Mathematatik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grundlagen Geometrie

Die Axiome des Euklid

Über zweitausend Jahre lang wurde Geometrie nach axiomatischen Aufbau des Euklid gelehrt. Axiome sind ***nicht beweisbare Grundsätze***, von denen man ausgehen muss, um die Theorie zu entwickeln. Alle Aussagen der Theorie müssen auf diese Aussagen zurückzuführen sein.
Grundelemente der euklidischen Geometrie der Ebene sind Punkte und Geraden welche Punkte verbinden. Geraden wiederum schneiden sich in Punkten. Aus diesen Grundelementen entsteht eine Geometrie in der u.a. Dreiecke, Vierecke, n-Ecke, Winkel und Kreise enthalten sind.

Die fünf Euklidischen Axiome der Geometrie sind:

- Man kann eine gerade Strecke von einem Punkt zu einem anderen Punkt ziehen.
- Man kann eine Strecke kontinuierlich zu einem Strahl verlängern.
- Um jeden Punkt kann man einen Kreis beliebigen Radiuses schlagen.
- Alle rechten Winkel sind einander gleich.
- (**Parallelenaxiom**): Wenn eine Strecke zwei andere Strecken derart schneidet so dass die beiden inneren Schnittwinkel auf der einen Seite zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind dann schneiden sich die beiden Strecken wenn sie weit genug verlängert werden auf der Seite auf der die Schnittwinkel zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind.

Seit der Antike wurde versucht das 'unbeholfen' erscheinende Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen herzuleiten. Erst im 19. Jahrhundert entdeckten Carl Friedrich Gauß, János Bolyai und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski unabhängig von einander die nichteuklidische und die absolute Geometrie . Rieman führte dann die Überlegungen von Gauss zur Perfektion.

Erstere ersetzt das Parallelenaxiom durch andere Axiome letztere arbeitet ganz ohne das Konzept von Parallelen.
Solche Geometrien gibt es tatsächlich. Das einleuchtendste Beispiel ist die Geometrie auf unserer Erdoberfläche. Hier wirken die Gesetze der euklidischen Geometrie nicht mehr.

Heutiges modernes Axiomensystem

1. Axiom: Inzidenzaxiom.
Es gibt Punkte und Geraden; jede Gerade ist eine Teilmenge der Punktmenge. Durch je zwei verschiedene Punkte P und Q gibt es genau eine Gerade; diese Gerade bezeichnen wir mit PQ. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

2. Axiom: Linealaxiom.
Je zwei Punkten P, Q ist ihr Abstand PQ zugeordnet; PQ ist eine reelle Zahl mit folgenden Eigenschaften:
a) $|PQ| = 0$, $|PQ| = 0$ genau dann, wenn $P = Q$;
b) $|PQ| = |QP|$;
c) $|PQ| = |PR| + |RQ|$; Dies ist die sogenannte Dreiecksungleichung.
Wir fordern weiterhin, dass jede nichtnegative reelle Zahl auch als Abstand vorkommen kann

3. Axiom: Axiom von Pasch. *(Moritz Pasch, 1843 - 1930).*
Sei ΔABC ein Dreieck, und sei g eine Gerade, die keine Ecke des Dreiecks enthält. Dann gilt: Wenn g eine Seite des Dreiecks ΔABC trifft, dann trifft g genau eine weitere Seite von ΔABC .

4. Axiom: Geodreieckaxiom.
Jedem Winkel $\measuredangle RST$ wird ein Winkelmaß $|\measuredangle RST|$ zugeordnet. Dies ist ein e reelle Zahl x mit x zwischen $0 < x < 180$. Diese Zuordnung hat die folgenden beiden Eigenschaften:
(1) Seien g eine Gerade, R und S zwei Punkte auf g, und H eine der beiden Halbebene H(P, g), $p \notin g$. α sei eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Dann gibt es einen Punkt T in H(P, g) so dass der Winkel $\measuredangle RST$ genau das Maß α hat.
(2) Sei U ein Punkt im Inn ern des Winkels RST. Dann ist $|\measuredangle RST| = |\measuredangle TSU| + |\measuredangle USR|$.

5. Axiom: Kongruenzaxiom.
Es gilt der Kongruenzsatz SWS.

6. Axiom:Parallelenaxiom.
Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g mit $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h durch P, die keinen Pun kt mit g gemeinsam hat („parallel“ zu g ist).

