			**P($\overline{B}$)**		
A	**P(A)**	**P(A∩B)**	**P(A∩B∩$\overline{C}$)**	**P(A∩B∩C)**	**P(A∩$\overline{B}$∩C)**	**P(A∩$\overline{B}$∩$\overline{C}$)**	**P(A∩$\overline{B}$)**
$\overline{A}$	**P($\overline{A}$)**	**P($\overline{A}$∩B)**	**P($\overline{A}$∩B∩$\overline{C}$)**	**P($\overline{A}$∩B∩C)**	**P($\overline{A}$∩$\overline{B}$∩C)**	**P($\overline{A}$∩$\overline{B}$∩$\overline{C}$)**	**P($\overline{A}$∩$\overline{B}$)**
			P($\overline{C}$)	**P(C)**		**P($\overline{C}$)**	
			$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

7.5.2. Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung der Vereinigung zweier Ereignisse

$P_{AUB}(C)$

Für die Berechnungszwecke, die für die bedingte Wahrscheinlichkeit gebraucht werden soll hier davon ausgegangen werden, dass in jeder Stufe verschiedene Ereignisse eintreten und nicht ein Ereignis in der zweiten und in der dritten Stufe eintreten kann. In jeder Stufe können unabhängig von den Vorergebnissen jeweils alle Ereignisse der Stufe eintreten.

Baumdiagramm



Betroffen sind dabei die *blauen* und *roten* Linien für das Gesamtereignisse bis zum Ereignis C, deren Wahrscheinlichkeiten für die Berechnung des Zählers notwendig sind, und die *blauen* Linien für die Bedingung unter denen das Ereignis C stattfinden soll. Diese Wahrscheinlichkeiten sind für den Nenner ausschlaggebend.

Aus dem Baumdiagramm kann man einige allgemeine Formeln für die Berechnung der Gesamtwahrscheinlichkeiten auf der 2. und 3. Stufe herleiten, die sich aus dem Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit ergeben. Diese Formeln sind für die Herleitung der gesuchten Zusammenhänge nützlich.

(1) $P(B) = P(A)\, P(B|A) + P(\overline{A})\, P(B|\overline{A})$

Die Wahrscheinlichkeit von B setzt sich zusammen aus der Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt unter der Bedingung A und unter der Bedingung $\overline{A}$.

(2) $P(C) = P(A \cap B)\, P(C|A \cap B) + P(A \cap \overline{B})\, P(C|A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)\, P(C|\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})\, P(C|\overline{A} \cap \overline{B})$

Die Wahrscheinlichkeit für C setzt sich zusammen aus allen Pfaden, die im Ereignis C enden.

(3) $P(C|A) = P(C|A \cap B) + P(C|A \cap \overline{B})$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass C eintritt unter der Bedingung A setzt sich zusammen, dass nach dem Ereignis A entweder das Ereignis B oder das Ereignis $\overline{B}$ eintritt

(4) $P(C|B) = P(A \cap B)\, P(C|A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)\, P(C|\overline{A} \cap B)$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass C eintritt unter der Bedingung B setzt sich zusammen, dass vor dem Ereignis B entweder das Ereignis A oder das Ereignis $\overline{A}$ eingetreten ist.

(5) $P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C)$

(6) $P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C)$

Formeln der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P_{AUB}(C) = \frac{P(\,(AUB) \cap C)}{P(AUB)} = \frac{P(\,(A \cap C)\ U\ (B \cap C)\,)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Umrechnung Zähler:

$$P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = P(A\cap C) + P(B\cap C) - P((A\cap C)\cap(B\cap C)) \quad \textit{(Additionssatz)}$$

$$= \underbrace{P(A\cap C)}_{(5)} + \underbrace{P(B\cap C)}_{(6)} - P(A\cap B\cap C)$$

$$= P(A\cap B\cap C) + P(A\cap \overline{B}\cap C) + \cancel{P(A\cap B\cap C)} + P(\overline{A}\cap B\cap C) - \cancel{P(A\cap B\cap C)}$$

$$= P(A\cap B\cap C) + P(A\cap \overline{B}\cap C) + P(\overline{A}\cap B\cap C)$$

Das sind die drei Wahrscheinlichkeiten am Ende der roten Linien.

