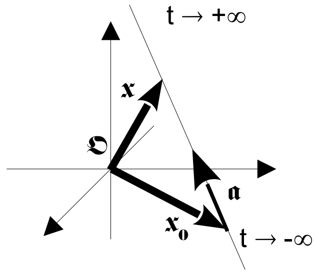
Aufgabe	Lösung	Erläuterung

1. Geradengleichungen

1.1. Gerade durch Punkt und Richtung

$\mathfrak{x}_0$ Ortsvektor zu einem festen Punkt auf der Geraden
$\mathfrak{a}$ Richtungsvektor
$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes
t reeller Parameter

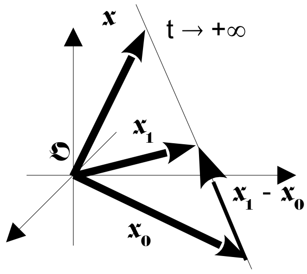
$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a},\ t \in (-\infty, +\infty)$



1.2. Gerade durch zwei Punkte

$\mathfrak{x}_0$ Ortsvektor erster fester Punkt auf der Geraden
$\mathfrak{x}_1$ Ortsvektor zweiter fester Punkt auf der Geraden
$\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes
t reeller Parameter

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0),\ t \in (-\infty, +\infty)$



1.3. Parameterfreie Darstellung im R^2 *HNF*

Eine HNF kann es nur geben, wenn die Dimension des Objektes **genau um 1 niedriger** ist, als die Dimension des Raumes, also für Gerade im R^2 und Ebene im R^3 . Grund: Die Richtung des Normalenvektors muss eindeutig sein.

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n}^0 = 0$

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = d$

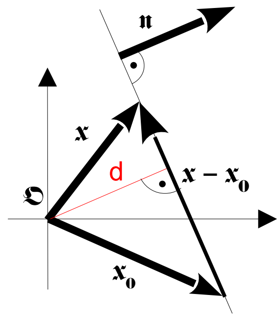
$x\, n_1^{\,0} + y\, n_2^{\,0} = d$

mit $d = \frac{D}{|\mathfrak{n}|} = \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}^0 \geq 0$

d ($\geq$ 0) Abstand der Geraden von $\mathfrak{o}$
$\mathfrak{n}$ Normalenvektor (für D > 0 zeigt n in die Halbebene, die $\mathfrak{o}$ <u>**nicht**</u> enthält)
$\mathfrak{n}^0$ Normaleneinheitsvektor

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n} = 0$

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D \qquad \text{mit } D = \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}$



1.4. Parameterfreie Darstellung im R^3

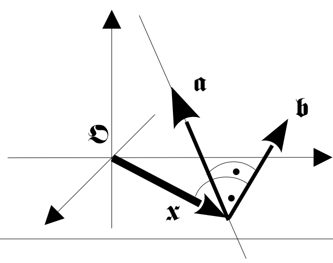
$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{a}^0 = \mathfrak{o}$

$\frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|} \quad \mathfrak{x} \times \mathfrak{a}^0 =$

$\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ Normalenvektor der Ebene, die die Gerade und $\mathfrak{o}$ enthält
$\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ Gerade durch den Ursprung

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$

$\mathfrak{x} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \quad \text{mit } \mathfrak{b} = \mathfrak{x}_0 \times \mathfrak{a}$



- Ein *Ortsvektor* ist ein Vektor vom Ursprung O zu einem Punkt A im Raum. Jeder Punkt im Raum kann eindeutig durch einen solchen Ortsvektor erreicht werden.

  Der Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ besitzt den Ortsvektor OA = $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

- Eine Verschiebung von einem Punkt *A* zu einem Punkt B kann ebenfalls als Vektor dargestellt werden.

  Der Vektor von Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ zum Punkt $B(b_1, b_2, b_3)$ ergibt sich aus

  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

- Ein Parameter *r* verkürzt oder verlängert einen Vektor a.
- Eine *Gerade* ist eine unendliche Verlängerung einer Strecke zwischen zwei Punkten in beide Richtungen. Jede Gerade ist deshalb eindeutig durch zwei Punkte festgelegt.
- Geraden im Raum können mit unserem Koordinatensystem durch Vektoren dargestellt werden:
  Man nimmt dazu einen Ortsvektor zu einem Punkt (*Stützvektor* genannt) und den Vektor zwischen den beiden Punkten (*Richtungsvektor* genannt). Durch einen Parameter r kann dieser Richtungsvektor in beide Richtungen beliebig verlängert werden.
- Mit den zwei Punkten *A* und *B* ergibt sich also eine eindeutige *Parametergleichung* einer Geraden g:

  $g:\ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB}$

- Jede Gerade ist also eindeutig festgelegt durch:
  1. zwei Punkte
  2. zwei Vektoren (als Orts– und Richtungsvektor)
  3. einen Punkt und einen Vektor

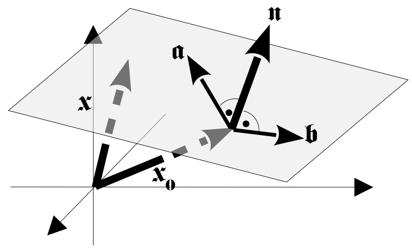
Aufgabe	Lösung	Erläuterung

2. Ebenengleichungen

2.1. Ebene durch Punkt und Richtung

$\mathbf{x}_0$ Ortsvektor zu einem festen Punkt der Ebene
$\mathbf{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nicht kollineare Richtungsvektoren

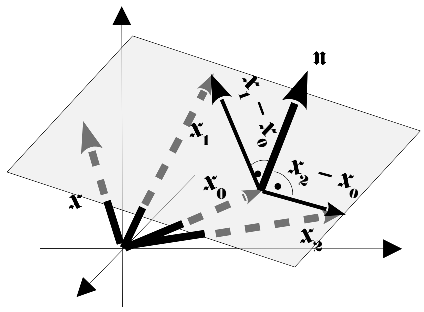
$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$ s, t ∈ (-∞, +∞)