7.Axiom:
Kongruente Flächen haben den gleichen Flächeninhalt:
a) $F1 \cong F2 \Rightarrow |F1| = |F2|$
b) Ist eine Fläche in n Teilflächen F_1 F_2, ... F_n zerlegt, so gilt:
$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$

Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Grundlagen Geometrie Treff Lernen CHRISTINA STRAUCH	**Begriffe der Geometrie** **Definition:** Gegeben sind drei verschiedene Punkte P, R, Q auf einer Geraden. Wir sagen, R liegt dann **zwischen** P und Q, wenn gilt: PQ = PR + RQ . Wir schreiben dann P-R-Q. **Definition:** Seien A und B zwei verschiedene Punkte. Dann besteht die **Strecke** [AB] aus den Punkten A und B und allen Punkten der Geraden AB, die zwischen A und B liegen. Unter einem **Strahl** [AB verstehen wir die Punkte A und B, sowie alle Punkte X zwischen A und B und alle Punkte Y für die gilt, dass B zwischen A und Y liegt. **Definition:** Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, dann bezeichnen wir mit **Dreieck ABC** oder ABC die Punktmenge mit den **Ecken** A, B, C und den Seiten [AB], [BC], [CA]. ABC = [AB] [BC] [CA]. Die Seiten eines Dreiecks sind also Strecken und keine Geraden. **Definition:** Seien A, B zwei Punkte der Ebene, g eine Gerade der Ebene mit A g und B g. A und B liegen **auf derselben Seite** von g, wenn [AB] n g = { }. Unter einer offenen Halbebene H(g, A g) verstehen wir die Menge aller Punkte der Ebene, die mit A auf derselben Seite von g liegen. **Definition:** Seien R, S und T drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist der **Winkel** RST die Vereinigung der Strahlen [SR und [ST, das heißt: RST = [SR [ST. Man nennt S den **Scheitel** und [SR und [ST die **Schenkel** des Winkels ∡RST. Wenn wir die Ebene noch orientieren, d. h. einen Umlaufsinn dreier Punkte festlegen, die nicht auf einer Geraden liegen, dann können wir auch von einem orientierten Winkel sprechen und zwischen ∡ RST und ∡ TSR unterscheiden. In einem Dreieck ABC können wir die Winkel übersichtlich und kurz bezeichnen: Winkel eines Dreiecks, ∡ A ist der Winkel ∡ BAC, B = ∡ ABC, C = ∡ BCA. Man nennt ∡ A den „Winkel bei A“ und spricht von den Winkeln ∡ A, ∡ B, ∡ C des Dreiecks △ ABC.	**Definition:** Wir nennen zwei Strecken **kongruent**, wenn sie gleich lang sind; zwei Winkel heißen kongruent, wenn sie das gleiche Maß haben. Zum Beispiel sind alle Winkel vom Maß 30° kongruent. **Definition.** Seien △ABC und △ A’B’C’ Dreiecke. Wir sagen, dass △ABC und △A’B’C’ **kongruent** sind (und schreiben dafür △ABC ≅ △A’B’C’), falls folgende Aussagen gelten: $\|AB\| = \|A'B'\|$, $\|BC\| = \|B'C'\|$, $\|CA\| = \|C'A'\|$ und $\|\measuredangle A\| = \|\measuredangle A'\|$, $\|\measuredangle B\| = \|\measuredangle B'\|$, $\|\measuredangle C\| = \|\measuredangle C'\|$.

Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Grundlagen Geometrie	siehe unten	siehe unten

Gesetze und Regeln

Kreis und Gerade

Geometrische Ortslinien:

(1) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die durch zwei gegebene Punkte A und B laufen, ist die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.

(2) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die eine Gerade g im Punkt $P \in g$ berühren, ist die Senkrechte zu g in P.

(3) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei sich schneidende Geraden berühren, ist das zugehörige Winkelhalbierendenpaar.

(4) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei parallele Geraden berühren, ist die Mittelparallele.

(5) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit konstantem Radius r, die eine gegebene Gerade g berühren, ist das Parallelenpaar zu g im Abstand r.

(6) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller gleich langen Sehnen des Kreises k ist ein zu k konzentrischer Kreis.

