Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

1. Vektoren

1.1 Vektor

Vektoren sind Klassen von Pfeilen.
Jeder Vektor hat

- eine Länge,
- eine Richtung und
- eine Orientierung.

Vektoren des R^3 beschreiben wir üblicherweise durch drei Komponenten:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

1.2. Verbindungsvektor oder Freier Vektor

Zwei Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ legen den Vektor $\overrightarrow{AB}$ fest.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Der Startpunkt dieses Vektors ist der Endpunkt vom Vektor A und der Zielpunkt ist der Endpunkt vom Vektor B.

1.3. Ortsvektor

Ein Vektor, der durch einen Pfeil vom Koordinatenursprung O zu einem Punkt P repräsentiert wird, heißt Ortsvektor. Für den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ schreiben wir kurz nur $\vec{P}$.

1.4. linear abhängig

Eine Menge von Vektoren heißt linear abhängig, wenn sich mindesten einer der Vektoren als Linearkombination der übrigen darstellen lässt.

$$t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

1.4. linear abhängig

Eine Menge von Vektoren heißt linear abhängig, wenn durch eine Linearkombination der Vektoren der Nullvektor erzeugt werden kann:

$$t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

1.5 linear unabhängig

Eine Menge von Vektoren heißt linear unabhängig, wenn aus einer Linearkombination der Vektoren der Nullvektor nur dann erzeugt werden kann, wen alle Linearfaktoren gleichzeitig 0 sind: t = s = u = 0

$$t\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

1.6 Betrag eines Vektors

Unter dem Betrag eines Vektors versteht man die Länge des Vektors.

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

1.7 Einheitsvektor

Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor

$$v^0 = \begin{pmatrix}\dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}\\ \dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}\\ \dfrac{v_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}\end{pmatrix}$$

(Um aus einem Vektor einen Einheitsvektor zu erzeugen muss man jede seiner Komponenten durch den Betrag des Vektors dividieren. Die allgemein übliche Bezeichnung eines Einheitsvektor ist eine 0 als Exponent am Vektor: v^0)

1.8 Skalarprodukt mit Komponenten

Für zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ nennt man den Ausdruck

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

das Skalarprodukt der beiden Vektoren u und v

Skalarprodukt deshalb, weil das Ergebnis eine skalare Größe ist, eine reelle Zahl
kein Vektor !

1.9 Skalarprodukt mit eingeschlossenem Winkel

Wenn man zwei Vektoren an einem gleichen Anfangspunkt beginnen lässt, dann bilden sie einen Winkel miteinander. Der Wert des Skalarproduktes kann dann auch mit Hilfe der Vektoren und dem Wert des eingeschlossenen Winkel ausgedrückt werden.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos (\sphericalangle\, \vec{u}, \vec{v})$$

Folgerungen:

(1) $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^0$
Zwei Vektoren a , b mit a ≠ 0 und b ≠ 0 sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.

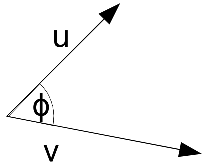
(2) $\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst liefert das Quadrat des Betrages des Vektors. Damit gibt es eine weitere Möglichkeit den Betrag eines Vektors zu berechnen:
$$|a| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

1.10 Winkel zwischen zwei Vektoren

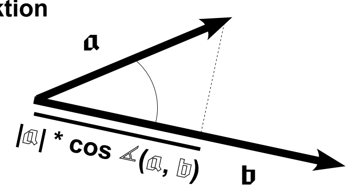
Bilden die Vektoren u und v den Winkel ϕ ($0° \le \phi \le 180°$), so gilt auf grund der beiden Definitionen des Skalarproduktes:

$$\cos(\measuredangle\, u, v) = \frac{u \circ v}{|u|\ |v|}$$

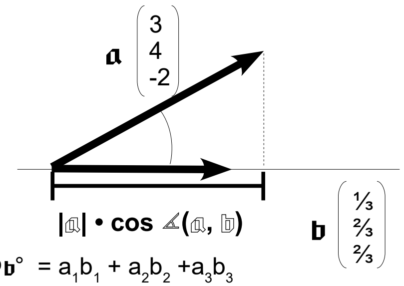


1.11 Skalarprodukt mit Einheitsvektor als Projektion

Ist der Vektor b ein Vektor mit der Länge 1, dann ist das Skalarprodukt die Projektionslänge des Vektors a auf den Vektor b und damit der Abstand des Lotfußpunktes der Spitze des Vektors a auf den Vektor b.



$$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}° = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$= |\mathfrak{a}| \cos \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$



$$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}° = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$= 2\tfrac{1}{3}$$

Ist ein Vektor des Skalarprodukts ein Einheitsvektor, dann erfüllt das Skalarprodukt die Definition der cos Funktion.

1.12 Vektorprodukt

Für das angegebene Rechenschema sind die beiden Vektoren zweimal untereinander zu schreiben, dann die erste und letzte Zeile zu streichen.

Es ist jeweils das Produkt zweier diagonal untereinander stehender zahlen zu bilden. Dabei ist das Produkt von links oben nach rechts unten mit + zu rechen, das Produkt von links unten nach rechts oben mit – .

Diese Berechnung ist dreimal durchzuführen.

Das Vektorprodukt existiert nur im R^3.

$$\begin{array}{cc} \cancel{u_1} & \cancel{v_1} \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ \cancel{u_3} & \cancel{v_3} \end{array}$$

$$(u_2v_3 - u_3v_2 \,;\, u_3v_1 - u_1v_3 \,;\, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{3} & \cancel{-1} \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -4 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} \end{array}$$

$2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) = 0$

$(-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -5$

$3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-1) = -10$

Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ senkrecht auf u und v

Das Ergebnis des Vektorprodukts ist
ein Vektor !
des senkrecht zu den beiden Vektoren steht, die ihn erzeugt haben

1.13 Rechenregeln für das Vektorprodukt

Für das Vektorprodukt gilt ein modifiziertes

Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Es gilt **nicht** das Assoziativgesetz.

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

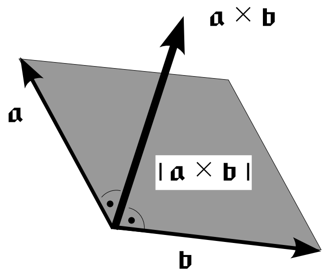
Für die Bestimmung des Normalenvektors ist die Reihenfolge der Vektoren ohne Bedeutung, Es entsteht **immer** ein Vektor, der senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren ist und **höchstens umgekehrt orientiert**. Das hat für die Ebenengleichung keine Bedeutung.

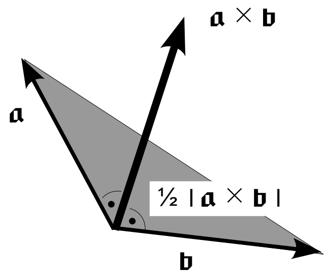
Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

1.14 Betrag des Vektorprodukts

Der Betrag des Vektors entspricht den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren gebildet wird.

Der Betrag des Vektorproduktes berechnet sich auch aus:
$|\mathfrak{a}|\ |\mathfrak{b}| * \sin \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$
Damit lässt sich über das Skalarprodukt auch der Betrag des Vektorproduktes berechnen





Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird. Damit ist das Vektorprodukt gut geeignet, die Grundfläche einer (quadratischen oder rechteckigen) Pyramide mittels Vektorrechnung zu ermitteln. Ist die Grundfläche ein Dreieck, ist dieser Betrag mit ½ zu multiplizieren und man erhält die Dreiecksfläche.

Das Vektorprodukt lässt sich auch mit dem GTR berechnen, ist aber etwas umständlich.

1.15 Das Spatprodukt

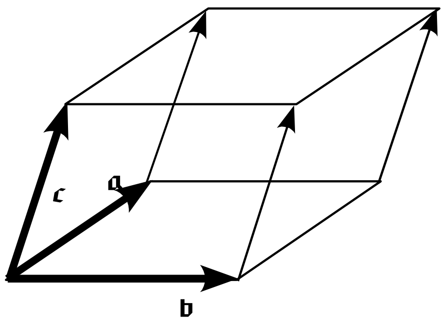
Das Spatprodukt ist das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Körpers (Spat), der auf allen Seiten durch Parallelogramme begrenzt wird.

Das Spatprodukt berechnet sich als Determinante aus den drei Vektoren. da Determinanten kein Schulstoff sind, sollte dazu ausschließlich die Berechnung mit dem GTR benutzt werden.

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \odot \mathfrak{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\ c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\ c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\ c_3$$

Das Ergebnis des Spatproduktes ist eine reelle Zahl, kein Vektor.



Das Spatprodukt kann man im Zusammenhang mit dem Vektorprodukt gut nutzen, um den Abstand windschiefer Geraden zu berechnen. Da sowohl Vektorprodukt wie auch Spatprodukt nur über Determinanten zu berechnen sind, sollte man dafür den GTZR benutzen.

Wenn die Vektoren a und b die Grundfläche einer Pyramide darstellen und c eine Seitenkante der Pyramide ist, dann ergibt sich das Volumen einer Pyramide mit **viereckiger Grundfläche**

$$V = \frac{1}{3}\ (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \odot \mathfrak{c}$$

und das Volumen einer Pyramide mit **dreieckiger Grundfläche**

$$V = \frac{1}{6}\ (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \odot \mathfrak{c}$$

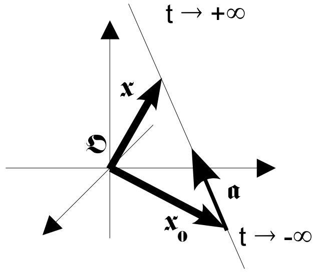
Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

2. Geradengleichungen

2.1. Gerade durch Punkt und Richtung

$\mathfrak{x}_0$ Ortsvektor zu einem festen Punkt auf der Geraden
$\mathfrak{a}$ Richtungsvektor
$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes
t reeller Parameter

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$



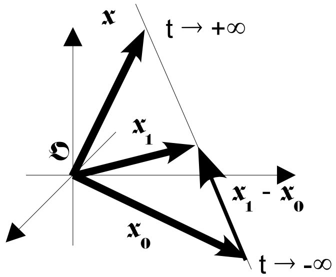
$$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2. Gerade durch zwei Punkte

$\mathfrak{x}_0$ Ortsvektor erster fester Punkt auf der Geraden
$\mathfrak{x}_1$ Ortsvektor zweiter fester Punkt auf der Geraden
$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes
t reeller Parameter

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$



$$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-4 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ein *Ortsvektor* ist ein Vektor vom Ursprung O zu einem Punkt A im Raum. Jeder Punkt im Raum kann eindeutig durch einen solchen Ortsvektor erreicht werden.

  Der Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ besitzt den Ortsvektor OA $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

- Eine Verschiebung von einem Punkt *A* zu einem Punkt B kann ebenfalls als Vektor dargestellt werden.

  Der Vektor von Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ zum Punkt $B(b_1, b_2, b_3)$ ergibt sich aus

  $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

- Ein Parameter *r* verkürzt oder verlängert einen Vektor $\mathfrak{a}$.

- Eine *Gerade* ist eine unendliche Verlängerung einer Strecke zwischen zwei Punkten in beide Richtungen. Jede Gerade ist deshalb eindeutig durch zwei Punkte festgelegt.

- Geraden im Raum können mit unserem Koordinatensystem durch Vektoren dargestellt werden:
  Man nimmt dazu einen Ortsvektor zu einem Punkt (*Stützvektor* genannt) und den Vektor zwischen den beiden Punkten (*Richtungsvektor* genannt).
  Durch einen Parameter r kann dieser Richtungsvektor in beide Richtungen beliebig verlängert werden.

- Mit den zwei Punkten *A* und *B* ergibt sich also eine eindeutige *Parametergleichung* einer Geraden g:

  $$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB}$$

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

2.3. Parameterfreie Darstellung im R^2 *HNF*

Eine HNF kann es nur geben, wenn die Dimension des Objektes **genau um 1 niedriger** ist, als die Dimension des Raumes, also für Gerade im R^2 und Ebene im R^3 . Grund: Die Richtung des Normalenvektors muss eindeutig sein.