Umrechnung Nenner:

$$P(A) + \underbrace{P(B)}_{(1)} - P(A\cap B) \quad \textit{(Multiplikationssatz)}$$

$$= P(A) + P(A)\,P(B|A) + P(\overline{A})\,P(B|\overline{A}) - P(A)\,P(B|A)$$

$$= P(A) + P(\overline{A})\,P(B|\overline{A})$$

Das sind die Wahrscheinlichkeiten am Ende der blauen Linien. Wobei mit dem Eintreten des Ereignisses A sowohl die blaue Linie zu B, wie auch die blaue Linie zu $\overline{B}$ möglich sind. D., die Wahrscheinlichkeit P(A) deckt im Baum zwei blaue Linien ab.

Gesamtergebnis:

$$\boxed{P_{A\cup B}(C) = \frac{P(A\cap B\cap C) + P(A\cap \overline{B}\cap C) + P(\overline{A}\cap B\cap C)}{P(A) + P(\overline{A})\,P(B|\overline{A})}}$$

8 – Felder - Tafel

		B			$\overline{B}$		
		P(B)			$P(\overline{B})$		
A	P(A)	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B\cap\overline{C})$	$P(A\cap B\cap C)$	$P(A\cap\overline{B}\cap C)$	$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$	$P(A\cap\overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})$	$P(\overline{A}\cap B\cap C)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$
			$P(\overline{C})$	P(C)		$P(\overline{C})$	
			$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

oder man lässt die summierten Felder ganz weg. Die Wahrscheinlichkeit P(A) ist die gesamte erste Zeile, die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A}\cap B)$ sind die beiden Spalten der zweiten Zeile unter B.

		B			$\overline{B}$		
		P(B)			$P(\overline{B})$		
A	P(A)	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B\cap\overline{C})$	$P(A\cap B\cap C)$	$P(A\cap\overline{B}\cap C)$	$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$	$P(A\cap\overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})$	$P(\overline{A}\cap B\cap C)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$
			$P(\overline{C})$	P(C)		$P(\overline{C})$	
			$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

Die grün umrandeten Felder kommen für den Nenner noch dazu.

Stellt man die vorhergehende 8 – Felder Tafel so um, daß die beiden Ereignisse, die die Bedingung bilden, jeweils oben und unten stehen, und das Ereignis, das als drittes untersucht werden soll vorn steht, ändert sich die Tafel in der folgenden Weise.

			A		$\overline{A}$		
			$P(A)$		$P(\overline{A})$		
C	$P(C)$		$P(A\cap B\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap C)$	$P(\overline{A}\cap B\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)$	
$\overline{C}$	$P(\overline{C})$		$P(A\cap B\cap \overline{C})$	$P(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	
			$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	
				$P(\overline{B})$	$P(B)$		
			B	$\overline{B}$	B	$\overline{B}$	

Abgesehen davon, daß die Darstellung etwas symmetrischer aussieht ist der entscheidende Vorteil, daß man eine Zeile für die Durchschittswahrscheinlichkeiten von A und B bzw. ihrer Gegenereignisse erhält. Wenn man sich vor Augen hält, daß die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung die gleiche ist, wie die Summe aus drei Wahrscheinlichkeiten des Durchschnitts wird der Vorteil noch klarer:

$$P(A\cup B) = P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B}) + P(\overline{A}\cap B)$$

Die drei Ereignisse der rechten Seite sind durchschnittsfremd, daß heißt nach dem Additionssatz, es gibt nichts zu subtrahierten und für diese drei Wahrscheinlichkeiten ist jetzt ein Platz unter der 8 – Felder Tafel vorhanden, den man durch spaltenweise Addition füllen kann. Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung ist die Summe dieser drei Felder.