2.2. Ebene durch drei Punkte

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkten der Ebene
$\mathbf{x}$ Ortsvektor eines variablen Punktes

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + s\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)$ s, t ∈ (-∞, +∞)



2.3. Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$ s, t ∈ (-∞, +∞)
$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2$
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkt einer Gerade
$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ Richtungsvektoren der Geraden

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 + s\,\mathfrak{a}_2$

2.4. Ebene durch zwei parallele Geraden

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$
g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ Ortsvektoren zu festen Punkt einer Gerade
$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ Richtungsvektoren der Geraden

E: $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \odot ((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times \mathfrak{a}_1) = 0$ oder
E: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + s\,\mathfrak{a}_1$

2.5. Ebene durch eine Gerade und einen Punkt nicht auf der Geraden

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$
$\mathbf{x}_0$ Punkt nicht auf der Gerade
$\mathbf{x}_1$ Ortsvektoren zu festen Punkt der Gerade
$\mathfrak{a}_1$ Richtungsvektoren der Geraden

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 + s(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ s, t ∈ (-∞, +∞)

- Eine *Ebene* ist eine unendliche Vergrößerung eines Dreiecks. Jede ebene ist deshalb eindeutig durch drei Punkte festgelegt, die **nicht** auf einer Geraden liegen.
- Ebenen im Raum können mit dem Koordinatensystem durch Vektoren dargestellt werden:
  dazu benutzt man den Ortsvektor zu einem Punkt (*Stützvektor* genannt) und die beiden Vektoren zu den beiden anderen Punkten (*Richtungsvektoren* genannt). Durch zwei Parameter t und s können diese beiden Richtungsvektoren in beide Richtungen beliebig verlängert werden.
- Mit den drei Punkten A, B und C ergibt sich also eine eindeutige Parametergleichung der Ebene E:
  $E:\ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$
- Jede Ebene ist also eindeutig festgelegt durch:
  1. drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen
  2. zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden
  3. eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.

Ziel ist es hierbei immer, zwei linear unabhängige Vektoren und einen Punkt der Ebene zu kennen.

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

2.6. Hessesche Normalform $\mathcal{HNF}$

Im R³ gibt es eine HNF nur für die Ebene.
Für eine Gerade ist sie nicht machbar !

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n}^0 = 0$

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = d$

$x\, n_1^0 + y\, n_2^0 + z\, n_3^0 = d$

mit $d := \frac{D}{|\mathfrak{n}|} = \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}^0 \geq 0$

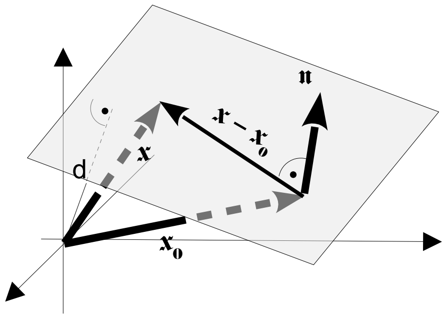
d (≥ 0) Abstand der Fläche von $\mathfrak{O}$

$\mathfrak{n}$ Normalenvektor (für d > 0 zeigt n in die Halbebene, die $\mathfrak{O}$ **nicht** enthält)

$\mathfrak{n}^0$ Normaleneinheitsvektor

$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \odot \mathfrak{n} = 0$

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D$ mit $D := \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}$



2.7. Koordinatenform

$E_1 : ax + by + cz = d$

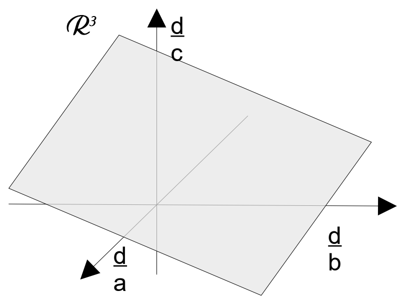
Diese Form entspricht der Hesseschen Normalform. Die Koeffizienten a, b, c kann man als die Koordinaten des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ ansehen. Es fehlt lediglich die Normierung auf die Länge 1, die aber sehr leicht durch Division der Ebenengleichung durch $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Gleichzeitig lassen sich daraus die Achsenabschnitte ermitteln, die die Spurpunkte liefern.

$$\frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Achsenabschnittsgleichung

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$



- Ein Vektor, der senkrecht zu allen Vektoren einer Ebene steht, heißt *Normalenvektor* der Ebene.
- Eine weitere Möglichkeit, eine Ebene eindeutig festzulegen, besteht darin, den **Normalenvektor und einen Punkt der Ebene** zu kennen.
- Normalenvektor berechnen
  1. Seien *p* und *q* zwei Vektoren der Ebene (zum Beispiel AB und AC. Es gilt also $n \perp p$ und $n \perp q$
  2. Nach Orthogonalitätskriterium muss also gelten $n \cdot p = 0$ (1) und $n \cdot q = 0$ (2)
  3. Mit den Vektoren
     $$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},\ p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$
     heißt das nach der Definition des Skalarprodukts:
     $$n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = 0 \quad (1)$$
     $$n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3 = 0 \quad (2)$$
  4. Jetzt müssen wir eine dritte Gleichung aus den beiden obigen (z.Bsp. durch Addition oder Subtraktion) gewinnen, die höchstens zwei Unbekannte hat. Eine der beiden Unbekannten wird frei (= t) gewählt (z.Bsp. $n_3 = t$).
  5. Gewählte Zahl einsetzen und das Gleichungssystem lösen. Wir erhalten die Komponenten des Normalenvektors in Abhängigkeit von t . Jetzt können wir t so wählen, dass es hübsch aussieht (also z.Bsp. Brüche vermieden werden).
- Jetzt fehlt zur Ebenendarstellung nur noch ein Punkt der Ebene (zum Beispiel A).
- Die *Normalengleichung* der Ebene kann damit angegeben werden:
  $$E : [\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}] \circ n = 0$$
- Wir können die Normalengleichung noch in eine weitere Darstellung der Ebene umwandeln: $E : [\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}] \circ n = 0$
  $$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$
  $$(x_1 - a_1)n_1 + (x_2 - a_2)\, n_2 + (x_3 - a_3)\, n_3 = 0$$
  $$x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = \underbrace{a_1n_1 + a_2n_2 + a_3 n_3}_{\text{nennen wir } d}$$
- Da bis auf x_1, x_2 und x_3 alles bekannt ist können wir die allgemeine *Koordinatengleichung* der Ebene angeben:
  $$E\!: x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d$$