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n}^0 = 0$

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = d$

$x\, n_1^{\,0} + y\, n_2^{\,0} = d$

mit $d = \frac{D}{|\mathfrak{n}|} = \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}^0 \geq 0$

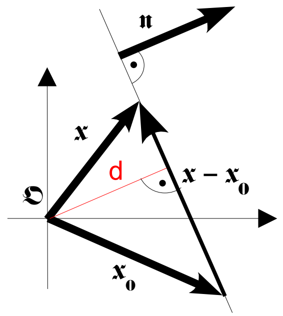
d ($\geq$ 0) Abstand der Geraden von $\mathfrak{o}$

$\mathfrak{n}$ Normalenvektor (für D > 0 zeigt n in die Halbebene, die $\mathfrak{o}$ **nicht** enthält)

$\mathfrak{n}^0$ Normaleneinheitsvektor

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n} = 0$

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D \quad$ mit $D = \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}$



g : $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von g: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n} = 0$

$\left(\mathfrak{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$x_1 + 3x_2 = 7$

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n}^0 = 0$

$\left(\mathfrak{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = 0$

Von dem Richtungsvektor einer Geraden im R^2 erhält man den Normalenvektor indem man die Komponenten des Richtungsvektors vertauscht und **bei einer** Komponente das Vorzeichen wechselt

2.4. Parameterfreie Darstellung im R^3

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{a}^0 = \mathfrak{o}$

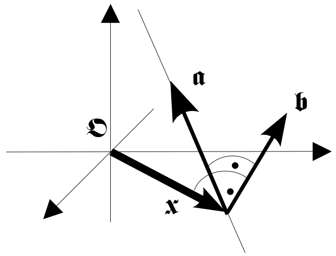
$\frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|}\ \mathfrak{x} \times \mathfrak{a}^0 =$

$\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ Normalenvektor der Ebene, die die Gerade und $\mathfrak{o}$ enthält

$\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ Gerade durch den Ursprung

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$

$\mathfrak{x} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{x}_0 \times \mathfrak{a}$



Diese Geradendarstellung verwendet das Vektorprodukt und ist deshalb nicht Bestandteil der Schulausbildung.

Es ist eine parameterfreie Darstellung von Geraden im R^3, da für Geraden im R^3 keine HNF existiert.

2.5. Schnittwinkel Gerade – Gerade

g : $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$

h : $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + s\,\mathfrak{b}$

$\cos \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|}$

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

3. Ebenengleichungen

3.1. Parameterdarstellungen

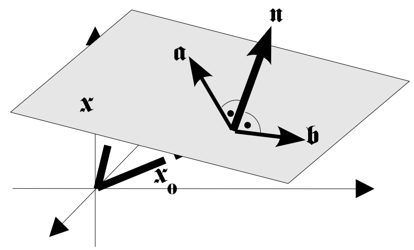
3.1.1. Ebene durch Punkt und Richtung

$\mathfrak{x}_0$ Ortsvektor zu einem festen Punkt der Ebene

$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nicht kollineare Richtungsvektoren

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$ $\quad s, t \in (-\infty, +\infty)$



$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

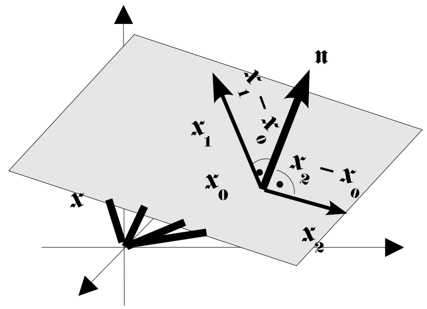
$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

3.1.2. Ebene durch drei Punkte

$\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkten der Ebene

$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) + s\,(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0)$ $\quad s, t \in (-\infty, +\infty)$



$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.1.3. Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ $\quad s, t \in (-\infty, +\infty)$

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2$

$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkt einer Gerade

$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ Richtungsvektoren der Geraden

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 + s\,\mathfrak{a}_2$

$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Der Parameter für den zweiten Richtungsvektor muss unbedingt umbenannt werden !

- Eine *Ebene* ist eine unendliche Vergrößerung eines Dreiecks. Jede Ebene ist deshalb eindeutig durch drei Punkte festgelegt, die **nicht** auf einer Geraden liegen.

- Ebenen im Raum können mit dem Koordinatensystem durch Vektoren dargestellt werden:
  dazu benutzt man den Ortsvektor zu einem Punkt (*Stützvektor* genannt) und die beiden Vektoren zu den beiden anderen Punkten (*Richtungsvektoren*
  genannt). Durch zwei Parameter t und s können diese beiden Richtungsvektoren in beide Richtungen beliebig verlängert werden.

- Mit den drei Punkten A, B und C ergibt sich also eine eindeutige Parametergleichung der Ebene E:

  $E: \ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$

- Jede Ebene ist also eindeutig festgelegt durch:
  1. drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen
  2. zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden
  3. eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.

Ziel ist es hierbei immer, zwei linear unabhängige Vektoren und einen Punkt der Ebene zu kennen.

Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

3.1.4. Ebene durch zwei parallele Geraden

g_1: $\vec{x} = \vec{x}_1 + t\,\vec{a}_1$ g_2: $\vec{x} = \vec{x}_2 + t\,\vec{a}_2$ $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkt einer Gerade $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ Richtungsvektoren der Geraden	E: $(\vec{x} - \vec{x}_2) \odot ((\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times \vec{a}_1) = 0$ oder E: $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\,\vec{a}_1 + s\,(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$	$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-8\\1\end{pmatrix}$	Zwei parallele Geraden liegen immer in einer Ebene. Als einen Richtungsvektor der Ebene kann man den Richtungsvektor der Geraden benutzen (ist bei beiden Geraden der Gleiche). Der zweite Richtungsvektor entsteht aus dem Verbindungsvektor der beiden Aufpunkte. Dieser Vektor muss ebenfalls in der Ebene liegen.

3.1.5. Ebene durch eine Gerade und einen Punkt nicht auf der Geraden

$\vec{x} = \vec{x}_1 + t\,\vec{a}_1$ $\vec{x}_0$ Punkt nicht auf der Gerade $\vec{x}_1$ Ortsvektoren zu festen Punkt der Gerade $\vec{a}_1$ Richtungsvektoren der Geraden	$\vec{x} = \vec{x}_1 + t\,\vec{a}_1 + s(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$ $\quad s, t \in (-\infty, +\infty)$	$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ P: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$	Eine Gerade und ein Punkt liegen immer in einer Ebene. Ein Richtungsvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Geraden. Der zweite Richtungsvektor ist der Verbindungsvektor zwischen dem Aufpunkt der Geraden und dem einzelnen Punkt.

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

3.6. Hessesche Normalform $\mathcal{HNF}$

Im R^3 gibt es eine HNF nur für die Ebene.
Für eine Gerade ist sie nicht machbar !

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n}^0 = 0$

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = d$

$x\, n_1^{\,0} + y\, n_2^{\,0} + z\, n_3^{\,0} = d$

mit $d := \frac{D}{|\mathfrak{n}|} = \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}^0 \geq 0$

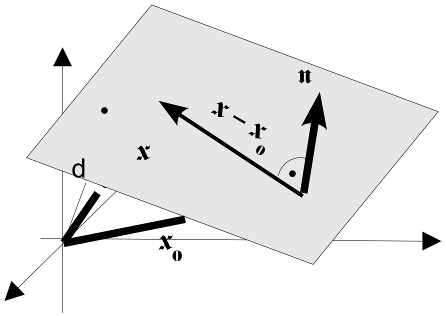
d ($\geq$ 0) Abstand der Fläche von $\mathfrak{O}$

$\mathfrak{n}$ Normalenvektor (für d > 0 zeigt n in die Halbebene, die $\mathfrak{O}$ **nicht** enthält)

$\mathfrak{n}^0$ Normaleneinheitsvektor

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n} = 0$

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D$ mit $D := \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}$



P: $\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Hessesche Normalform der Ebene

$$\left[\mathfrak{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

oder durch Ausmultiplizieren des zweiten Skalarprodukts und Verschieben des Wertes auf die rechte Seite:

$$\mathfrak{x} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 12$$

- Ein Vektor, der senkrecht zu allen Vektoren einer Ebene steht, heißt *Normalenvektor* der Ebene.
- Eine weitere Möglichkeit, eine Ebene eindeutig festzulegen, besteht darin, den **Normalenvektor und einen Punkt der Ebene** zu kennen.

3.7. Koordinatenform

E_1 : ax + by + cz = d

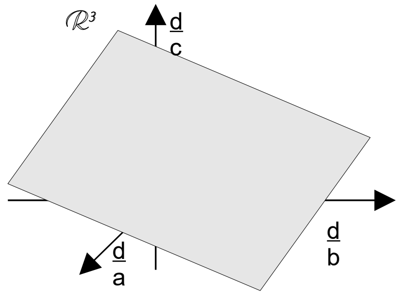
Diese Form entspricht der Hesseschen Normalform. Die Koeffizienten a, b, c kann man als die Koordinaten des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ ansehen. Es fehlt lediglich die Normierung auf die Länge 1, die aber sehr leicht durch Division der Ebenengleichung durch $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ erreicht werden kann.

Gleichzeitig lassen sich daraus die Achsenabschnitte ermitteln, die die Spurpunkte liefern.

$$\frac{\mathbf{ax + by + cz}}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2 + c^2}}} = \frac{\mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Achsenabschnittsgleichung

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{A}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{B}} + \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{C}} = \mathbf{1}$$



Ebenengleichung der obigen Ebene in Koordinatenform:

3x + 4y – 2z = 12

durch Division mit der rechten Seite erhalten wir

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 1$$

als Achsenabschnittsform

Schnittpunkt mit der x – Achse : x = 4
Schnittpunkt mit der y – Achse : y = 3
Schnittpunkt mit der z – Achse : x = –6

Treten in der Koordinatendarstellung negative Vorzeichen auf, dann sind diese negativen Vorzeichen den Achsenabschnitten hinzuzurechnen.

Die Formel der Achsenabschnittsgleichung enthält nur positive Vorzeichen.

Man kann von gegebenen Vektoren die Koordinatengleichung auch direkt aufstellen, ohne über die Parameterdarstellung zu gehen. Dazu benutzt man folgende Grundüberlegung:

1. Jeder Punkt muss die Koodinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit seinen Koordinaten erfüllen.
2. Jeder Richtungsvektor muss mit dem Normalenvektor (a,b,c) einen rechnet Winkel bilden, das Skalarprodukt muss 0 sein.
3. Es entsteht ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Variablen a,b,c,d von denen eine Variable frei wählbar ist. Man benutzt für die frei wählbare Variable den Wert d. Den sollte man nicht zu klein wählen, um Brüche zu vermeiden. Ist das Gleichungssystem unlösbar, dann geht die Ebene durch den Ursprung und man muss d = 0 wählen.

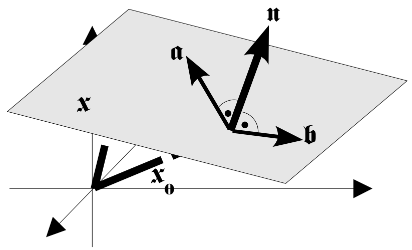
Erscheinen als Lösung lange Dezimalzahlen, sollte man das Ergebnis in Brüche umwandeln lassen. Die in der Lösung auftretenden Nenner kann man dann als neue Werte von d in das Gleichungssystem eingeben und das Gleichungssystem noch einmal rechnen. Als Ergebnisse sollten dann ganzzahlige wert herauskommen. Ein nachträgliches Kürzen der Zahlen kann ebenfalls durchgeführt werden.