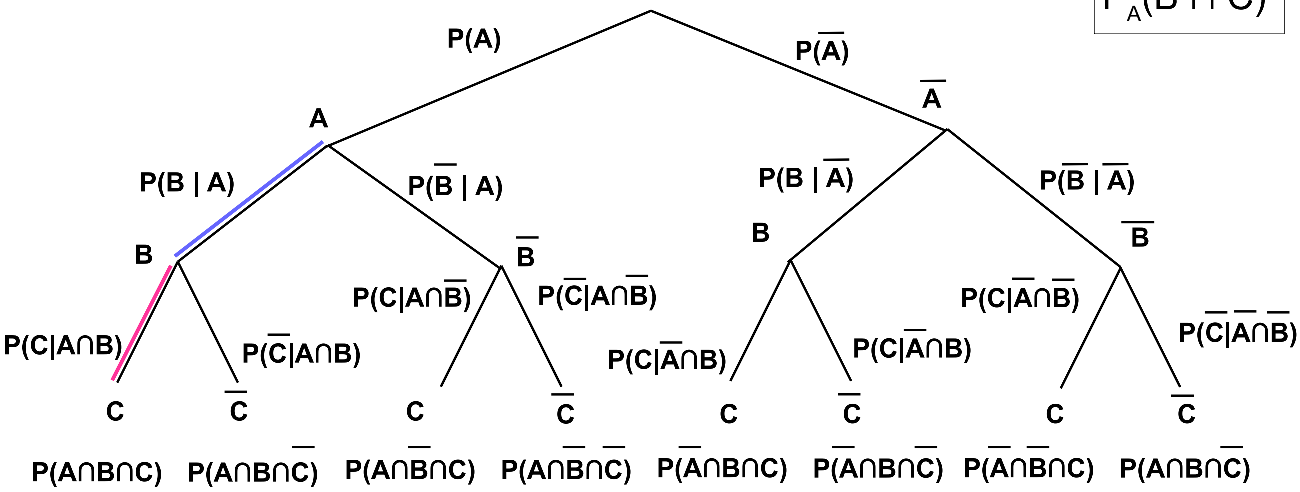
			A		$\overline{A}$		
			$P(A)$		$P(\overline{A})$		
C	$P(C)$		$P(A\cap B\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap C)$	$P(\overline{A}\cap B\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)$	
$\overline{C}$	$P(\overline{C})$		$P(A\cap B\cap \overline{C})$	$P(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	
			$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	
				$P(\overline{B})$	$P(B)$		
			B	$\overline{B}$	B	$\overline{B}$	

7.6. Bedingte Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisses unter der Bedingung, dass ein anderes Ereignisse eingetreten sind.

7.6.1. Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts zweier Ereignisse unter der Bedingung eines Ereignisses

Baumdiagramm

$$P_A(B \cap C)$$



Formeln der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P_A(B \cap C) = \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(A)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)} = \frac{P_{A\cap B}(C) \cdot P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P_{A\cap B}(C) \cdot P(A) \cdot P_A(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A\cap B}(C)}{P(A)}$$

$$\boxed{P_A(B \cap C) = P_{A \cap B}(C)\ P_A(B)}$$

Die Berechnung ist ohne P(A), da die Berechnung erst einsetzt, wenn A bereits eingetreten ist. Es zählen nur die Wahrscheinlichkeiten von B und C, aber dort nur die, die eintreten, wenn A gewesen ist.

8 – Felder - Tafel

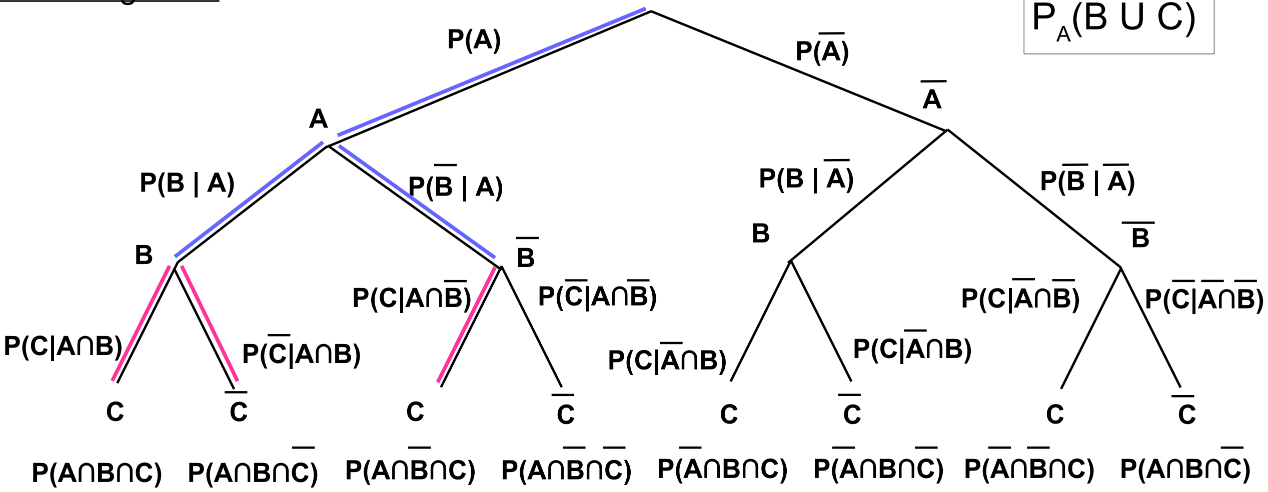
			B		$\overline{B}$		
			P(B)		$P(\overline{B})$		
A	P(A)	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B\cap \overline{C})$	$P(A\cap B\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(A\cap \overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap B\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$
			$P(\overline{C})$	P(C)		$P(\overline{C})$	
			$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