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

2.8. Umrechnung Parameter → Normalform

$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \odot \mathbf{n^0} = d$

Den Normalenvektor erhält man aus dem Vektorprodukt der Richtungsvektoren

$\mathbf{x} - \mathbf{x_0} = t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b} \quad | \odot \mathbf{n} \quad = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \odot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{x} \odot \mathbf{n} = D$

mit $D := \mathbf{x_0} \odot \mathbf{n}$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \odot \mathbf{n^0} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{x} \odot \mathbf{n^0} = d$

mit $d := \dfrac{D}{|\mathbf{n}|} = \mathbf{x_0} \odot \mathbf{n^0}$

zu 2.8

$E : [\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}] \circ n = 0$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$(x_1 - a_1)n_1 + (x_2 - a_2)\,n_2 + (x_3 - a_3)\,n_3 = 0$

$x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = \underbrace{a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3}_{\text{nennen wir } D}$

2.9. Umrechnung Normalform → Koordinatenform

Die Normalform ist nur eine andere Schreibweise der Koordinatenform

$(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \odot \mathbf{n} = 0$

$\mathbf{x} \odot \mathbf{n} = D$

$\boxed{n_1 x + n_2 y + n_3 z = D}$

Die Koeffizienten der Koordinatenform sind die Komponenten des Normalenvektors,

- Da bis auf x_1, x_2 und x_3 alles bekannt ist, können wir die allgemeine *Koordinatengleichung* der Ebene angeben:

  $E\!: x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d$

2.10. Umrechnung Normalform → Parameterform

$\mathbf{x} \odot \mathbf{n^0} = d \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b}$

1. Variante

Für $\mathbf{n^0} = (n_1^0, n_2^0, n_3^0)$ gesucht $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ mit $\mathbf{n^0} \perp \mathbf{a}$ $\mathbf{n^0} \perp \mathbf{b}$ die nicht kollinear sind. Wähle z. B.

$\mathbf{a} = (n_3^0, 0, -n_1^0)$ oder

$\mathbf{b} = (n_2^0, -n_1^0, 0)$

Es ist dann noch ein Punkt $\mathbf{x_0}$ zu suchen, der auf der Ebene liegt, dass ist aber mit der Normalform sehr einfach, da es eine Gleichung mit 3 Unbekannten ist, also 2 Variable frei wählbar.

$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b}$

2. Variante

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: eine Gleichung mit drei Unbekannten

$\mathbf{x} \odot \mathbf{n^0} = x\,n_1^0 + y\,n_2^0 + z\,n_3^0 = d$

Wahl zweier Variablen als Parameter:
x = t, y = s

x = 0 + t +0*s ; y = 0 + 0*t + s; ⇒

$z = \dfrac{1}{n_3^0}(d - t n_1^0 - s n_2^0)$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{d}{n_3^0} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{n_1^0}{n_3^0} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{n_2^0}{n_3^0} \end{pmatrix}$$

$= \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b}$

- Von einer Koordinatengleichung kommt man schnell wieder zurück zu einer Parameterdarstellung der Ebene

1. Man sucht zunächst drei Punkte P, Q und R deren Koordinaten die Koordinatengleichung erfüllen.
   Ein möglicher Punkt wäre der Spurpunkt P mit P = (0;0; d/n_3). Analog existieren (meistens) auch Spurpunkte mit den anderen Koordinatenachsen.
2. Einer dieser Punkte (zum Beispiel *P*) wird als Stützvektor benutzt.
3. Dann bildet man die Vektoren von diesem Punkt *P* zu den beiden anderen Punkten.
4. Man erhält so insgesamt drei Vektoren

   $P = \overrightarrow{OP}$; $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$

   und kann die Parameterform hinschreiben.

3. Lagebeziehungen zu Geraden

$\odot$ Skalarprodukt
$\mathfrak{d}$ Lotvektor
$d(P,g) = |\mathfrak{d}|$ Abstand des Punktes P zur Geraden g
$\boldsymbol{x}_F$ Ortsvektor zum Fußpunkt des Lotes
t_F Parameterwert t von $\boldsymbol{x}_F$ auf der Geraden g

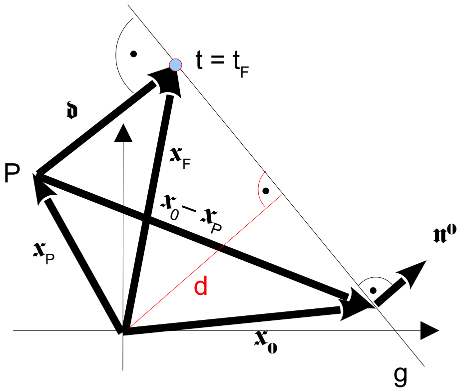
Die Lotebene ist eine senkrechte Ebene zur Gerade. s.dazu Lagebeziehung Ebene -Gerade