3.7.1. Ebene durch Punkt und Richtung

$\mathfrak{x}_0$ Ortsvektor zu einem festen Punkt der Ebene

$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nicht kollineare Richtungsvektoren



$$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$2a + 4b + c = d$	Punkt
$3a - b + c = 0$	Richtungsvektor
$4a - 3b - 2c = 0$	Richtungsvektor

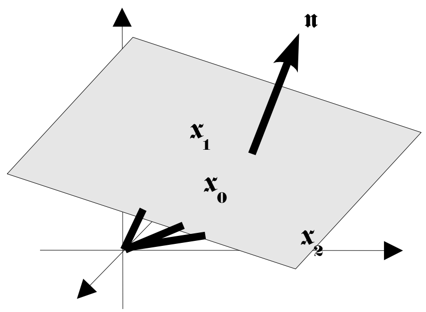
für d = 36: $4x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 36$

oder: $x_1 + 2x_2 - x_3 = 9$

3.7.2. Ebene durch drei Punkte

$\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkten der Ebene

$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes



$$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2a + 4b + c = d$	Punkt
$5a + 3b + 2c = d$	Punkt
$3a - 2b + c = d$	Punkt

für d = 1: $-6x_1 - 1x_2 + 17x_3 = 1$

Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

3.7.3. Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{a}_1$ s, t ∈ (-∞, +∞)
$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + t\,\mathbf{a}_2$
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkt einer Gerade
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ Richtungsvektoren der Geraden

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{a}_1 + s\,\mathbf{a}_2$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

$2a + 4b + c = d$ Punkt
$3a - b + c = 0$ Richtungsvektor
$a + 2b - 2c = 0$ Richtungsvektor

für d = 40: $8x_2 + 8x_3 = 40$

oder: $x_2 + x_3 = 5$

3.7.4. Ebene durch zwei parallele Geraden

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{a}_1$
g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + t\,\mathbf{a}_2$
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkt einer Gerade
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ Richtungsvektoren der Geraden

E: $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \odot ((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times \mathbf{a}_1) = 0$ oder
E: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{a}_1 + s\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\2\\-2\end{pmatrix}$

$2a + 4b + c = d$ Punkt
$3a - b + c = 0$ Richtungsvektor
$3a - 4b + 2c = d$ Punkt

für d = 17: $-7x_1 + 2x_2 + 23x_3 = 17$

3.7.5. Ebene durch eine Gerade und einen Punkt nicht auf der Geraden

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{a}_1$
$\mathbf{x}_0$ Punkt nicht auf der Gerade
$\mathbf{x}_1$ Ortsvektoren zu festen Punkt der Gerade
$\mathbf{a}_1$ Richtungsvektoren der Geraden

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{a}_1 + s(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ s, t ∈ (-∞, +∞)

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ P: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$

$2a + 4b + c = d$ Punkt
$3a - b + c = 0$ Richtungsvektor
$3a + 4b - 2c = d$ Punkt

für d = 47: $3x_1 + 10x_2 + x_3 = 47$

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

3.8. Umrechnung von Ebenenformen

3.8.1. Umrechnung Parameter → Normalform

$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \odot \vec{n}^0 = d$

Den Normalenvektor erhält man aus dem Vektorprodukt der Richtungsvektoren

$\vec{x} - \vec{x}_0 = t\,\vec{a} + s\,\vec{b} \quad | \odot \vec{n} \quad = \vec{a} \times \vec{b}$

$(\vec{x} - \vec{x}_0) \odot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \vec{x} \odot \vec{n} = D$

mit D $:= \vec{x}_0 \odot \vec{n}$

$(\vec{x} - \vec{x}_0) \odot \vec{n}^0 = 0 \quad \Rightarrow \vec{x} \odot \vec{n}^0 = d$

mit d $:= \dfrac{D}{|\vec{n}|} = \vec{x}_0 \odot \vec{n}^0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\vec{x} \circ \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = 2$$

- Normalenvektor berechnen
  1. Seien *p* und *q* zwei Vektoren der Ebene (zum Beispiel AB und AC. Es gilt also $n \perp p$ und $n \perp q$
  2. Nach Orthogonalitätskriterium muss also gelten $n \cdot p = 0$ (1) und $n \cdot q = 0$ (2)
  3. Mit den Vektoren

     $n = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}, \; p = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}, \; q = \begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}$

     heißt das nach der Definition des Skalarprodukts:

     $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = 0$ (1)

     $n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3 = 0$ (2)
  4. Jetzt müssen wir eine dritte Gleichung aus den beiden obigen (z.Bsp. durch Addition oder Subtraktion) gewinnen, die höchstens zwei Unbekannte hat. Eine der beiden Unbekannten wird frei (= t) gewählt (z.Bsp. n_3 = t).
  5. Gewählte Zahl einsetzen und das Gleichungssystem lösen. Wir erhalten die Komponenten des Normalenvektors in Abhängigkeit von t . Jetzt können wir t so wählen, dass es hübsch aussieht (also z.Bsp. Brüche vermieden werden).
- Jetzt fehlt zur Ebenendarstellung nur noch ein Punkt der Ebene (zum Beispiel A).
- Die *Normalengleichung* der Ebene kann damit angegeben werden:

  $E: [\vec{OX} - \vec{OA}] \circ \vec{n} = 0$

3.8.2. Umrechnung Normalform → Parameterform

$\vec{x} \odot \vec{n}^0 = d \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$

1. Variante

Für $\vec{n}^0 = (n_1^0, n_2^0, n_3^0)$ gesucht $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{n}^0 \perp \vec{a}$ $\vec{n}^0 \perp \vec{b}$ die nicht kollinear sind. Wähle z. B.

$\vec{a} = (n_3^0, 0, -n_1^0)$ oder

$\vec{b} = (n_2^0, -n_1^0, 0)$

Es ist dann noch ein Punkt $\vec{x}_0$ zu suchen, der auf der Ebene liegt, dass ist aber mit der Normalform sehr einfach, da es eine Gleichung mit 3 Unbekannten ist, also 2 Variable frei wählbar.

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$

2. Variante

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: eine Gleichung mit drei Unbekannten

$\vec{x} \odot \vec{n}^0 = x\,n_1^0 + y\,n_2^0 + z\,n_3^0 = d$

Wahl zweier Variablen als Parameter: x = t, y = s

x = 0 + t +0*s ; y = 0 + 0*t + s; ⇒

$z = \frac{1}{n_3^0}(d - tn_1^0 - sn_2^0)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{d}{n_3^0}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{n_1^0}{n_3^0}\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{n_2^0}{n_3^0}\end{pmatrix}$$

$= \vec{x}_0 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$

1. Variante

$$\vec{x} \circ \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = 2$$

$\vec{a}$ = (0, 0,1) oder

$\vec{b}$ = (3,1,0)

(Beide Vektoren sind senkrecht zu n, also Richtungsvektoren der Ebene)

$$\vec{x}_0 = 2/\sqrt{10}\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/10\\6/10\\0\end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2/10\\6/10\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

2. Variante

$$\vec{x} \circ \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = -x_1 + 3x_2 = 2$$

y = 0 + t + 0*s ;

z = 0 + 0*t + s; ⇒

$x = \frac{1}{n_1^0}(d - tn_2^0 - sn_3^0)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Hier muss statt der z Komponente die x-Komponente genommen werden, da der Normalenvektor keine n_3 Komponente besitzt und deshalb nicht durch diese geteilt werden kann. Der Punkt erfüllt die Ebenengleichung.

Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

3.8.3. Umrechnung Parameter → Koordinatenform

$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b}$ ⇒ $ax + by + cz = d$

1. Variante

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: drei Gleichungen mit vier Unbekannten

$a \cdot x_{01} + b \cdot x_{02} + c \cdot x_{03} = d$

$a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3 = 0$

$a \cdot b_1 + b \cdot b_2 + c \cdot b_3 = 0$

Der Punkt muss die Ebenengleichung erfüllen. Jeder Richtungsvektor muss senkrecht zum Normalenvektor sein.

2. Variante

Es wird in die Normalendarstellung umgerechnet und anschließend in die Koordinatenform umgeschrieben.

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkt

$a\,(-3) + b\,8 + c\,1 = d$

Richtungsvektoren

$a\,(-3) + b\,4 + c\,0 = 0$

$a\,(-6) + b\,8 + c\,2 = 0$

Zunächst wählt man $d \neq 0$, in diesem Fall $d = 1$

$$\begin{aligned} -3a + 8b + c &= 1 \\ -3a + 4b &= 0 \\ -6a + 8b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystem lautet:

(⅓ ; ¼ ;0)

und damit die Normalenform:

$\frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{4} x_2 = 1$

oder mit dem Hauptnenner durchmultipliziert:

$4 x_1 + 3 x_2 = 12$

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a\,1 + b\,4 + c\,(-4) = d$

$a\,1 + b\,(-2) + c\,1 = 0$

$a\,5 - b\,4 + c\,0 = 0$

$$\begin{aligned} a + 4b - 4c &= 1 \\ a - 2b + c &= 0 \\ 5a - 4b &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +4 & -4 & 1 \\ 0 & +6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Noch einmal rechnen mit d = 0, oder rechte Seite alles 0 setzen:

$4 x_1 + 5 x_2 + 6 x_2 = 0$

Eine der Variablen a, b, c, d ist frei wählbar. Man wählt für d einen beliebigen von 0 verschiedenen Wert. Fall das Gleichungssystem dann einen Widerspruch erzeugt, ist es noch einmal mit d=0 zu berechnen. (Hintergrund: In diesem Fall geht die Ebene durch den Ursprung und d muss 0 sein.)

3.8.4. Umrechnung Koordinatenform → Parameterform

$ax + by + cz = d$ ⇒ $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b}$

Zuerst wird ein Punkt $\mathbf{x_0}$ bestimmt, der die Ebenengleichung erfüllt.

Als zweites sind zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gesucht, die zum Normalenvektor n = (a;b;c) senkrecht stehen. Die einfachste Lösung ist, eine Komponente 0 zu setzen und dann die anderen beiden zu vertauschen, wobei bei einem das Vorzeichen zu ändern ist.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Vektoren erfüllen diese Bedingung und sind garantiert nicht linear abhängig.

$E: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 3$

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Vektoren sind senkrecht zum Normalenvektor.

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P ist Spurpunkt und erfüllt die Ebenengleichung

$$E: \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Von einer Koordinatengleichung kommt man schnell wieder zurück zu einer Parameterdarstellung der Ebene

1. Man sucht zunächst drei Punkte P, Q und R deren Koordinaten die Koordinatengleichung erfüllen. Ein möglicher Punkt wäre der Spurpunkt P mit P = (0;0; d/n_3).
   Analog existieren (meistens) auch Spurpunkte mit den anderen Koordinatenachsen.
2. Einer dieser Punkte (zum Beispiel *P*) wird als Stützvektor benutzt.
3. Dann bildet man die Vektoren von diesem Punkt *P* zu den beiden anderen Punkten.
4. Man erhält so insgesamt drei Vektoren
   P = $\overrightarrow{OP}$; $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$
   und kann die Parameterform hinschreiben.

Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

3.8.5. Umrechnung Normalform → Koordinatenform

Die Normalform ist nur eine andere Schreibweise der Koordinatenform

$(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \odot \mathbf{n} = 0$

$\mathbf{x} \odot \mathbf{n} = D$

$\boxed{n_1 x + n_2 y + n_3 z = D}$

Die Koeffizienten der Koordinatenform sind die Komponenten des Normalenvektors,

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$ E: $2x_1 + x_2 - x_3 = 3$

- Wir können die Normalengleichung noch in eine weitere Darstellung der Ebene umwandeln:

$E : [\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}] \circ \vec{n} = 0$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$

$(x_1 - a_1)n_1 + (x_2 - a_2)\, n_2 + (x_3 - a_3)\, n_3 = 0$

$x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = \underbrace{a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3}_{\text{nennen wir } d}$

- Da bis auf x_1, x_2 und x_3 alles bekannt ist können wir die allgemeine *Koordinatengleichung* der Ebene angeben:

$E: x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d$

3.8.6. Umrechnung Koordinatenform → Normalform

$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \odot \mathbf{n} = D$

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad D = d$

$\mathbf{x} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = d$

Wir können die Koordinatenform in eine Normalenform umwandeln, indem wir die Koeffizienten der Koordinatenform als Komponenten des Normalenvektors benutzen.

Aus

$E: a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 = d$

wird

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = d$

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

4. Lagebeziehungen zu Geraden

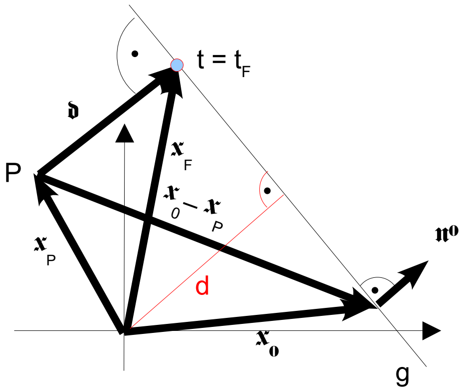
$\odot$ Skalarprodukt
$\mathfrak{d}$ Lotvektor
$d(P,g) = |\mathfrak{d}|$ Abstand des Punktes P zur Geraden g
$\mathfrak{x}_F$ Ortsvektor zum Fußpunkt des Lotes
t_F Parameterwert t von $\mathfrak{x}_F$ auf der Geraden g
Die Lotebene ist eine senkrechte Ebene zur Gerade. s.dazu Lagebeziehung Ebene -Gerade

4.1. Abstand eines Punktes zu einer Geraden im R^2

$$\left.\begin{array}{l} g:\ \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = d \\ P:\ \mathfrak{x}_P \end{array}\right\}\ \text{nur } \mathbb{R}^2$$

Es gilt: $\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P + \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \parallel \mathfrak{n}_0\end{array}}$

1. Der Fußpunkt ergibt sich aus P plus Abstandsvektor.
2. Der Abstandsvektor ist parallel zum Normalenvektor der Geraden



$\mathfrak{d} = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P)_{\mathfrak{n}_0}$

Der Abstandsvektor $\mathfrak{d}$ ist eine Projektion des Verbindungsvektors von P nach F auf den Normaleneinheitsvektor.