			B		$\overline{B}$		
			P(B)		$P(\overline{B})$		
A	P(A)	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B\cap \overline{C})$	$P(A\cap B\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(A\cap \overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap B\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$
			$P(\overline{C})$	P(C)		$P(\overline{C})$	
			$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

7.6.2. Wahrscheinlichkeit der Vereinigung zweier Ereignisse unter der Bedingung eines Ereignisses

Baumdiagramm

$P_A(B \cup C)$



Formeln der bedingten Wahrscheinlichkeit

Allgemeine Formeln: $P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C)$

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$

$$P_A(B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C)\,)}{P(A)} = \frac{P(\,(A \cap B) \cup (A \cap C)\,)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)\,) - P((A \cap B) \cap (A \cap C)\,)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)\,) - P(A \cap B \cap C)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A)\,P(B|A) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(A)}$$

$$= P(B|A) + \frac{P(A \cap \overline{B} \cap C)}{P(A)}$$

$$= P(B|A) + \frac{P(\overline{B} \cap C \cap A)}{P(A)} = P(B|A) + \frac{P(C)\,P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = P(B|A) + \frac{P(C)\,P(\overline{B}|A)\,P(A)}{P(A)}$$

$$= P(B|A) + \frac{P(A) \bullet P(\overline{B} \cap C|A)}{P(A)}$$

$$\boxed{P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(\overline{B})\; P(C)}$$

$$\boxed{P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(\overline{B} \cap C)}$$

$$= P(B|A) + \frac{P(A) \bullet P(C \mid A \cap \overline{B}\,)}{P(A)}$$

$$\boxed{P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_{A\cap\overline{B}}(C)}$$

8 – Felder - Tafel

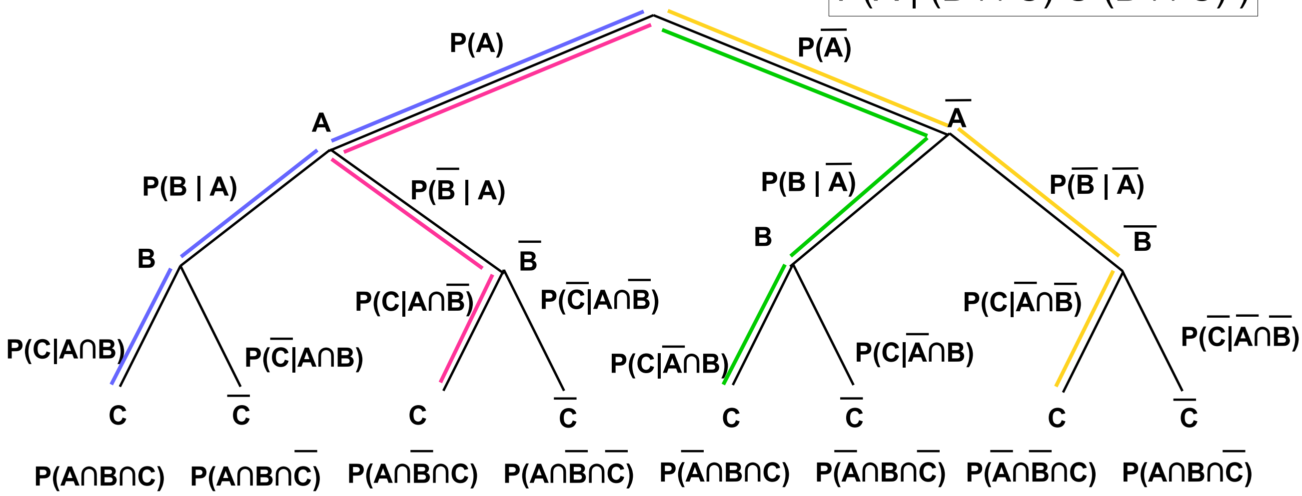
		B			$\overline{B}$		
		P(B)			$P(\overline{B})$		
A	P(A)	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B\cap \overline{C})$	$P(A\cap B\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(A\cap \overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap B\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$
			$P(\overline{C})$	P(C)		$P(\overline{C})$	
			$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

		B			$\overline{B}$		
		P(B)			$P(\overline{B})$		
A	P(A)	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B\cap \overline{C})$	$P(A\cap B\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap C)$	$P(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(A\cap \overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap B\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$
			$P(\overline{C})$	P(C)		$P(\overline{C})$	
			$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

7.6.2. Wahrscheinlichkeit der Vereinigung zweier Ereignisse unter der Bedingung eines Ereignisses

Baumdiagramm

$$P(A \mid (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C))$$



Die Ereignisse, die die Bedingung darstellen befinden sich am zweiten und am dritten Baum. Es sind alle Pfade zu erfassen, bei denen die Ereignisse B und $\overline{C}$ sowie $\overline{B}$ und C auftreten. Diese Wahrscheinlichkeiten stellen den **Nenner** des Ausdrucks dar.