3.1. Abstand eines Punktes zu einer Geraden im R^2

$$\left.\begin{array}{l} g:\ \boldsymbol{x}\odot\mathfrak{n} = d \\ P:\ \boldsymbol{x}_P \end{array}\right\}\ \text{nur } \mathcal{R}^2$$

Es gilt: $\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{x}_P + \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \parallel \mathfrak{n}^0\end{array}}$

1. Der Fußpunkt ergibt sich aus P plus Abstandsvektor.
2. Der Abstandsvektor ist parallel zum Normalenvektor der Geraden



Abstandsberechnungen gehen über die Hessesche Normalform, sofern es für das Objekt eine Hessesche Normalform gibt. Damit ist die Richtung des senkrechten Abstandes eindeutig vorgegeben.
Für Geraden im R^2 gibt es eine Hessesche Normalform

$\mathfrak{d} = (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_P)_{\mathfrak{n}^0}$ — Der Abstandsvektor $\mathfrak{d}$ ist eine Projektion des Verbindungsvektors von P nach F auf den Normaleneinheitsvektor.

$= ((\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_P)\odot\mathfrak{n}^0)\ \mathfrak{n}^0$ — Das Skalarprodukt ist die Projektion eines Vektors auf einen anderen.
Dieser Abstand ist mit der Richtung des Normaleneinheitsvektors zu multiplizieren

$= (d - \boldsymbol{x}_P \odot\mathfrak{n}^0)\ \mathfrak{n}^0$ — Da $\boldsymbol{x}_0$ auf der Ebene liegt, ist $\boldsymbol{x}_0\odot\mathfrak{n} = d$

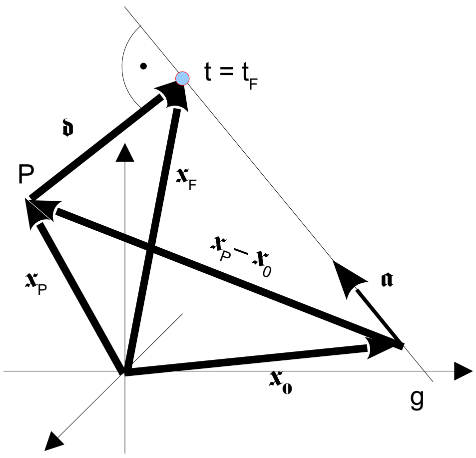
Der Betrag von $\mathfrak{d}$ ist der gesuchte Abstand

3.2. Abstand eines Punktes zu einer Geraden im R^3

3.2.1. Projektion $\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_P$ von auf den Richtungsvektor $\mathfrak{a}$

$$\left.\begin{array}{l} g:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,\mathfrak{a} \\ P:\ \boldsymbol{x}_P \end{array}\right\}\ \mathcal{R}^2 \text{ und } \mathcal{R}^3$$

Es gilt: $\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{x}_P - \mathfrak{d} \\ \boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{x}_0 + t_F\,\mathfrak{a} \\ 0 = \mathfrak{a}\odot\mathfrak{d}\end{array}}$



Im R^3 gibt es für eine Gerade keine einheitliche senkrechte Richtung $\mathfrak{n}$.

Deshalb kann hier nicht mit einem Normalenvektor gearbeitet werden.

Alle Abstandsberechnungen für Geraden im R^3 müssen deshalb über den Fußpunkt gehen.

Für die Bestimmung des Fußpunktes F muss ein Parameter t_F bestimmt werden, der den Richtungsvektor bis zum Fußpunkt verlängert.

1. Variante

$\boldsymbol{x}_P - \mathfrak{d} = \boldsymbol{x}_0 + t_F\,\mathfrak{a} \quad |\odot\mathfrak{a}$ — Der Fußpunkt kann über den Punkt P und über die Gerade ausgedrückt werden. Diese Vektorgleichung kann man skalar mit dem Vektor $\mathfrak{a}$ multiplizieren

$(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)\odot\mathfrak{a} = t_F\,|\mathfrak{a}|^2$ — $|\mathfrak{a}|^2$ ist eine reelle Zahl (kein Vektor) durch die dividiert werden kann

$\boxed{t_F = \dfrac{(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)\odot\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|^2}}$ — Parameter der Geraden zum Fußpunkt

2. Variante

$(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0)_{\mathfrak{a}} = \boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_0 = t_F\,\mathfrak{a}$

Die Projektion des Verbindungsvektors $\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0$ auf die Gerade g ist der Abstand von $\boldsymbol{x}_0$ zum Fußpunkt $\boldsymbol{x}_F$ und damit auch $t_F\,\mathfrak{a}$

$= ((\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \odot \mathfrak{a}^0)\,\mathfrak{a}^0$

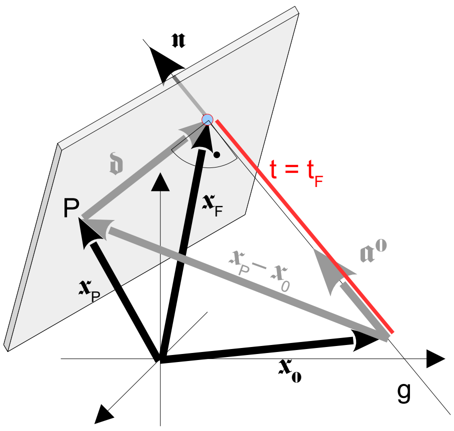
$\Rightarrow \boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{x}_0 + ((\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \odot \mathfrak{a}^0)\,\mathfrak{a}^0$

Die Länge des Abstandes ist $(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \odot \mathfrak{a}^0$ und die Richtung $\mathfrak{a}^0$. Das Ergebnis ist ein Vektor, der von $\boldsymbol{x}_0$ zu $\boldsymbol{x}_F$ zeigt.