$= ((\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P) \odot \mathfrak{n}_0)\ \mathfrak{n}_0$

Das Skalarprodukt ist die Projektion eines Vektors auf einen anderen.
Dieser Abstand ist mit der Richtung des Normaleneinheitsvektors zu multiplizieren

$= (d - \mathfrak{x}_P \odot \mathfrak{n}_0)\ \mathfrak{n}_0$

Da $\mathfrak{x}_0$ auf der Ebene liegt, ist $\mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n} = d$

Der Betrag von $\mathfrak{d}$ ist der gesuchte Abstand

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ P (4 / 9)

Lösungsweg:
Schnittpunkt mit der senkrechten Geraden durch P

Normalenvektor von g: $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Geradengleichung durch P und senkrecht zu g: $g\perp:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $1 + 3t = 4 + 1s$
$2 - 1t = 9 + 3s$

$3t - 1s = 3$ $t = 1/5$
$-1t - 3s = 7$ $s = -12/5$

Schnittpunkt mit $g:\ \vec{x}_S = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1/5 \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/5\\9/5\end{pmatrix}$

$g\perp:\ \vec{x}_S = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} - 12/5 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/5\\9/5\end{pmatrix}$

Differenzvektor zwischen Schnittpunkt und P: S – P $\begin{pmatrix}-12/5\\-36/5\end{pmatrix}$

Abstand ist Länge des Differenzvektors:

$1/5\ \sqrt{144 + 1296} = 1/5\ \sqrt{144 + 9 \cdot 144}$
$= 12/5\ \sqrt{10} = 7{,}59$

Abstandsberechnungen gehen über die Hessesche Normalform, sofern es für das Objekt eine Hessesche Normalform gibt. Damit ist die Richtung des senkrechten Abstandes eindeutig vorgegeben.

Für Geraden im R^2 gibt es eine Hessesche Normalform. Dieser Lösungsweg ist ganz links aufgeführt.

Die Schnittpunktberechnung zweier Geraden ist aber vielleicht sicherer.

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

4.2. Abstand eines Punktes zu einer Geraden im R^3

4.2.1. Projektion $\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_P$ von auf den Richtungsvektor $\mathfrak{a}$

Im R^3 gibt es für eine Gerade keine einheitliche senkrechte Richtung $\mathfrak{n}$.

Deshalb kann hier nicht mit einem Normalenvektor gearbeitet werden.

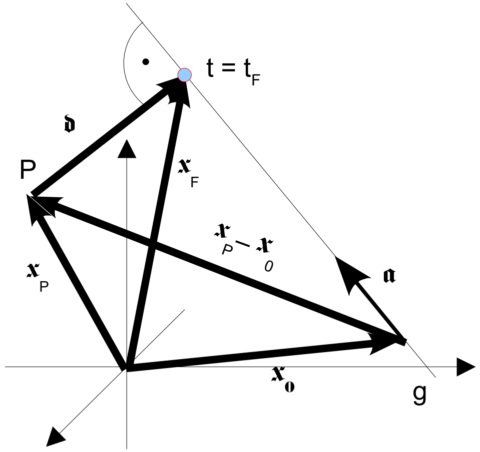
Alle Abstandsberechnungen für Geraden im R^3 müssen über den Fußpunkt gehen.

Für die Bestimmung des Fußpunktes F muss ein Parameter t_F bestimmt werden, der den Richtungsvektor bis zum Fußpunkt verlängert.

g: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$
P: $\boldsymbol{x}_P$
$\Big\}$ *R^2 und R^3*

Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x}_F &= \boldsymbol{x}_P - \mathfrak{d} \\ \boldsymbol{x}_F &= \boldsymbol{x}_0 + t_F\,\mathfrak{a} \\ 0 &= \mathfrak{a} \odot \mathfrak{d} \end{aligned}}$$



P (2| –3|5)

$$g: \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1. Variante

Differenzvektor:

$$\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2t\\6+t\\-2-t\end{pmatrix}$$

Skalarprodukt mit Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix}2+2t\\6+t\\-2-t\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 2(2+2t) + 1(6+t) + (-1)(-2-t) = 0$$

$$4 + 4t + 6 + t + 2 + t = 0$$
$$6t = -12$$
$$t = -2$$

Fußpunkt

$$\boldsymbol{x}_F = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$$

1. Variante

Berechne den Abstand des Punktes P von einem beliebigen Geradenpunkt durch Subtraktion des Punktes von der Geradengleichung.
Der gesuchte Abstand ist derjenige, der mit dem Richtungsvektor der geraden einen rechten Winkel bildet.
Deshalb muss das Skalarprodukt von Richtungsvektor und Abstandsvektor 0 sein.

1. Variante

$\boldsymbol{x}_P - \mathfrak{d} = \boldsymbol{x}_0 + t_F\,\mathfrak{a} \quad | \odot\mathfrak{a}$

Der Fußpunkt kann über den Punkt P und über die Gerade ausgedrückt werden. Diese Vektorgleichung kann man skalar mit dem Vektor $\mathfrak{a}$ multiplizieren

$(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)\odot\mathfrak{a} = t_F\,|\mathfrak{a}|^2$

$|\mathfrak{a}|^2$ ist eine reelle Zahl (kein Vektor) durch die dividiert werden kann

$$\boxed{t_F = \frac{(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)\odot\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|^2}}$$

Parameter der Geraden zum Fußpunkt

2. Variante

$(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)\mathfrak{a} = \boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_0 = t_F\,\mathfrak{a}$

Die Projektion des Verbindungsvektors $\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0$ auf die Gerade g ist der Abstand von $\boldsymbol{x}_0$ zum Fußpunkt $\boldsymbol{x}_F$ und damit auch $t_F\,\mathfrak{a}$

$= ((\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)\odot\mathfrak{a}^0)\,\mathfrak{a}^0$

Die Länge des Abstandes ist $(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)\odot\mathfrak{a}^0$ und die Richtung $\mathfrak{a}^0$. Das Ergebnis ist ein Vektor, der von $\boldsymbol{x}_0$ zu $\boldsymbol{x}_F$ zeigt.

$\Rightarrow \boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{x}_0 + ((\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)\odot\mathfrak{a}^0)\,\mathfrak{a}^0$

2. Variante

$$t_F = (\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \odot \mathfrak{a}^0 = \begin{pmatrix}-2\\-6\\2\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-12}{\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{x}_F = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + \frac{-12}{\sqrt{6}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}_{a^0} = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} \quad \text{Fußpunkt}$$

$x_F = x_0 + t_F\ a^0$

2. Variante

Projektion des Vektors $P - x_0$ auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors liefert die Entfernung des Fußpunktes vom Aufpunkt der Geraden.
Multipliziert man diesen Abstand mit dem **Einheitsvektor** $\mathfrak{a}^0$ des Richtungsvektors erhält man den gesuchten Fußpunkt

4.2.2. Bestimmung des Fußpunktes mittels senkrechter Hilfsebene

Es gilt:

$$\boxed{E:\ (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_P)\odot\mathfrak{a} = 0}$$

Die Ebene wird in Hessescher Normalform erzeugt, mit dem Aufpunkt P, von dem der Abstand berechnet werden soll und dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ der Geraden als Normalenvektor der Ebene

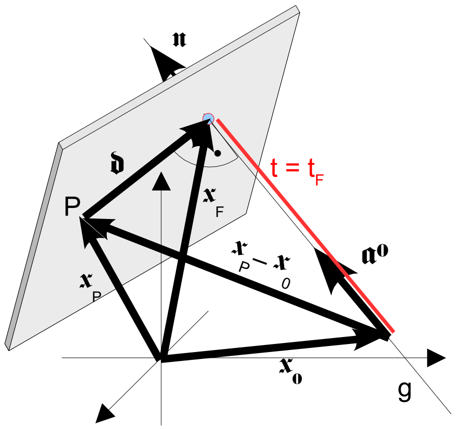
$$((\mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}) - \mathfrak{x}_P)\odot\mathfrak{a} = 0$$

In diese Ebenengleichung ist für den Vektor $\mathfrak{x}$ die komplette Geradengleichung einzusetzen.

$$\mathfrak{x}_0\odot\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{a}\odot\mathfrak{a} - \mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{a} = 0$$

$$t_F\,\mathfrak{a}\odot\mathfrak{a} = (\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0)\odot\mathfrak{a}$$

$$\boxed{t_F = \frac{(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0)\odot\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|^2}}$$



Mit Hilfe des Parameter t_F lässt sich der Fußpunkt der Geraden bestimmen.

P (2| –3|5) $\qquad g:\ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$E:\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = c \qquad E:\ \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = -4$

was zur Ebenengleichung $E:\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = -4$ führt.

Einsetzen der Geradengleichung in die (Koordinatenform der) Ebenengleichung

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -4\\ 2(4+2t) + (3+t) - (3-t) &= -4\\ t &= -2 \end{aligned} \qquad \mathfrak{x}_F = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$$

Fußpunkt

Die unterschiedlichen Werte für t resultieren daraus, dass einmal auf den Einheitsvektor Bezug genommen wird und einem auf den originalen Richtungsvektor. Der zuerst berechnete Wert dividiert durch die

Länge des Richtungsvektors ergibt: $\frac{-12}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} = -2$

- Gegeben ist eine Gerade $g_1:\ \vec{OX} = \vec{OA} + r\,\vec{m}$ und ein Punkt P (p_1,p_2,p_3)
- Der Abstand ist gerade die Strecke von *P* zu dessen *Lotfußpunkt L* auf der Geraden. Das einzige Problem besteht darin diesen Punkt zu finden.

1. *L* ist der Schnittpunkt einer Hilfsebene *H* , die senkrecht zu *g* steht und den Punkt *P* enthält.
2. Die Normalengleichung der Hilfsebene ist schnell gefunden, denn wir brauchen nur zwei Dinge: den Normalenvektor und einen Punkt
   (a) Einen Punkt haben wir schon, P .
   (b) Der Richtungsvektor der Geraden steht senkrecht zu H, ist also gleichzeitig ein Normalenvektor von H.
   (c) Damit hat die Hilfsebene folgende Gleichung:

   $$H:\ \left(\vec{OX} - \vec{OA}\right)\circ\vec{m} = 0$$
3. Der gesuchte Punkt *L* ist jetzt der Schnittpunkt von *H* und *g*. Der gesuchte Punkt L ist jetzt der Schnittpunkt von H und g. Und das berechnen wir wie unter 1.3 (Gerade als einen Vektor schreiben; den dann statt OX in H einsetzen; den Parameter r ausrechnen; den in die Geradengleichung einsetzen OL).
4. Der gesuchte Abstand ist dann die Länge der Strecke zwischen P und L, also d = (P,L)

4.2.3. Bestimmung des Abstandes über Trigonometrie

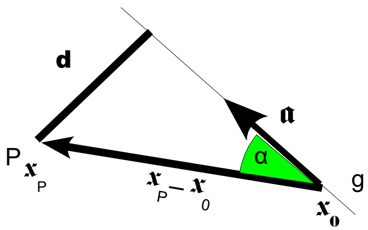
$$d = |\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0|\sin\alpha$$

Dazu muss man noch nicht einmal den Winkel α berechnen, da nach dem Pythagoras der Trigonometrie gilt:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$d = |\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0|\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$= |\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0|\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0)\odot\mathfrak{a}}{|\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0|\ |a|}\right)^2}$$



Grundsätzlich kann man auch davon ausgehen, dass eine Gerade und ein Punkt in einer Ebene liegen. (Konstruktionsmöglichkeit für eine Ebenengleichung). Deshalb wird die Problematik in dieser Ebene betrachtet.