Kreis und Winkel

Geometrische Ortslinien:

(1) Der geometrische Ort für alle Punkte, von denen aus eine Strecke unter dem gleichen Winkel (Sehwinkel) erscheint, ist das Kreisbogenpaar über dieser Strecke, das diesen Winkel als Peripheriewinkel hat.

(2) Der geometrische Ort für alle Punkte, von denen aus eine gegebene Strecke unter einemWinkel von 90^0 erscheint, ist der Thaleskreis über dieser Strecke.

Kreis und Kreis

Geometrische Ortslinien:

(1) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis um M in einem Kreispunkt P berühren, ist die Gerade MP.

(2) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit festem Radius r durch einen gegebenen Punkt P ist der Kreis um P mit Radius r.

(3) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit festem Radius r, die einen gegebenen Kreis um M mit Radius ro berühren, ist das Paar konzentrischer Kreise mit den Radien $r_0 + r$ und $r_0 - r$.

(4) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene konzentrische Kreise um M mit den Radien r_1 und r_2 berühren, ist der zu beiden Kreisen konzentrische Kreis mit dem Radius $0{,}5(r_1 + r_2)$.

Musterbeispiele

Kreis und Gerade

Grundkonstruktionen:

(1) Konstruiere von einem Punkt P die Tangenten an den Kreis k, wobei zu unterscheiden ist, ob P im oder auf dem Kreis oder außerhalb des Kreises ist.

(2) Konstruiere diejenigen Kreise, die eine gegebene Gerade g berühren und durch einen gegebenen Punkt P verlaufen. Es werden die Fälle P auf g oder P nicht auf g unterschieden. Die zusätzliche Vorgabe des Kreisradius führt zu einer weiteren Fallunterscheidung.

Kreis und Winkel

Grundkonstruktion:

Konstruiere die Menge aller Punkte, von denen aus eine Strecke unter einem festen Winkel erscheint.

Kreis und Kreis

Grundkonstruktion:

Konstruiere zu zwei gegebenen Kreisen alle gemeinsamen Tangenten (Fallunterscheidung).

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Grund-konstruktionen		

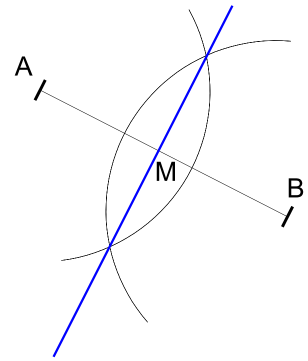
Spezielle geometrische Konstruktionen

Punktmengen in der Ebene, die eine bestimmte Eigenschaft E besitzen heißen **geometrischer Ort** zur Eigenschaft E

Die Mittelsenkrechte

Die Menge aller Punkte P, die von zwei Punkten A und B den gleichen Abstand haben, ist die **Mittelsenkrechte** m_{AB}.

Umkehrung: Alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten liegen haben zu zwei Punkten A und B den gleichen Abstand.