3.2.2. Bestimmung des Fußpunktes mittels senkrechter Hilfsebene

Es gilt:

$$\boxed{E:\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_P) \odot \mathfrak{a} = 0}$$



Die Ebene wird in Hessescher Normalform erzeugt, mit dem Aufpunkt P, von dem der Abstand berechnet werden soll und dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ der Geraden als Normalenvektor der Ebene

$((\boldsymbol{x}_0 + t\,\mathfrak{a}) - \boldsymbol{x}_P) \odot \mathfrak{a} = 0$

In diese Ebenengleichung ist für den Vektor $\boldsymbol{x}$ die komplette Geradengleichung einzusetzen.

$\boldsymbol{x}_0 \odot \mathfrak{a} + t\,\mathfrak{a} \odot \mathfrak{a} - \boldsymbol{x}_P \odot \mathfrak{a} = 0$

$t_F\,\mathfrak{a} \odot \mathfrak{a} = (\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \odot \mathfrak{a}$

$$\boxed{t_F = \frac{(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \odot \mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|^2}}$$

Mit Hilfe des Parameter t_F lässt sich der Fußpunkt der Geraden bestimmen.

3.2.3. Bestimmung des Abstandes über Trigonometrie

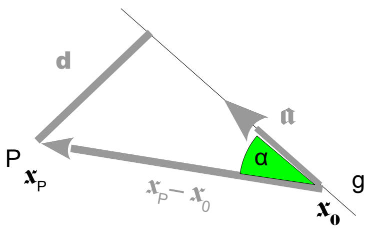
$d = |\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0| \sin\alpha$

Dazu muss man noch nicht einmal den Winkel α berechnen, da nach dem Pythagoras der Trigonometrie gilt:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$d = |\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0| \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$= |\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \odot \mathfrak{a}}{|\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0|\ |a|}\right)^2}$



Grundsätzlich kann man auch davon ausgehen, dass eine Gerade und ein Punkt in einer Ebene liegen. (Konstruktionsmöglichkeit für eine Ebenengleichung). Deshalb wird die Problematik in dieser Ebene betrachtet.

Der Winkel läßt sich aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren a und $\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0$ berech-nen. Der Betrag von $\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0$ ist bekannt. Dann kann man den Abstand d (kein Vektor, nur Maßzahl) über die elementare Trigonometrie berechnen:

3.3. Schnittpunkt zweier Geraden im R^3

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{a}_1$ Parameterform

g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + u\,\mathbf{a}_2$ Parameterform

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}_S &= \mathbf{x}_1 + t_S\,\mathbf{a}_1\\ \mathbf{x}_S &= \mathbf{x}_2 + u_S\,\mathbf{a}_2\end{aligned}} \Rightarrow$$

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems: zwei Gleichung mit zwei Unbekannten

$$\boxed{\mathbf{x}_2 + u_S\,\mathbf{a}_2 = \mathbf{x}_1 + t_S\,\mathbf{a}_1}$$

$$u_S\,\mathbf{a}_2 - t_S\,\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

t_S und u_S sind die Parameter, die in der jeweiligen Geraden zum Schnittpunkt führen

$$\begin{pmatrix} x_{21} + u \cdot a_{21} \\ x_{22} + u \cdot a_{22} \\ x_{23} + u \cdot a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + t \cdot a_{11} \\ x_{12} + t \cdot a_{12} \\ x_{13} + t \cdot a_{13} \end{pmatrix}$$

Nicht alle Geraden im R^3 besitzen einen Schnittpunkt miteinander. Sie sind dann **windschief**. Das macht sich daran bemerkbar, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

Der Geraden-Schnittpunkt-Test:

1. Um zu testen, ob es so einen Punkt gibt, setzt man die beiden Geradengleichungen gleich und schaut, ob eine Lösung gibt.
2. Das Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den zwei unbekannten Parametern lösen
3. Ergebnis: Wenn wir eine Lösung bekommen, schneiden sich die beiden Geraden.
4. Schnittpunktberechnung: Um den Schnittpunkt zu bekommen, muss man einen errechneten Parameter in die entsprechende (wichtig: nicht in die andere!) Geradengleichung einsetzen und erhält damit $\vec{OS}$.

3.4. Schnittwinkel zweier Geraden

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{a}_1$ Parameterform

g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + u\,\mathbf{a}_2$ Parameterform

$$\cos \measuredangle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{\mathbf{a}_1 \odot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\ |\mathbf{a}_2|}$$

Der Winkel zwischen den beiden Geraden ist nichts anderes als der (kleinere) Winkel zwischen den bei Richtungsvektoren

Aufgabe	Lösung	Erläuterung

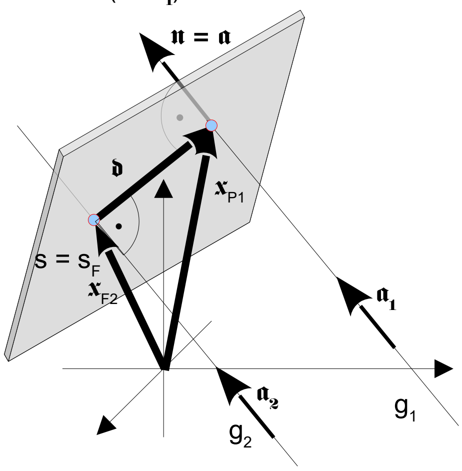
3.5. Abstand zweier Geraden

3.5.1. Abstand paralleler Geraden

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}$
g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + u\,\mathfrak{a}$

Man baut zur Geraden g1 eine senkrechte Hilfsebene auf, wie beim Abstand eines Punktes von einer Geraden. Die Hilfsebene benutzt den Aufpunkt $\mathfrak{x}_1$ von g1 als eigenen Aufpunkt und den Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ als Normalenvektor.
Der Durchstoßpunkt $\mathfrak{x}_{F2}$ der zweiten Geraden g2 durch diese Ebene ist der Fußpunkt des Lotes. Der Abstand zwischen dem Aufpunkt der Ebene und dem Durchstoßpunkt ist der gesuchte Abstand .