Der Winkel läßt sich aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren a und $\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0$ berechnen. Der Betrag von $\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0$ ist bekannt. Dann kann man den Abstand d (kein Vektor, nur Maßzahl) über die elementare Trigonometrie berechnen:

Aufgabenstellung | **Darstellung** | **Musteraufgabe** | **Erläuterung**

4.3. Lagebeziehungen zwischen Geraden (Übersicht)

$g_1: \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{u} \quad \text{mit } \vec{u} \neq \vec{0}$

$g_2: \vec{x} = \vec{Q} + s\,\vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} \neq \vec{0}$

Frage ①

Sind u, v linear abhängig ?

ja: $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ → $P \in g_2$?

nein: $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$

Frage ②

Liegt P auch auf g_2 ?

$g_2: \vec{P} - \vec{Q} = s\,\vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} \neq \vec{0}$

Punktprobe: Ist der Differenzvektor der beiden Aufpunkte ein Vielfaches eine Richtungsvektors.

ja: $g_1 = g_2$ Geraden sind identisch

nein: $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \neq g_2$ Geraden sind parallel

Gibt es einen Schnittpunkt

$\vec{P} + t\,\vec{u} = \vec{Q} + s\,\vec{v}$

Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten. Das Ergebnis ist nicht der Schnittpunkt, sondern die Parameter für die Geradengleichungen zur Bestimmung des Schnittpunktes.

hat eine Lösung: g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt

hat keine Lösung: g_1 und g_2 sind windschief

Nachweis mit der Vektorrechnung

$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, $(\vec{P}-\vec{Q}) \times \vec{u} = 0$

$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, $(\vec{P}-\vec{Q}) \times \vec{u} \neq 0$

$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$

Nachweis mit dem Gauß'schem Algorithmus

t	s	
1	5	4
0	0	0
0	0	0

Die Geraden **sind identisch**.
Für r und s gibt es unendlich viele Lösungen
r + s· 5 = 4. 2. und 3. Zeile immer gültig.

t	s	
1	5	4
0	0	1
0	0	0

Die Geraden sind **parallel und nicht identisch.**
2. Zeile: Widerspruch
3. Zeile: immer gültig

t	s	
1	0	3
0	1	2
0	0	0

Die Geraden **schneiden sich**.
Das LGS ist eindeutig lösbar,
hier: r = 3, s = 2.

t	s	
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Die Geraden sind **windschief.**
3. Zeile: Widerspruch
s· 0 = 1

Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

4.3.1. Nachweis identischer Geraden

g_1: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + t\,\mathfrak{a}$
g_2: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + u\,\mathfrak{a}$

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wenn nachgewiesen ist, dass die beiden Geraden parallel sind, dann ist für die Identität nachzuweisen, dass der Aufpunkt der ersten Geraden auch Geradenpunkt der zweiten Geraden ist, oder umgekehrt.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jede Zeile einzeln aufschreiben:
$$\begin{aligned} 9 &= s\,3 \\ 6 &= s\,2 \\ 6 &= s\,2 \end{aligned}$$

Alle drei Gleichungen haben die Lösung s = 3. Damit liegt der Aufpunkt der zweiten Geraden auch auf der ersten Geraden.

4.3.2. Abstand paralleler Geraden mittels Hilfsebene

g_1: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + t\,\mathfrak{a}$
g_2: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + u\,\mathfrak{a}$

Senkrechte Ebene zu den beiden Geraden:

E: $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) \odot \mathfrak{a}_1 = d$

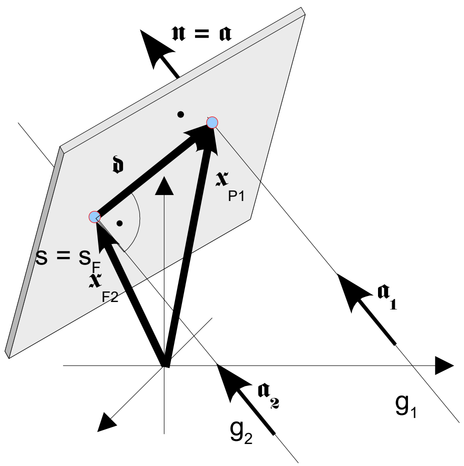
Hessescher Normalform

Einsetzen der Geradengleichung 2 in die Ebenengleichung zur Bestimmung des Durchstoß-punktes. Für Geradengleichung 1 ist Aufpunkt gleich Durchstoß-punkt, da mit diesem die Ebenengleichung erzeugt wurde.

$$(\boldsymbol{x}_2 + u_{D2}\,\mathfrak{a}_2 - \boldsymbol{x}_1) \odot \mathfrak{a}_1 = d$$

$$\Rightarrow u_{D2} = \frac{d - (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \odot \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_1 \odot \mathfrak{a}_2}$$

E: $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) \odot \mathfrak{a} = 0$



$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$$3x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 = 18$$

Durchstoßpunkt für g_1:

$$(4 + 3t - 4)\,3 + (-2 + 2t - +2)\,2 + (5 + 2t - 5)\,2 = 0$$
$$t = 0$$

(Da die Ebenengleichung mit dem Aufpunkt von g_1 erstellt wurde, ist dieser Aufpunkt auch gleichzeitig Durchstoßpunkt von g_1 durch die Ebene.)

Durchstoßpunkt für g_2:

$$(-2 + 3s - 4)\,3 + (-3 + 2s + 2)\,2 + (-2 + 2s - 5)\,2 = 0$$
$$-34 + 17\,s = 0$$
$$s = 2$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_{F2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_{F2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$|\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_{F2})\,| = \sqrt{18} = 3\,\sqrt{2}$$

Bei parallelen Geraden kann man davon aus-gehen, dass sie den gleichen Richtungsvektor haben, wenn nicht, kann man den gleichen Richtungsvektor benutzten.

Man baut zur Geraden g_1 eine senkrechte Hilfsebene auf, wie beim Abstand eines Punktes von einer Geraden. Die Hilfsebene benutzt den Aufpunkt $\boldsymbol{x}_1$ von g_1 als eigenen Aufpunkt und den Richtungsvektor $\mathfrak{a}_1$ als Normalenvektor.

Der Durchstoßpunkt $\boldsymbol{x}_{F2}$ der zweiten Geraden g_2 durch diese Ebene ist der Fußpunkt des Lotes. Der Abstand zwischen dem Aufpunkt der Ebene und dem Durchstoßpunkt ist der gesuchte Abstand .

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

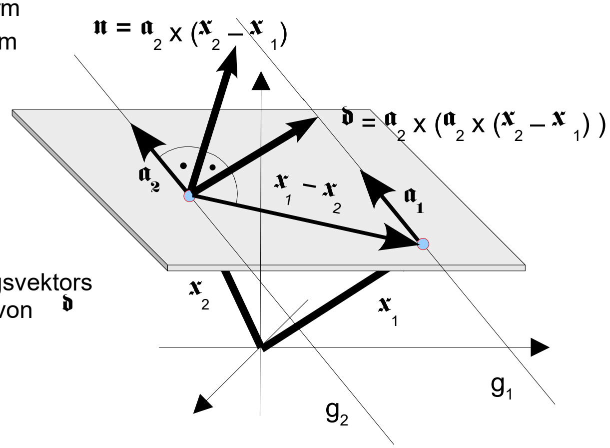
4.3.3. Abstand paralleler Geraden mittels Vektorprodukt

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ Parameterform
g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + u\,\mathfrak{a}_2$ Parameterform

$\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_2 \times (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)$

$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{n}$
$\quad = \mathfrak{a}_2 \times (\mathfrak{a}_2 \times (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1))$

Die Projektion des Verbindungsvektors $\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1$ auf den Einheitsvektor von $\mathfrak{d}$ liefert den Abstand der beiden Geraden.



$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = \begin{pmatrix}6\\1\\7\end{pmatrix} \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{a}_2 \times (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = \begin{pmatrix}-4\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad |\mathfrak{d}| = \sqrt{2}$$

$$\text{Abstand: } \frac{\mathfrak{d} \odot (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)}{|\mathfrak{d}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6\\1\\7\end{pmatrix}$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

1. Zwei parallele Geraden liegen immer in einer Ebene.
2. Der Verbindungsvektor der beiden Aufpunkte liegt ebenfalls in dieser Ebene.
3. Das Vektorprodukt des Verbindungsvektors mit einem Richtungsvektor steht senkrecht auch der Ebene ($\mathfrak{a}_2 \times (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)$)
4. Das Vektorprodukt dieses Vektors mit einem Richtungsvektor liegt in der Ebene und ist senkrecht zur Geraden, damit die Richtung des Abstandes: $\mathfrak{a}_2 \times (\mathfrak{a}_2 \times (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2))$

… liegt in der Ebene, da senkrecht zu n;
… ist senkrecht zur Geraden, da mit deren Richtungsvektor erstellt.

4.3.4. Schnittpunkt zweier Geraden im R^3

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ Parameterform
g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + u\,\mathfrak{a}_2$ Parameterform

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{x}_S &= \mathfrak{x}_1 + t_S\,\mathfrak{a}_1\\ \mathfrak{x}_S &= \mathfrak{x}_2 + u_S\,\mathfrak{a}_2\end{aligned}} \Longrightarrow$$

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: zwei Gleichung mit zwei Unbekannten

$$\boxed{\mathfrak{x}_2 + u_S\,\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{x}_1 + t_S\,\mathfrak{a}_1}$$

$$u_S\,\mathfrak{a}_2 - t_S\,\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$$

t_S und u_S sind die Parameter, die in der jeweiligen Geraden zum Schnittpunkt führen

$$\begin{pmatrix} x_{21} + u \cdot a_{21} \\ x_{22} + u \cdot a_{22} \\ x_{23} + u \cdot a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + t \cdot a_{11} \\ x_{12} + t \cdot a_{12} \\ x_{13} + t \cdot a_{13} \end{pmatrix}$$

Nicht alle Geraden im R^3 besitzen einen Schnittpunkt miteinander. Sie sind dann **windschief**. Das macht sich daran bemerkbar, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-7\\1\\-3\end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}18\\9\\11\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-10\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-7\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\9\\11\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-10\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7 - 7s &= 18 + 3t \\ 1 + s &= 9 - 10t \\ 8 - 3s &= 11 + 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -7s - 3t &= 11 \\ s + 10t &= 8 \\ -3s - 3t &= 3 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besitzt eine Lösung: $t = 1$; $s = -2$
Durch Einsetzen der ermittelten Parameter erhält man den Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix} - 2 \bullet \begin{pmatrix}-7\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-1\\14\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}18\\9\\11\end{pmatrix} + 1 \bullet \begin{pmatrix}3\\-10\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-1\\14\end{pmatrix}$$

Der Geraden-Schnittpunkt-Test:

1. Um zu testen, ob es so einen Punkt gibt, setzt man die beiden Geradengleichungen gleich und schaut, ob es eine Lösung gibt.
2. Das Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den zwei unbekannten Parametern lösen
3. Ergebnis: Wenn wir eine Lösung bekommen, schneiden sich die beiden Geraden.
4. Schnittpunktberechnung: Um den Schnittpunkt zu bekommen, muss man einen errechneten Parameter in die entsprechende (wichtig: nicht in die andere!) Geradengleichung einsetzen und erhält damit $\vec{OS}$.