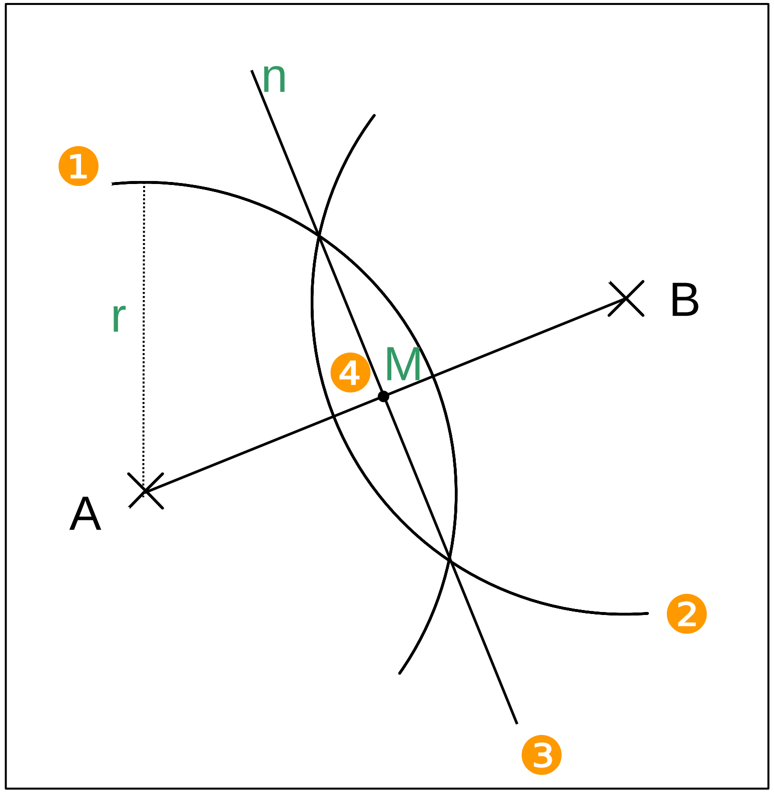
Konstruktion

(1) Zeichne die Strecke AB;

(2) Wähle einen Radius r und beschreibe damit um die Endpunkte A und B Kreisbögen;

(3) Ziehe durch die Schnittpunkte der beiden Kreisbögen 1 und 2 die Mittelsenkrechte n, die die Strecke AB in zwei gleiche Teile teilt.

(4) Der Schnittpunkt M der Strecke AB mit der Mittelsenkrechten n halbiert die Strecke AB



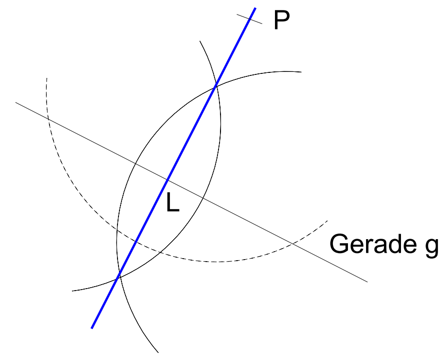
Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Grund-konstruktionen

Das Lot auf eine Gerade fällen

Gegeben sei ein Punkt P und eine Gerade g. Dann gibt es eine Gerade l durch P, die senkrecht auf g steht. Die Gerade l ist eindeutig bestimmt.
Die Gerade l heißt **Lot** durch P auf g.
Der Schnittpunkt F von l mit g heißt **Lotfußpunkt**.



Definition:
Seien ein Punkt P und eine Gerade g gegeben. Sei l das Lot durch P auf g mit dem Lotfußpunkt F. Die Länge der Strecke [PF] heißt Abstand des lPFl
d(P,g):= lPFl heißt **Abstand des Punktes P von g** .

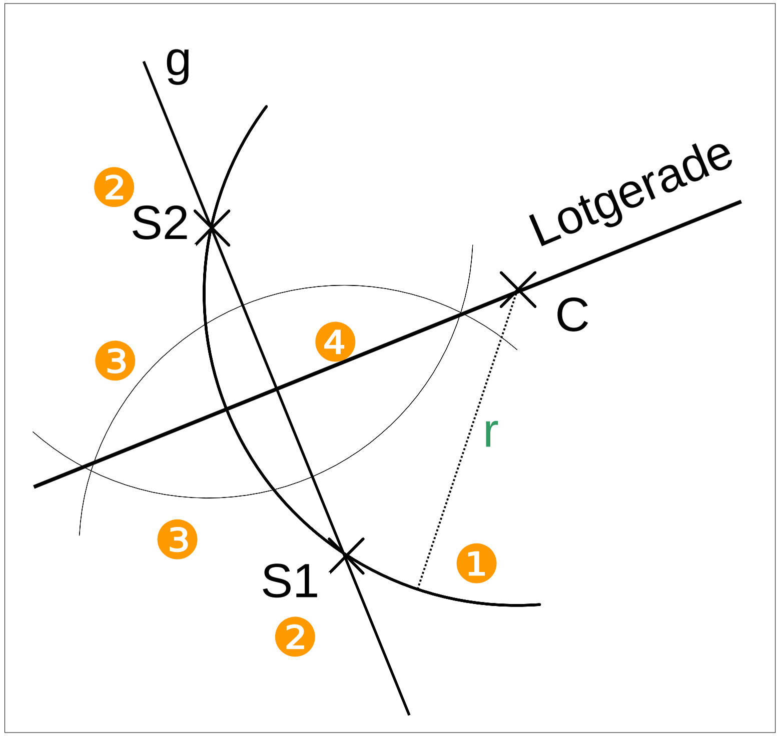
Konstruktion

(1) Ziehe um den Punkt C einen Kreis, dessen Radius so groß ist, dass er die Gerade g schneidet.