Im **Zähler** des Ausdrucks erscheinen nur die Pfade, in denen auch das Ereignis A auftritt.Das sind im obigen Baumdiagramm der blaue und der rote Pfad.

Formeln der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P\left(A \mid (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\right) = \frac{P\left(A \cap \left((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\right)\right)}{P\left((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\right)}$$

Zählerausdruck:

$$P\left(A \cap \left((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\right)\right) = P\left((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)\right)$$

Nach dem Distributivgesetz aus 6.2.4. Dabei wird $(B \cap \overline{C})$ und $(\overline{B} \cap C)$ jeweils als ein Ereignis angesehen. Bei dem gleichen Operationszeichen, in diesem Fall $\cap$ brauchen keine inneren Klammern gesetzt werden, da es sich um die gleiche Rechenoperation handelt und keine Vorrangregeln zu beachten sind.

Die Auslösung der Vereinigung erfolgt über den Additionssatz unter der Berücksichtigung, dass es sich dabei um zwei Ereignisse handelt: $(A \cap B \cap \overline{C})$ und $(A \cap \overline{B} \cap C)$.
Diese beiden Ereignisse sind aber durchschnittsfremd. Es gibt kein Ereignis, das in beiden Fällen enthalten ist. Damit vereinfacht sich der Additionssatz

$$P\left((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)\right) = P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C)$$

Es wird keine Subtraktion benötigt.

Mathematische Erklärung:
Das ist das grundsätzliche Ziel solcher Aufgaben: Der Zähler- (und dann auch der Nenner-)ausdruck der bedingten Wahrscheinlichkeit wird in Ausdrücke aufgelöst, in denen nur noch Durchschnitte auftreten. Damit gibt es keine vorgeschriebene Reihenfolge mehr. Jetzt lässt sich dieser Durchschnitt umändern in eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die durch den Baum (die Versuchsreihenfolge) abgebildet werden kann.

aus $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ folgt => $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$ aber auch $P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$

Für drei Ereignisse heißt das, indem man jeweils zwei Ereignisse zu einem verbindet:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B \cap C \mid A) = P(B)\,P(A \cap C \mid B) = P(C)\,P(A \cap B \mid C)$$

oder

$$P(A \cap B \cap C) = P(A\cap B)\,P(C \mid A\cap B) = P(B\cap C)\,P(A \mid B\cap C) = P(A\cap C)\,P(B \mid A\cap C)$$

Zu welcher Formel man greifen kann,hängt von ab was der Baum an aufeinanderfolgenden Ereignissen liefern kann. In diesem Fall tritt das Ereignis A als erstes, das Ereignis B als zweites und das Ereignis C als drittes auf. Man kann damit also folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen:
Das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, dass B und C eingetreten sind.
Das Eintreten des Ereignisses C unter der Bedingung, dass A und B eingetreten sind.
Das Eintreten der Ereignisse B und C unter der Bedingung, dass A eingetreten ist usw.

Das ist das bisherige Ergebnis:

$$P\left[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)\right] = \boxed{P(A \cap B \cap \overline{C})} + \boxed{P(A \cap \overline{B} \cap C)}$$

Gesucht ist das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, dass B und $\overline{C}$ eingetreten sind:

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(B \cap \overline{C})\, P(A | B \cap \overline{C}) \quad = \quad P(A)\; P(B \cap \overline{C} | A)$$

und das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, dass $\overline{B}$ und C eingetreten sind:

$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = P(\overline{B} \cap C)\, P(A | \overline{B} \cap C) \quad = \quad P(A)\; P(\overline{B} \cap C | A)$$