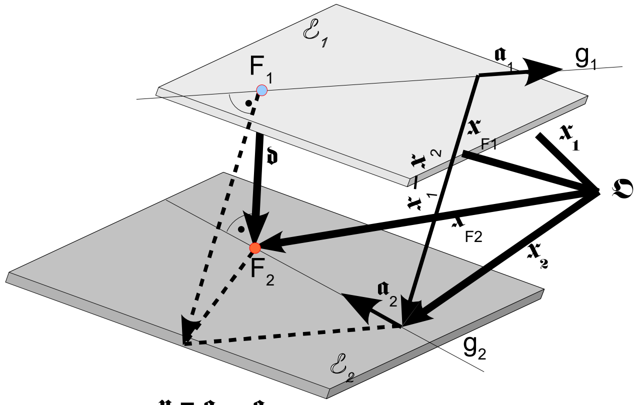
Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

4.3.5. Abstand windschiefer Geraden

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$

g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2$

$\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_2 = 0\\ E_1 \parallel E_2\end{array}}$



$\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$

E1: $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{n} = 0$

Der gesuchte Abstand wird berechnet über den Abstand des Punktes $\mathfrak{x}_1$ zu dieser Ebene. Der Abstandsvektor $\mathfrak{d} = d\,\mathfrak{n}_0$

Teil 1: Bestimme die Ebenengleichungen

Aufpunkt einer Ebene und die Richtungsvektoren beider Geraden: $E : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene, $n = \begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix}$

Normalform oder Koordinatenform: $E_1: \begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\right] = 0$

Teil 2: Bestimme den Abstand

$$\frac{1}{\sqrt{9^2+6^2+7^2}}\begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\right] = d$$

$$\frac{1}{\sqrt{9^2+6^2+7^2}}\begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9^2+6^2+7^2}}(117 + 42 + 7) = \frac{166}{\sqrt{166}} \approx 12{,}88$$

Zu zwei windschiefen Geraden lassen sich immer zwei Ebenen finden, so dass jede Gerade in einer dieser Ebenen liegt und diese beiden Ebenen **parallel** sind !
Dazu benutzt man für die Ebene jeweils die Darstellung einer Geraden und hängt als zweiten Richtungsvektor den Richtungsvektor der anderen Geraden an.
Parallele Ebenen haben den gleichen Normalenvektor und der ist auch die Richtung des Abstandsvektors.

4.3.6. Fußpunkte des Abstandes windschiefer Geraden

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$

g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2$

$\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{x}_{F1} = \mathfrak{x}_1 + t_{F1}\,\mathfrak{a}_1\\ \mathfrak{x}_{F2} = \mathfrak{x}_2 + s_{F2}\,\mathfrak{a}_2\\ \mathfrak{x}_{F2} = \mathfrak{x}_{F1} + \mathfrak{d}\\ \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_2 = 0\\ E_1 \parallel E_2\end{array}}$

Die gesuchten Fußpunkte sind zwei Punkte auf je einer Geraden. Der Abstand ist der Verbindungsvektor zwischen beiden Fußpunkten. Bilde den Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten auf den beiden Geraden:

$$\mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2)$$

Für den gesuchten Abstand muss dieser Differenzvektor senkrecht zu jedem Richtungsvektor sein.

$$[\mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2)]\odot\mathfrak{a}_1 = 0$$

$$[\mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2)]\odot\mathfrak{a}_2 = 0$$

Daraus entsteht ein Gleichungssystem in den Variablen t und s. Die berechneten Werte führen zu den Fußpunkten auf der jeweiligen Geraden.

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ $\quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$

Für beide Gleichungen benötigt man den Differenzvektor der beiden Geradengleichungen

$$F_2 - F_1 = \begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor von g_1:

$$(13 + 2s - t)\,1 + (7 - 3s - 2t)\,2 + (1 + 0s + 3t)\,(-3) = 0$$

Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor von g_2:

$$(13 + 2s - t)\,2 + (7 - 3s - 2t)\,(-3) + (1 + 0s + 3t)\,0 = 0$$

Führt zu dem Gleichungssystem: $\begin{array}{l}24 - 4s - 14t = 0\\ 5 + 13s + 4t = 0\end{array}$

oder umgestellt: $\begin{array}{l}24 = 4s + 14t\\ 5 = -13s - 4t\end{array}$

liefert die Lösung: $s = -1$; $t = 2$

Die gesuchten Fußpunkte sind diejenigen Punkte auf der Geraden, für die der kürzeste Abstand erreicht wird.
Der Abstandsvektor $\mathfrak{d} = \mathfrak{x}_{F2} - \mathfrak{x}_{F1}$ muss senkrecht auf beiden Richtungsvektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ der Geraden stehen.
Diese Bedingung wird zur Bestimmung der Fußpunkte ausgenutzt.

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

5. Lagebeziehungen zu Ebenen

$\odot$	Skalarprodukt
x	Vektorprodukt (Kreuzprodukt)
$\mathfrak{d}$	Lotvektor
$d(P,g) = \lvert\mathfrak{d}\rvert$	Abstand des Punktes P zur Ebene E
$\mathfrak{n}$	Normalenvektor der Ebene
$\mathfrak{n}_0$	Normaleneinheitsvektor der Ebene
$\mathfrak{x}_F$	Ortsvektor zum Fußpunkt des Lotes
$t_F\ s_F$	Parameterwert t und s von $\mathfrak{x}_F$ auf der Ebene E

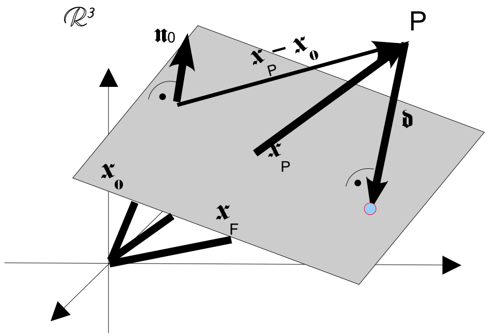
5.1. Abstand eines Punktes zu einer Ebene

E: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n} = d$ Hessescher Normalform

P: $\mathfrak{x}_P$

Es gilt: $\boxed{\begin{matrix}\mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P - \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \parallel \mathfrak{n}_0\end{matrix}}$

Abstandsberechnungen erfolgen grundsätzlich über die HNF oder die Koordinatenform.



1. Variante

Abstand: $\lvert\mathfrak{d}\rvert = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P)\mathfrak{n}_0$

$= (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P)\odot\mathfrak{n}_0$

Abstandsvektor:

$\mathfrak{d} = \lvert\mathfrak{d}\rvert\,\mathfrak{n}_0$

$= ((\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P)\odot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0$

$= (d - \mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0$

Fußpunkt: $\mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P \pm \mathfrak{d}$

Der Abstandsvektor $\mathfrak{d}$ ist die Projektion des Differenzvektors $\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P$ auf den Einheitsvektor in Normalenrichtung $\mathfrak{n}_0$.

Dabei ist auf die Orientierung von $\mathfrak{n}$ zu achten, sonst liegt der Fußpunkt nicht auf der Ebene. Wenn bei der Abstandsberechnung der orientierte Abstand benutzt wird, vereinfacht sich die Rechnung.

2. Variante

Geradengleichung durch P mit dem Normalenvektor $\mathfrak{n}$ als Richtungsvektor der Geraden.

g: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_P + t\,\mathfrak{n}$

Durchstoßpunkt durch die Ebene bestimmen liefert den Fußpunkt.

P (1|6|2)

E: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} = 1$

Hessescher Normalform

Das Skalarprodukt ist eine Projektion des Vektors $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ auf den Normalenvektor. Diese Projektion hat für alle Ortsvektoren, die in der Ebene liegen den gleichen Wert, dafür ist es ja die Ebenengleichung, die ein Merkmal für alle Punkte der Ebene ist.
Für Punkte außerhalb der Ebene entstehen andere Werte. Bringt man den konstanten Wert mit auf die linke Seite, erhält man für die Ebene die Gleichung

E: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} - 1 = 0$

äquivalent dazu kann man die Koordinatenform der Ebene benutzen $x_1 - 2x_2 + 4\,x_3 - 1 = 0$

Für alle Ortsvektoren, deren Ende nicht auf der Ebene liegt wird die Gleichung auf der rechten Seite keine 0 liefern. Da der Normalenvektor senkrecht auf der Ebene steht, werden die Ortsvektoren auf den senkrechten Abstand projiziert und geben so ein Maß für den Abstand an. Hat der Normalenvektor die Länge 1, dann ist der exakte metrische Abstand bestimmt.

$$\frac{1}{\sqrt{21}}\left(\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} - 1\right) = \frac{-4}{\sqrt{21}}$$

Der mit dem Vorzeichen orientierte Abstand zeigt, dass der Normalenvektor und der Ortsvektor einen Winkel über 90^0 miteinander bilden (cos negativ), damit liegt der Punkt nicht auf der Seite, in die der Normalenvektor zeigt. Hat der Abstand zum Nullpunkt das gleiche Vorzeichen liegt der Punkt in dem Halbraum, in dem auch der Ursprung liegt.

1. Sei die Normalengleichung der Ebene:

$$E: \underbrace{\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right]}_{\vec{OX} - \vec{OA}} \circ \underbrace{\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor } \vec{n}} = 0$$

2. Der Normalenvektor n hat die Länge $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Wir wollen aber einen Normalenvektor, der die Länge eins hat. Den nennen wir **Normalen-einheitsvektor** $\vec{n}^0$. Er berechnet sich wie folgt:

$$n^0 = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{|n|}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$$

3. Die Hesse-Normalform (HNF) einer Ebene ist damit fertig:

$E: \left[\vec{OX} - \vec{OA}\right]\cdot\vec{n^0} = 0$ oder

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\right]}_{OX\ -\ OA} \circ \underbrace{\vec{n}^0}_{\text{Normalen einheitsvektor}} = 0$$

- Mit dieser HNF kann man jeden Abstand *d* eines Punktes zu einer Ebene einfach ausrechnen:

  1. Sei ein Punkt P mit den Koordinaten P (p_1, p_2, p_3) gegeben.
  2. $\vec{OP}$ statt $\vec{OX}$ in die HNF einsetzten. Der Betrag davon ist der gesuchte Abstand:

     $d(P, E) = (\vec{OP} - \vec{OA}) \circ \vec{n}^0$

5.2. Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen (Übersicht)

$g: \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{u}$ mit $\vec{u} \neq \vec{0}$

$E: \vec{x} = \vec{Q} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ mit $\vec{v}, \vec{w} \neq 0$ bzw. $(\vec{x} - \vec{Q}) \bullet \vec{n^0} = 0$

Frage ①

Liegt der Richtungsvektor der Geraden in der Ebene oder ist er parallel

u,v,w linear abhängig
oder $u \circ n^0 = 0$

ja:

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

$\vec{u} \bullet \vec{n} = 0$

nein:

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

$\vec{u} \bullet \vec{n} \neq 0$

Frage ②

Liegt P auch in E ? $P \in E$?

Punktprobe; 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten (Ebene).

Ist der Differenzvektor der beiden Aufpunkte ein Vielfaches der beiden Richtungsvektors.

$\vec{P} - \vec{Q} = r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$

g liegt in E

$g \parallel E$, $g \not\subset E$ g parallel zu E

g und E schneiden sich in einem Punkt

Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten. Das Ergebnis ist nicht der Schnittpunkt, sondern die Parameter für die Geradengleichung oder Ebenengleichung zur Bestimmung des Schnittpunktes.

Nachweis mit der Vektorrechnung

g liegt in E	g parallel zu E	Schnittpunkt
$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$	$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$	$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$
$(\vec{P} - \vec{Q}) \bullet \vec{n} = 0$	$(\vec{P} - \vec{Q}) \bullet \vec{n} = 0$	$\vec{u} \bullet \vec{n} \neq 0$

Nachweis mit dem Gauß'schem Algorithmus

t	r	s	
1	0	4	0
0	1	2	0
0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Gerade **liegt in** der Ebene.
Es ist eine einparametrige Lösung möglich = Gerade als Lösungsmenge

t	r	s	
1	0	4	3
0	1	2	0
0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$

Gerade und Ebene sind **parallel nicht in Ebene**.
Die 3. Zeile enthält Widerspruch

t	r	s	
1	0	4	0
0	1	2	0
0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$

Es gibt einen **Schnittpunkt**.
Eindeutig lösbar

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

5.2.1. Durchstoßpunkt Gerade – Ebene

$g: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$

$E: \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D$

$$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n} \begin{cases} = 0 \begin{cases} \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n} = D & g \subset E \quad \text{Gerade liegt in der Ebene} \\ \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n} \neq D & g \parallel E \quad \text{Gerade parallel zur Ebene} \end{cases} \\ \neq 0 \quad \text{g schneidet E} \end{cases}$$

Ebenengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.2.1.1. Ebene in Parameterdarstellung

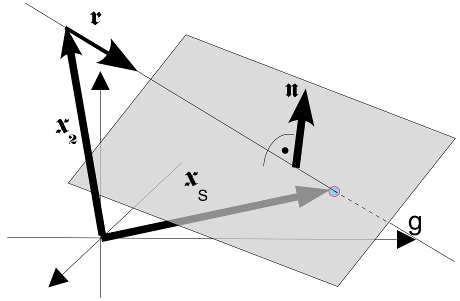
$E: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$

$g: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + u\,\mathfrak{r}$

Lösung durch Gleichungssystem:

$$\mathfrak{x}_2 + u\,\mathfrak{r} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$$

$$u\,\mathfrak{r} - t\,\mathfrak{a} - s\,\mathfrak{b} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