E: $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{a} = 0$

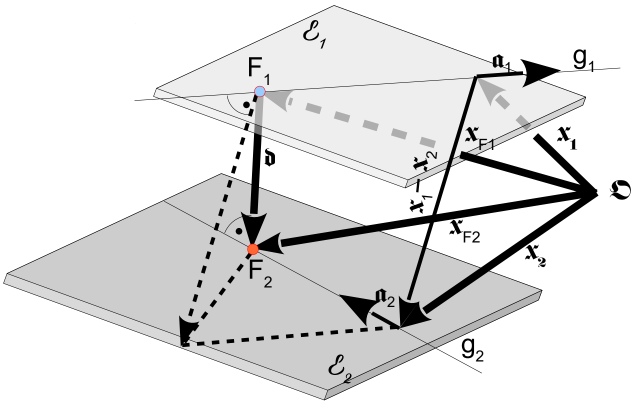


Bei parallelen Geraden kann man davon ausgehen, dass sie den gleichen Richtungsvektor haben, wenn nicht, kann man den gleichen Richtungs-vektor benutzten.

3.5.2. Abstand windschiefer Geraden

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$
g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_2 = 0 \\ E_1 \parallel E_2 \end{array}}$$



$\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$
E1: $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{n} = 0$

Der gesuchte Abstand wird berechnet über den Abstand des Punktes $\mathfrak{x}_1$ zu dieser Ebene. Der Abstandsvektor $\mathfrak{d} = d\,\mathfrak{n}^0$

Zu zwei windschiefen Geraden lassen sich immer zwei Ebenen finden, so dass jede Gerade in einer dieser Ebenen liegt und diese beiden Ebenen **parallel** sind ! Dazu benutzt man für die Ebene jeweils die Darstellung einer Geraden und hängt als zweiten Richtungsvektor den Richtungsvektor der anderen Geraden an.
Parallele Ebenen haben den gleichen Normalenvektor und der ist auch die Richtung des Abstandsvektors.

3.5.3. Fußpunkte des Abstandes windschiefer Geraden

g_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1$
g_2: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x}_{F1} = \mathfrak{x}_1 + t_{F1}\,\mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{x}_{F2} = \mathfrak{x}_2 + s_{F2}\,\mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{x}_{F2} = \mathfrak{x}_{F1} + \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}\odot\mathfrak{a}_2 = 0 \\ E_1 \parallel E_2 \end{array}}$$

Die gesuchten Fußpunkte sind zwei Punkte auf je einer Geraden. Der Abstand ist der Verbindungsvektor zwischen beiden Fußpunkten. Bilde den Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten auf den beiden Geraden:

$$\mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2)$$

Für den gesuchten Abstand muss dieser Differenzvektor senkrecht zu jedem Richtungsvektor sein.

$$[\,\mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2)\,]\odot\mathfrak{a}_1 = 0$$

$$[\,\mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{a}_2)\,]\odot\mathfrak{a}_2 = 0$$

Daraus entsteht ein Gleichungssystem in den Variablen t und s. Die berechneten Werte führen zu den Fußpunkten auf der jeweiligen Geraden.

Die gesuchten Fußpunkte sind diejenigen Punkte auf der Geraden, für die der kürzeste Abstand erreicht wird.
Der Abstandsvektor $\mathfrak{d} = \mathfrak{x}_{F2} - \mathfrak{x}_{F1}$ muss senkrecht auf beiden Richtungsvektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ der Geraden stehen.
Diese Bedingung wird zur Bestimmung der Fußpunkte ausgenutzt.

4. Lagebeziehungen zu Ebenen

$\odot$	Skalarprodukt
x	Vektorprodukt (Kreuzprodukt)
$\mathfrak{d}$	Lotvektor
d(P,g) = $\lvert\mathfrak{d}\rvert$	Abstand des Punktes P zur Ebene E
$\mathfrak{n}$	Normalenvektor der Ebene
$\mathfrak{n}^0$	Normaleneinheitsvektor der Ebene
$\mathfrak{x}_F$	Ortsvektor zum Fußpunkt des Lotes
$t_F\ s_F$	Parameterwert t und s von $\mathfrak{x}_F$ auf der Ebene E

1. Sei die Normalengleichung der Ebene:

$$E: \left[\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\vec{OX} - \vec{OA}} \right] \circ \underbrace{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor } \vec{n}} = 0$$

2. Der Normalenvektor n hat die Länge $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Wir wollen aber einen Normalenvektor, der die Länge eins hat. Den nennen wir **Normaleneinheitsvektor** $\vec{n}^0$. Er berechnet sich wie folgt:

$$n^0 = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{|n|} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

3. Die Hesse-Normalform (HNF) einer Ebene ist damit fertig:

$$E: \left[\vec{OX} - \vec{OA} \right] \cdot \vec{n^0} = 0 \text{ oder}$$

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}}_{OX - OA} \right] \circ \underbrace{\vec{n}^{\,0}}_{\text{Normalen einheitsvektor}} = 0$$

- Mit dieser HNF kann man jeden Abstand *d* eines Punktes zu einer Ebene einfach ausrechnen:

1. Sei ein Punkt P mit den Koordinaten P (p_1, p_2, p_3) gegeben.
2. $\vec{OP}$ statt $\vec{OX}$ in die HNF einsetzten. Der Betrag davon ist der gesuchte Abstand:

$$d(P, E) = (\vec{OP} - \vec{OA}) \circ \vec{n}^0$$

4.1. Abstand eines Punktes zu einer Ebene

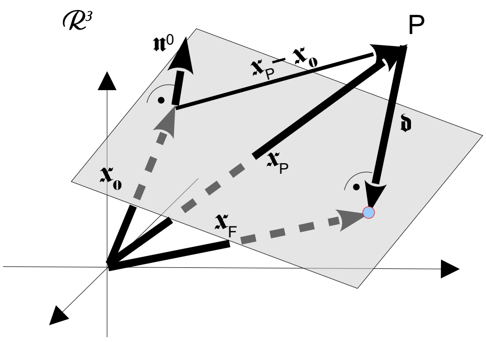
E: $\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = d$ Hessescher Normalform

P: $\mathfrak{x}_P$

Abstandsberechnungen erfolgen grundsätzlich über die HNF oder die Koordinatenform.