Während sich die Ausrücke hinter dem ersten Gleichheitszeichen nicht realisieren lassen, da das Ereignis A immer zuerst eintritt, aber niemals B oder C, lassen sich die Ausrücke hinter dem zweiten Gleichheitszeichen durchaus mit dem Baum realisieren, da dort das Ereignis A immer zuerst eintritt

$$\begin{aligned}
P\left[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)\right] &= P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) \\
&= P(A) \cdot P(B \cap \overline{C} | A) + P(A) \cdot P(\overline{B} \cap C | A) \\
&= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(\overline{C} | A \cap B) + P(A) \cdot P(\overline{B}|A) \cdot P(C | A \cap \overline{B})
\end{aligned}$$

<u>Nennerausdruck:</u>

$$P\left[(B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\right] = P(B \cap \overline{C}) + P(\overline{B} \cap C)$$

Erster Summand:

$$\begin{aligned}
P(B \cap \overline{C} \cap \Omega) &= P(B \cap \overline{C} \cap (A \cup \overline{A})) \\
&= P((B \cap \overline{C} \cap A) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}))
\end{aligned}$$

da die beiden Ereignisse durchschnittsfremd

$$\begin{aligned}
&= \boxed{P(A \cap B \cap \overline{C})} + \boxed{P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})} \\
&= P(A) \cdot P(B \cap \overline{C} | A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \cap \overline{C} | \overline{A}) \\
&= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(\overline{C} | A \cap B) + P(\overline{A}) \cdot P(B | \overline{A}) \cdot P(\overline{C} | \overline{A} \cap B)
\end{aligned}$$

Zweiter Summand:

$$\begin{aligned}
P(\overline{B} \cap C \cap \Omega) &= P(\overline{B} \cap C \cap (A \cup \overline{A})) \\
&= P((\overline{B} \cap C \cap A) \cup (\overline{B} \cap C \cap \overline{A}))
\end{aligned}$$

da die beiden Ereignisse durchschnittsfremd

$$\begin{aligned}
&= \boxed{P(A \cap \overline{B} \cap C)} + \boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)} \\
&= P(A) \cdot P(\overline{B} \cap C | A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \cap C | \overline{A}) \\
&= P(A) \cdot P(\overline{B}|A) \cdot P(C | A \cap \overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} | \overline{A}) \cdot P(C | \overline{A} \cap \overline{B})
\end{aligned}$$

Hier scheint es ratsam zu sein, die Wahrscheinlichkeiten direkt aus der 8 – Felder – Tafel zu entnehmen, da eine geeignete Summierung kaum möglich ist.

<u>8 – Felder - Tafel</u>

		B			$\overline{B}$		
		$P(B)$			$P(\overline{B})$		
A	$P(A)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B \cap \overline{C})$	$P(A \cap B \cap C)$	$P(A \cap \overline{B} \cap C)$	$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$	$P(A \cap \overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$	$P(\overline{A} \cap B \cap C)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$
			$P(\overline{C})$	$P(C)$		$P(\overline{C})$	
			$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

Stellt man auch hier die 8 – Felder – Tafel so um, daß die beiden Ereignisse, die die Bedingung bilden oben und unten an der Tafel stehen, sieht sie folgendermaßen aus:

			B			$\overline{B}$	
			$P(B)$			$P(\overline{B})$	
A	$P(A)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B \cap C)$	$\boxed{P(A \cap B \cap \overline{C})}$	$\boxed{P(A \cap \overline{B} \cap C)}$	$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$	$P(A \cap \overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B \cap C)$	$P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$
			$P(B \cap C)$	$\boxed{P(B \cap \overline{C})}$	$\boxed{P(\overline{B} \cap C)}$	$P(\overline{B} \cap \overline{C})$	
				$P(\overline{C})$	$P(C)$		
			C	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$	

Für den Nenner der bedingten Wahrscheinlichkeit benötigt man die

$$P\left[(B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\right] = P(B \cap \overline{C}) + P(\overline{B} \cap C)$$

Die beiden dafür gebrauchten Felder finden jetzt wieder Platz in der Tafel und können über Spaltenaddition ermittelt werden und müssen dann noch zusammen addiert werden.
In diesem Fall kommen die grün umrandeten Felder nicht zu den roten, um den Nenner zu bestimmen, sondern die Summe der grün umrandeten Felder ist der Nenner.

Die Beispiele haben gezeigt, wenn die Bedingung, unter der untersucht werden soll aus zwei Ereignissen zusammengesetzt ist, dann ist es vorteilhaft, wenn man diese beiden Ereignisse oberhalb und unterhalb der 8 – Felder – Tafel anlegt, da auf diese Weise Platz für die Felder der zusammengesetzten Ereignisse geschaffen werden können.