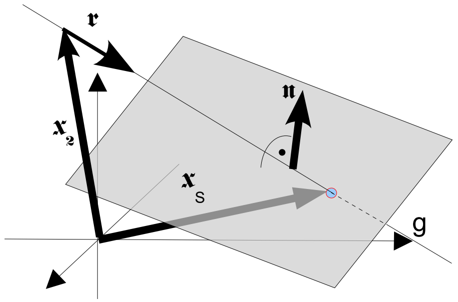
Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Eindeutige Lösung gegeben, da $\mathfrak{r}$ keine Linearkombination von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$

5.2.1.2. Ebene in Normalenform

$$\boxed{\begin{matrix} \mathfrak{x}_S = \mathfrak{x}_0 + t_S\,\mathfrak{r} \\ \mathfrak{x}_S \odot \mathfrak{n} = D \end{matrix}}$$

$$\mathfrak{x}_S \odot \mathfrak{n} = (\mathfrak{x}_0 + t_S\,\mathfrak{a}) \odot \mathfrak{n}$$
$$= \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n} + t_S\,\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n} = D$$

$$\Rightarrow t_S = \frac{D - \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}}{\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n}}$$



Normalenvektor der obigen Ebene: $\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebene in Normalform:

$$E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \text{oder} \quad E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = -8$$

Ein Punkt, der sowohl auf der Ebene, wie auf der Gerade liegen soll, muss beide Gleichungen erfüllen. Damit kann man für diesen einen Punkt die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen, da dieser Geradenpunkt auch ein Ebenenpunkt ist.

$$t_s = \frac{D - \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}}{\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n}} = \frac{-8 - (4 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 6 \cdot 2)}{(2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2)}$$

$$= \frac{-8 - 4 + 12 - 12}{2 - 3 - 2}$$

$$t_s = \frac{-12}{-3} = 4$$

Der berechnete Parameterwert t_S ist in die Geradengleichung einzusetzen und liefert die Koordinaten des Schnittpunktes

Eingesetzt in die Geradengleichung führt zum Durchstoßpunkt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

5.2.2. Abstand Gerade – Ebene

Ebene in Normalform bringen

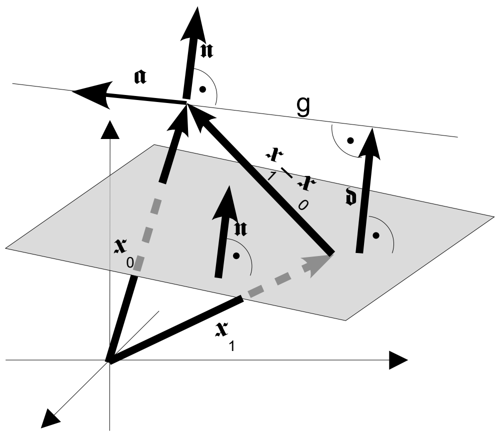
$$\boxed{\begin{array}{l} g\colon \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} \\ E\colon (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{n}_0 = 0 \end{array}}$$

$|\mathfrak{d}| = |(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{n}_0|$

$\quad = |\mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}_0 - d\,|$

(Die Richtung von $\mathfrak{d}$ ist $\mathfrak{n}$)

$\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|\ \mathfrak{n}_0$



Benutze den Aufpunkt der Geraden und den Normaleneinheitsvektor der Ebene

Ebene in Normalform:

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|d| = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{12}{\sqrt{14}}$$

Ein Abstand zwischen Geraden und Ebene ist nur dann berechenbar, wenn die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

Jeder Punkt der Geraden hat dann den gleichen Abstand von der Ebene.

Man benutzt den Aufpunkt der Geraden, um den Abstand eines Punktes zu einer Ebene zu berechnen. Dieser ist gleich dem Abstand der Geraden.

5.2.3. Gerade liegt in der Ebene

Ebene in Normalform bringen

$$\boxed{\begin{array}{l} g\colon \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} \\ E\colon (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{n}_0 = 0 \end{array}}$$

5.3. Schnittwinkel Gerade – Ebene

$g : \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$

$E : \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D$

$$\cos \measuredangle(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}) = \frac{\mathfrak{n} \odot \mathfrak{a}}{|\mathfrak{n}|\ |\mathfrak{a}|}$$

Anschließend ist der ermittelte Winkel von 90^0 zu subtrahieren, da bei der Ebenen mit dem Normalenvektor und nicht mit Richtungsvektoren gearbeitet wurde

5.4. Lagebeziehungen zwischen Ebenen (Übersicht)

$E_1: \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$

$E_2: \vec{x} = \vec{Q} + k\,\vec{c} + l\,\vec{d}$ mit $\vec{c}, \vec{d} \neq 0$

bzw. in Normalenform

$E_1: (\vec{x} - \vec{P}) \cdot \vec{n}_1^{\,0} = 0$

$E_2: (\vec{x} - \vec{Q}) \cdot \vec{n}_2^{\,0} = 0$

Frage ①

n_1, n_2 linear abhängig

$\boxed{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0}$ ja

$\boxed{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq 0}$ nein

Frage ②

$P \in E_2$?

Liegt P auch auf E_2 ?

E_1 und E_2 schneiden sich

Punktprobe;
Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten.
Ist der Differenzvektor der beiden Aufpunkte ein Vielfaches der beiden Richtungsvektors.

$\vec{P} - \vec{Q} = t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$

Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten.
Das Ergebnis ist, wenn das Gleichungssystem lösbar ist eine Parameterlösung, damit eine Gerade.

$E_1 = E_2$

Ebenen sind identisch

$E_1 \parallel E_2$
$E_1 \neq E_2$

Ebenen sind parallel

Nachweis mit der Vektorrechnung

$\boxed{\det(\vec{P} - \vec{Q}, \vec{a}, \vec{b}) = 0}$

$\boxed{\det(\vec{P} - \vec{Q}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0}$

Nachweis mit dem Gauß'schem Algorithmus

t	s	k	l	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	0

Beide Ebenen **identisch**.
Es ist eine zweiparametrige Lösung möglich = Ebene als Lösungsmenge

t	s	k	l	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	1

Die Ebenen sind **parallel aber nicht identisch**.
Die 3. Zeile enthält Widerspruch

t	s	k	l	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	1	3	2

Es gibt eine **Schnittgerade**.
Es gibt eine Parameterlösung = Gerade als Lösungsmenge

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

5.4.1. Schnittgerade : Beide Ebenen in Parameterform

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2 + r\,\mathfrak{b}_2\end{array}}$$

Gleichsetzen der beiden Ebenengleichungen

$$\mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2 + s\,\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{x}_1 + u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1$$

$$t\,\mathfrak{a}_2 + s\,\mathfrak{b}_2 - u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$$

Gleichungssystem 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten: t, s, u, v.

Ebenengleichung 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$$

Ebenengleichung 2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}1 + 4t - 3s &= 4 + 2u - v\\ 5 + 2t + s &= 4 + u + 2v\\ 3 + t + 3s &= 6 - u - 4v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4t - 3s - 2u + v &= 3\\ 2t + s - u - 2v &= -1\\ t + 3s + u + 4v &= 3\end{aligned}$$

Die Lösung führt zu einer Parameterlösung, die geometrisch eine Gerade darstellt. Das ist die Schnittgerade.

5.4.2. Schnittgerade : Eine Ebene in Parameterdarstellung, eine Ebene in Normalenform

E_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$

E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

1. Variante

(I) Berechne einen gemeinsamen Punkt

(II) Berechne den Richtungsvektor

2. Variante

Einsetzen E_1 in E_2 :

1. Variante

(I) Berechne einen gemeinsamen Punkt

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{x}_P = \mathfrak{x}_1 + t_P\,\mathfrak{a} + s_P\,\mathfrak{b}\\ \mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{n}_2 = D_2\end{array}}$$

Einsetzen der ersten Ebenengleichung in die zweite.

$$\mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{n}_2 = (\mathfrak{x}_1 + t_P\,\mathfrak{a} + s_P\,\mathfrak{b})\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$$

$$\mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2 + t_P\,\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2 + s_P\,\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$$

Ergibt 1 Gleichung mit 2 Unbekannten

1. Variante

$\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2 \neq 0$

setze $s_P=0$

$$\Rightarrow t_P = \frac{D_2 - \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2}$$

2. Variante

$\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2 \neq 0$

setze $t_P=0$

$$\Rightarrow s_P = \frac{D_2 - \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2}$$

(II) Berechne den Richtungsvektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2 = (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2) - \mathfrak{n}_2(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{b})$$

$$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2) - \mathfrak{n}_2(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{b})}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_P + k\,\mathfrak{r}$$

2. Variante

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

E_2: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$

Einsetzen E_1 in E_2 :

$$1(3-4t+4s) + 2(4+t-s) + 2(3+3t+s) = 5$$

$$17 + 4t + 4s = 5$$

$$s = -t - 3$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix} + (-t-3)\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix} - t\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}-9\\7\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\2\\2\end{pmatrix}$$

Setzt man in der unter Variante 1 ermittelten Geradengleichung t=7, so erhält man diesen Aufpunkt. Es sind also die gleichen Geraden.

Der Richtungsvektor der Schnittgerade lässt sich aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren bestimmen.

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

5.4.3. Schnittgerade : Beide Ebenen in Normalenform

E_1: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_1 = D_1$
E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

1. Variante

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_1 = x\, n_{11} + y\, n_{12} + z\, n_{13} = d_1$
$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_2 = x\, n_{21} + y\, n_{22} + z\, n_{23} = d_2$

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems:
2 Gleichung , 3 Unbekannten
1 wahlfreier Parameter

1. Variante

E_1: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$
E_2: $x_1 + 4x_2 = 19$

$x_2 = t$
$x_1 = 19 - 4t$
$x_3 = -7 + t$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Variante

Normalenvektoren der Ebenen:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor der Geraden: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$
$x_1 + 4x_2 = 19$

Punkt auf der Schnittgeraden: $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -3$

Gleichung der Schnittgeraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Variante

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ergibt sich aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren der Ebenen:
$\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2$
da der Richtungsvektor in beiden Ebenen liegen muss.
Ein Punkt aus der Schnittgeraden muss beide Ebenengleichungen erfüllen:
$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_2$
$\mathfrak{x} \odot (\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2) = 0$
das ist im allgemeinen eine Gleichung mit drei Variablen. Da sind zwei frei wählbar und die dritte ist zu bestimmen. Das Ergebnis ist ein Ortsvektor zu einem Geradenpunkt.
Der Richtungsvektor ist mit dem aus der 1. Variante identisch. Für u = – 4 kann man den Aufpunkt der Geraden aus Variante 1 erzeugen. Also sind die beiden Geraden identisch.

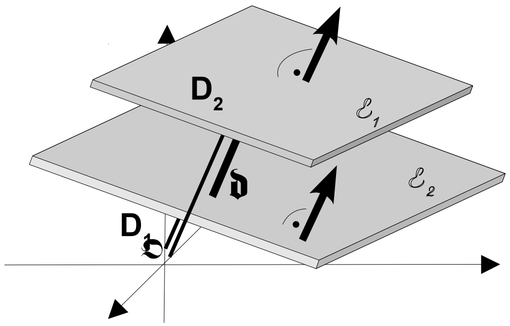
5.4.4. Abstand paralleler Ebenen

E_1: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_1^{\,0} = d_1$
E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2^{\,0} = d_2$

Es gilt: $\boxed{\mathfrak{n}_1^{\,0}\times\mathfrak{n}_2^{\,0} = \mathfrak{o}}$

$|\mathfrak{d}| = |\, d_1 - d_2|$
$\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|\, \mathfrak{n}_1^{\,0}$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir: $\mathfrak{n}_1^{\,0} = \mathfrak{n}_2^{\,0}$ (Parallele Ebenen haben identische Normaleneinheitsvektoren)



E_1 : $2x + 4x - 3z = 5$
E_2 : $2x + 4y - 3z = 11$

$d = 5 - 11 = -6$

$$\mathfrak{n}_1^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wenn es sich bei der Ebenengleichung um den **Normaleneinheitsvektor** handelt, dann stellen die d Werte auf der rechten Seite den Abstand der Ebene zum Ursprung dar. Damit gibt es eine Richtung vom Ursprung, die senkrecht durch die beiden Ebenen verläuft.

Die Differenz des Abstandes zum Ursprung ist der Abstand der beiden Ebenen.