Es gilt:

$$\boxed{\begin{matrix} \mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P - \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \parallel \mathfrak{n}^0 \end{matrix}}$$



$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P)_{\mathfrak{n}^0}$$
$$= ((\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P) \odot \mathfrak{n}^0)\, \mathfrak{n}^0$$
$$= (d - \mathfrak{x}_P \odot \mathfrak{n}^0)\, \mathfrak{n}^0$$

Der Abstandsvektor $\mathfrak{d}$ ist die Projektion des Differenzvektors $\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_P$ auf den Einheitsvektor in Normalenrichtung $\mathfrak{n}^0$.

4.2. Abstand Gerade – Ebene

Ebene in Normalform bringen

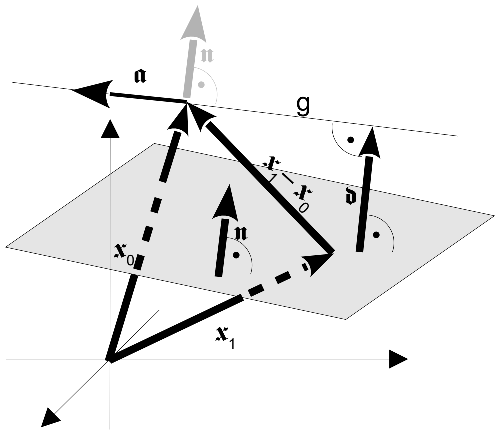
$$\boxed{\begin{matrix} g: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a} \\ E: (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{n}^0 = 0 \end{matrix}}$$

$|\mathfrak{d}| = |(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_1) \odot \mathfrak{n}^0|$

$\quad = |\mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}^0 - d\,|$

(Die Richtung von $\mathfrak{d}$ ist $\mathfrak{n}$)

$\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|\, \mathfrak{n}^0$



Ein Abstand zwischen Geraden und Ebene ist nur dann berechenbar, wenn die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

Jeder Punkt der Geraden hat dann den gleichen Abstand von der Ebene.

Man benutzt den Aufpunkt der Geraden, um den Abstand eines Punktes zu einer Ebene zu berechnen. Dieser ist gleich dem Abstand der Geraden.

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

4.3. Durchstoßpunkt Gerade – Ebene

$g: \; \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$

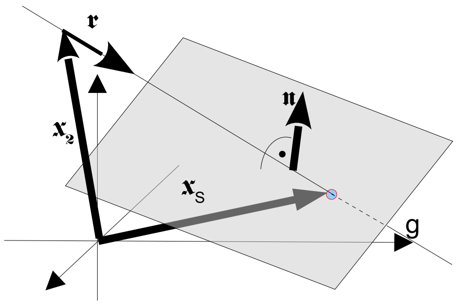
$E: \; \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D$

$$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n} \begin{cases} = 0 & \begin{cases} \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n} = D & g \subset E \quad \text{Gerade liegt in der Ebene} \\ \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n} \neq D & g \parallel E \quad \text{Gerade parallel zur Ebene} \end{cases} \\ \neq 0 & g \text{ schneidet } E \end{cases}$$

4.3.1. Ebene in Parameterdarstellung

$E: \; \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$

$g: \; \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + u\,\mathfrak{r}$



Lösung durch Gleichungssystem:

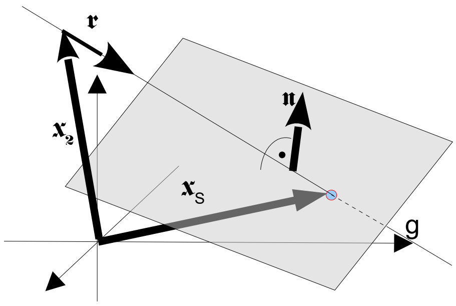
$$\mathfrak{x}_2 + u\,\mathfrak{r} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$$

$$u\,\mathfrak{r} - t\,\mathfrak{a} - s\,\mathfrak{b} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$$

Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Eindeutige Lösung gegeben, da $\mathfrak{r}$ keine Linearkombination von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$

4.3.2. Ebene in Normalenform

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x}_S = \mathfrak{x}_0 + t_S\,\mathfrak{r} \\ \mathfrak{x}_S \odot \mathfrak{n} = D \end{array}}$$



Ein Punkt, der sowohl auf der Ebene, wie auf der Gerade liegen soll, muss beide Gleichungen erfüllen. Damit kann man für diesen einen Punkt die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen, da dieser Geradenpunkt auch ein Ebenenpunkt ist.

$$\mathfrak{x}_S \odot \mathfrak{n} = (\mathfrak{x}_0 + t_S\,\mathfrak{a}) \odot \mathfrak{n}$$

$$= \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n} + t_S\,\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n} = D$$

$$\Rightarrow t_S = \frac{D - \mathfrak{x}_0 \odot \mathfrak{n}}{\mathfrak{a} \odot \mathfrak{n}}$$

Der berechnete Parameterwert t_S ist in die Geradengleichung einzusetzen und liefert die Koordinaten des Schnittpunktes

4.4. Schnittwinkel Gerade – Ebene

$g: \; \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$

$E: \; \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n} = D$

$$\cos \measuredangle(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}) = \frac{\mathfrak{n} \odot \mathfrak{a}}{|\mathfrak{n}|\,|\mathfrak{a}|}$$