Der Abstand ist die Differenz der beiden d Werte auf der rechten Seite, der Abstandsvektor hat die Richtung des Normalenvektors.

5.5. Schnittwinkel zweier Ebenen

E_1: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_1 = D_1$
E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

$$\cos \measuredangle(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2) = \frac{\mathfrak{n}_1^{\,0} \odot \mathfrak{n}_2^{\,0}}{|\mathfrak{n}_1^{\,0}|\, |\mathfrak{n}_2^{\,0}|}$$

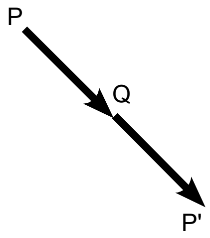
Der Schnittwinkel von zwei Ebenen ist der Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

6. Spiegelung eines Punktes

6.1. Spiegelung eines Punktes an einem Punkt

1. Schritt: Berechnen des Vektors $\overrightarrow{PQ}$
2. Schritt: P' aus $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \bullet \overrightarrow{PQ}$ ermitteln



Beispiel: P(2| 6| –4) ; Q (3 | 0| 1)

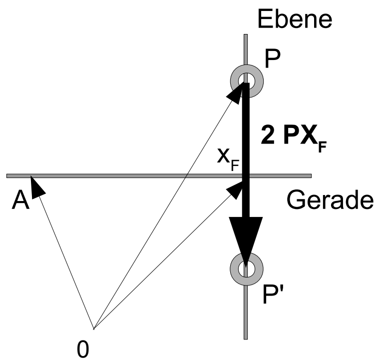
$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$P' \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Man kann den Punkt Q als Fußpunkt eines Lotes von P auf eine Ebene ansehen, deren Normalenvektor der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ ist.

6.2. Spiegelung eines Punktes an einer Geraden

1. Schritt: Ebene E durch P senkrecht zu g bestimmen
2. Schritt: Schnittpunkt von g und E ist F
3. Schritt: P' aus $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \bullet \overrightarrow{PF}$ ermitteln



Beispiel: P(-2| 8|10); $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ebene E: $x_1 + 3x_3 = -2 + 3 \bullet 10 = 28$,
also $x_1 + 3x_3 = 28$

g in E einsetzen: $(4 + t) + 3 \bullet (8 + 3t) = 28$
$t = 0$; F(4|1|8)

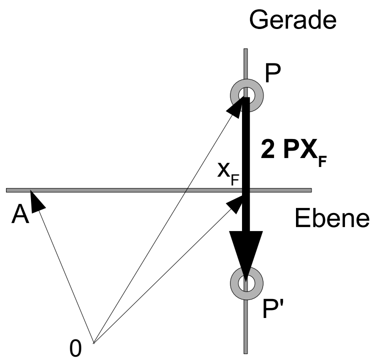
$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad P' \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jede Spieglung geht über den Lotfußpunkt Deshalb wird erst der Fußpunkt bestimmt. Dazu kann man die beiden Verfahren nutzen, die schon beim Berechnen des Lotes auf eine Gerade benutzt wurden:

1. Ebene senkrecht zur Gerade und durch P, dann Durchstoßpunkt durch die Ebene berechnen. Dieser Durchstoßpunkt ist der gesuchte Fußpunkt.
2. Projektion des Verbindungsvektors des Geradenaufpunktes auf den Richtungs**einheits**vektor der Geraden. Der berechnete Abstand ist der Abstand des Fußpunktes vom Aufpunkt der Geraden.

6.3. Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

1. Schritt: Gerade durch P senkrecht zu E ist g
2. Schritt: Schnittpunkt von g und E ist F
3. Schritt: P' aus $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \bullet \overrightarrow{PF}$ ermitteln



Beispiel: P(-5| -8|3); E: $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$

$$x = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in E: $2(-5 + 2t) + 3(-8 + 3t) - (3-t) = 5$
$-37 + 14t = 5 \Rightarrow t = 3$ F(1|1|0)

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad P' \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Soll ein Punkt an einer Ebene gespiegelt werden, hat man gegenüber der Geraden den Vorteil dass man die Richtung des senkrechten Abstandes durch den Normalenvektor kennt. Andererseits muss man aufgrund der Orientierung des Normalenvektors unterscheiden, ob der Punkt auf der selben Seite von der Ebene wie der Ursprung liegt, oder auf der anderen Seite, wie der Ursprung.
Der Normalenvektor sollte immer so orientiert sein, dass er auf die Seite zeigt, in der der Ursprung **nicht** liegt.

7. Ebenenscharen

7.1. Ebenenscharen in Parameterdarstellung

7.1.1. Scharparameter in einem Richtungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix}$$

Für s = 0 erhält man eine Gerade, die in allen Ebenen liegt. In diesem Fall liegt die Ebene in der $x_1 - x_2$ Koordinatenebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Besitzen Ebenen eine Schnittgerade, dann ist die Schnittgerade in allen Ebenen enthalten.

=> Ist nur in einem Richtungsvektor ein Parameter enthalten, ist der Richtungsvektor ohne Parameter der Richtungsvektor der Schnittgeraden.

=> Ein möglicher Aufpunkt dieser Geraden ist der Aufpunkt der Ebenen aus der Schar, wenn dieser keinen Scharparameter enthält.

=> Der Normalenvektor aller Ebenen der Schar muss zum Richtungsvektor der Geraden senkrecht sein.(da die Gerade in allen Ebenen liegt)

7.1.2. Scharparameter in beiden Richtungsvektoren

Vorüberlegung: Wenn es eine Schnittgerade gibt, dann muss

- der Richtungsvektor der Schnittgeraden eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren sein
- der Richtungsvektor unabhängig von dem Parameter t sein.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2-t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix}$$

$$-r\,t + s\,5t = 0$$
$$r = 5s$$

eine mögliche Kombination ist s = 1 und r = 5. Das führt zu folgendem Richtungsvektor:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2-t \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden muss unabhängig vom Scharparameter t sein, da die Gerade in allen Ebenen liegen muss.
Das kann im Beispiel nur möglich sein, wenn in der dritten Komponente der Koeffizient von t Null ist.
Dh. die gesamte dritte Zeile muss für alle t den Wert 0 ergeben: $0 + r \cdot (-t) + s \cdot (5t) = 0$

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

7.2. Ebenenscharen in Normalendarstellung

7.2.1. Bestimmung der Schnittgeraden

Die Ebenengleichung wird in zwei Teile gegliedert. Der eine Teil enthält mit den Koordinatenwerten x_1, x_2 und x_3 keinen Scharparameter, bei dem zweiten Teil werden die Koordinatenwerte zusammengefasst, die einen Scharparameter enthalten und dieser wird gleich ausgeklammert.

Beispiel:

$E_a: \ 2(a+1)x_1 + 2ax_2 + 5(a-2)x_3 - 4 = 0$

Nach Scharparameter trennen:

$(2x_1 - 10x_3 - 4) + a\,(2x_1 + 2x_2 + 5x_3) = 0$

Damit entstehen formal zwei Ebenengleichungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad - 10x_3 - 4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Die gesuchte Schnittgerade ist die Lösung dieses Gleichungssystems. Als Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten muss es eine Parameterlösung geben, wenn es überhaupt eine Lösung gibt.

Wählt man $x_3 = t$ so ergibt sich folgende Lösung:

$x_1 = 2 + 5t$ aus erster Zeile

$x_2 = -2 - 7{,}5t$ aus zweiter Zeile

mit der Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5t \\ -2 - 7{,}5t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>**2. Lösungsweg**</u>

Zwei beliebige Ebenen mit den Parametern a und b

$$\begin{aligned} E_a: \ & 2(a+1)x_1 + 2ax_2 + 5(a-2)x_3 - 4 = 0 \\ & a\,(2x_1 + 2x_2 + 5x_3) + (2x_1 - 10x_3 - 4) = 0 \\ E_b: \ & 2(b+1)x_1 + 2bx_2 + 5(b-2)x_3 - 4 = 0 \\ & b\,(2x_1 + 2x_2 + 5x_3) + (2x_1 - 10x_3 - 4) = 0 \end{aligned}$$

Die Schnittgerade muss unabhängig von a und b sein, deshalb muss der erste Teil der Gleichungen gleich 0 sein:

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

Damit bleibt als zweiter Teil übrig:

$$2x_1 \qquad - 10x_3 - 4 = 0$$

Das sind Koordinatengleichungen von zwei Ebenen.

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist das Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Division durch -4 liefert den obigen Richtungsvektor.

Gesucht ist noch ein Punkt, der die beiden Gleichungen erfüllt: z.B. $x_3 = 0$

liefert aus zweiter Gleichung: $x_1 = 2$

und aus erster Gleichung: $x_2 = -2$

Aufgabenstellung	Darstellung	Musteraufgabe	Erläuterung

7.2.2. Bestimmung der Grenzebene

Häufig wird nach einer Ebene gefragt, in der die Schnittgerade liegt, die aber nicht zur Schar gehört. Diese Ebene könnte man als „Grenzebene“ für $a \to \infty$ bezeichnen.

Für $a \to \infty$ spielt der Teil des Normalen-vektors, der den Scharparameter enthält eine immer größere Rolle für die Summe.

Im Beispiel für die x_1 Richtung mit dem Faktor 2(a+1) wird für wachsendes a die „1“ die Bedeutung verlieren und nur noch der Wert 2a ausschlaggebend sein. Um die gesucht Ebene zu finden, benutzt man wieder die geteilte Version der Ebenenschar.

Beispiel: wie unter 6.2.1.

$(2x_1 - 10x_3 - 4) + a\,(2x_1 + 2x_2 + 5x_3) = 0$

Division durch a und dann $a \to \infty$ führt zu folgender Ebene:

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

Diese Ebene enthält die Schnittgerade, ist aber selbst nicht Bestandteil der Schar.

Der Aufpunkt der Schnittgeraden ist Element der Grenzebene. Setzt man die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, erhält man:

$$
\begin{aligned}
2\ x_1 \quad + 2\ x_2 \quad + 5\,x_3 & \\
2(2 + 5t) + 2(-2 - 7{,}5t) + 5\,t &= \\
4 + 10t - 4 - 15t + 5t &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Für eine sauberer mathematische Betrachtung teilt man diese Gleichung durch a und untersucht den Grenzübergang für $a \to \infty$. Damit bleibt nur der zweite Teil übrig, da der erste Teil wegen des Faktors 1/a gegen 0 geht. Damit ist die „Grenzebene“ die Ebene des zweiten Teils.

Damit ist gezeigt, dass die gesamte Gerade in der Ebene enthalten ist. Die Gleichung gilt für alle t.

8. Schattenberechnung

8.1. Parallele Lichtstrahlen (Sonnenlicht)

Ist bei einer Schattenberechnung der Richtungsvektor, aus dem die Lichtstrahlen kommen, gegeben, dann handelt es sich um paralleles Licht, wie es z.B das Sonnenlicht darstellt.
Der Endpunkt eines Stabes oder die Spitze einer Pyramide ist dann der Stützvektor einer Geraden und die Richtung des Lichtes ist der Richtungsvektor der Geraden.

Aufgabenstellung	**Darstellung**	**Musteraufgabe**	**Erläuterung**

8.2. Punktförmige Lichtstrahlen (Lampe)

Wird das Licht von einer Lampe abgestrahlt, dann an entsteht der Richtungsvektor des Lichtstrahls aus dem Differenzvektor zwischen Lampe und Spitze des Stabes.
Der Endpunkt eines Stabes oder die Spitze einer Pyramide ist dann wieder der Stützvektor einer Geraden und der Richtungsvektor der Geraden die Differenz aus Lampe und Stabspitze.

8.3. Schattenpunkt einer Spitze

Soll der Schattenpunkt eine Spitze auf einer Ebene bestimmt werden, ist der Schnittpunkt zwischen der Geraden des Lichtstrahls und der Ebene zu berechnen. (Durchstoßpunkt)

8.4. Schattenpunkt an einer Kante

Soll der Schattenpunkt an einer Kante berechnet werden, ist die Geradengleichung des Lichtstrahls zu einer Ebenengleichung zu erweitern. Dazu wird der senkrechte Vektor der Mastspitze aus zweiter Richtungsvektor benutzt. Damit entsteht aus der Geradengleichung eine Ebenengleichung aus der das Licht kommt.
Jetzt ist der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Geradengleichung, die die Kante darstellt zu berechnen.