Anschließend ist der ermittelte Winkel von 90^0 zu subtrahieren, da bei der Ebenen mit dem Normalenvektor und nicht mit Richtungsvektoren gearbeitet wurde

4.5. Schnittgerade Ebene – Ebene

E_1: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_1 = D_1$ Hessesche Normalform
E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$ Hessesche Normalform

$\mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2 \begin{cases} = \mathfrak{o} & \mathfrak{n}_1^0 = \mathfrak{n}_2^0 \begin{cases} D_1 = D_2 & E_1 \equiv E_2 \quad \text{Ebene identisch} \\ D_1 \neq D_2 & E_1 \parallel E_2 \quad \text{Ebene parallel} \end{cases} \\ \neq \mathfrak{o} & E_1 \text{ schneidet } E_2 \end{cases}$

4.5.1. Beide Ebenen in Normalenform

E_1: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_1 = D_1$
E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

1. Variante

$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_1 = x\, n_{11} + y\, n_{12} + z\, n_{13} = d_1$
$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_2 = x\, n_{21} + y\, n_{22} + z\, n_{23} = d_2$

Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems:
2 Gleichung , 3 Unbekannten
1 wahlfreier Parameter

2. Variante

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ergibt sich aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren der Ebenen:
$\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2$
da der Richtungsvektor in beiden Ebenen liegen muss.
Ein Punkt aus der Schnittgeraden muss beide Ebenengleichungen erfüllen:
$\mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{x} \odot \mathfrak{n}_2$
$\mathfrak{x} \odot (\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2) = 0$
das ist im allgemeinen eine Gleichung mit drei Variablen. Da sind zwei frei wählbar und die dritte ist zu bestimmen. Das Ergebnis ist ein Ortsvektor zu einem Geradenpunkt.

4.5.2. Eine Ebene in Parameterdarstellung, eine Ebene in Normalenform

E_1: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$
E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

(I) Berechne einen gemeinsamen Punkt

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{x}_P = \mathfrak{x}_1 + t_P\,\mathfrak{a} + s_P\,\mathfrak{b} \\ \mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{n}_2 = D_2 \end{array}}$$

Einsetzen der ersten Ebenengleichung in die zweite.
$\mathfrak{x}_P\odot\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2 + t_P\,\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2 + s_P\,\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$
Ergibt 1 Gleichung mit 2 Unbekannten

1. Variante

$\mathfrak{a} \odot\mathfrak{n}_2 \neq 0$
setze $s_P=0$

$\Rightarrow t_P = \dfrac{D_2 - \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2}$

2. Variante

$\mathfrak{b} \odot\mathfrak{n}_2 \neq 0$
setze $t_P=0$

$\Rightarrow s_P = \dfrac{D_2 - \mathfrak{x}_1\odot\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{b}\odot\mathfrak{n}_2}$

(II) Berechne den Richtungsvektor

$\mathfrak{r} = \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2 = (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2) - \mathfrak{n}_2(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{b})$

$$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{n}_2) - \mathfrak{n}_2\,(\mathfrak{a}\odot\mathfrak{b})}$$

$\Rightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_P + k\,\mathfrak{r}$

Hier ist vielleicht die Umrechnung der ersten Ebene in die Normalendarstellung sinnvoller. Dann die Berechnung wie unter 4.5.1 durchführen

Aufgabe	**Lösung**	**Erläuterung**

4.5.3. Beide Ebenen in Parameterform

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_1 + u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1\\ \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2 + r\,\mathfrak{b}_2\end{aligned}}$$

Gleichsetzen der beiden Ebenengleichungen

$$\mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{a}_2 + r\,\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{x}_1 + u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1$$

$$t\,\mathfrak{a}_2 + r\,\mathfrak{b}_2 - u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$$

Gleichungssystem 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten: t, r, u, v.

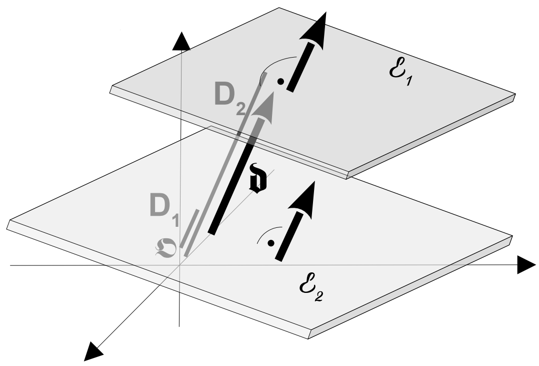
Die Lösung führt zu einer Parameterlösung, die geometrisch eine Gerade darstellt. Das ist die Schnittgerade.

4.6. Abstand paralleler Ebenen

E_1: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_1^0 = d_1$
E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2^0 = d_2$

Es gilt: $\boxed{\mathfrak{n}_1^0\times\mathfrak{n}_2^0 = \mathfrak{O}}$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir: $\mathfrak{n}_1^0 = \mathfrak{n}_2^0$ (Parallele Ebenen haben identische Normaleneinheitsvektoren)



$|\mathfrak{d}| = |\,d_1 - d_2|$
$\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|\,\mathfrak{n}_1^0$

Der Abstand ist die Differenz der beiden d Werte auf der rechten Seite, der Abstandsvektor hat die Richtung des Normalenvektors.

4.7. Schnittwinkel zweier Ebenen

E_1: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_1 = D_1$
E_2: $\mathfrak{x}\odot\mathfrak{n}_2 = D_2$

$$\cos\measuredangle(\mathfrak{n}_1,\mathfrak{n}_2) = \frac{\mathfrak{n}_1^0\odot\mathfrak{n}_2^0}{|\mathfrak{n}_1^0|\;|\mathfrak{n}_2^0|}$$