(2) Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden g werden mit S1 und S2 bezeichnet.

(3) Ziehe um die beiden Schnittpunkte S1 und S2 jeweils einen Kreis

(4) Die Lotgerade ist die Mittelsenkrechte zwischen diesen beiden Schnittpunkten. Sie schneidet g im Lotfußpunkt L. Der gesuchte Abstand ist dann PL .



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

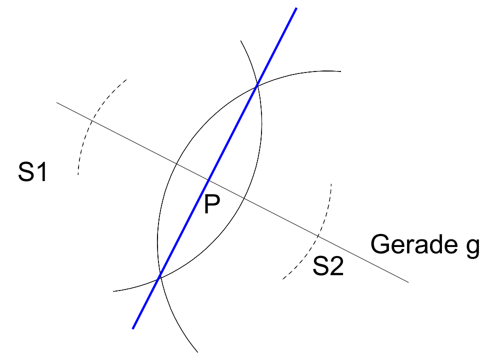
Grund-konstruktionen

Das Lot auf einer Gerade errichten

Auf einer Geraden g soll in einem Punkt P das Lot errichtet werden. Dieses Lot ist eine Senkrechte zu g im Punkt P. Der Grundgedanke der Konstruktion ist, auf der geraden eine Strecke zu erzeugen von der der Punkt P der Mittelpunkt ist. In diesem Punkt ist dann die Mittelsenkrechte der Strecke zu konstruieren.

Konstruktion

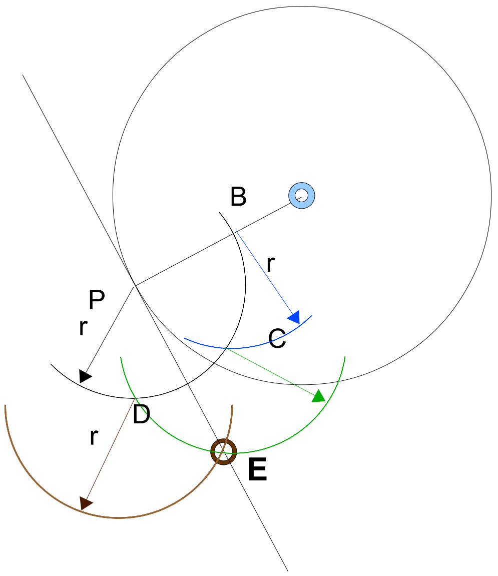
(1) Ziehe um den Punkt C einen Kreis, dessen Radius so groß ist, dass er die Gerade g schneidet.
(2) Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden g werden mit S1 und S2 bezeichnet.
(3) Ziehe um die beiden Schnittpunkte S1 und S2 jeweils einen Kreis
(4) Die Lotgerade ist die Mittelsenkrechte zwischen diesen beiden Schnittpunkten. Sie schneidet g im Lotfußpunkt L. Der gesuchte Abstand ist dann PL .



Das Lot am Ende einer Strecke errichten

Die beiden bisherigen Konstruktionen gehen davon aus, dass das Lot in der Mitte einer Strecke erzeugt wird. Was ist aber zu tun wenn man am ende einer Strecke eine Senkrechte errichten will.

(1) Schlage um den Punkt P willkürlich einen Kreis, der die Strecke des Radius im Punkt B scheidet. (schwarzer Kreis)
(2) Von B aus wird mit dem gleichen Radius ein Kreisbogen geschlagen, der mit dem ersten einen Schnittpunkt C liefert. (blauer Kreis)
(3) Der Punkt C ist der Mittelpunkt für einen weiteren Kreis, der den ersten Kreisbogen schneiden muss. Dieser Punkt wird mit D bezeichnet. (grüner Kreis).
(4) Schlage um D einen Kreisbogen und erzeuge einen Schnittpunkt E mit dem zuletzt gezeichneten (grünen) Kreis.
(5) Die Verbindungslinie von P und E bildet eine Senkrechte zum Radius und damit eine Tangente an P



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Grund-konstruktionen		

Die Winkelhalbierende

Die Menge aller Punkte P, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h den gleichen Abstand haben, besteht aus den zwei **Winkelhalbierenden** zu g und h.

ACHTUNG! Es ist eindeutig bewiesen, dass eine Dreiteilung eines Winkels nicht konstruierbar ist.

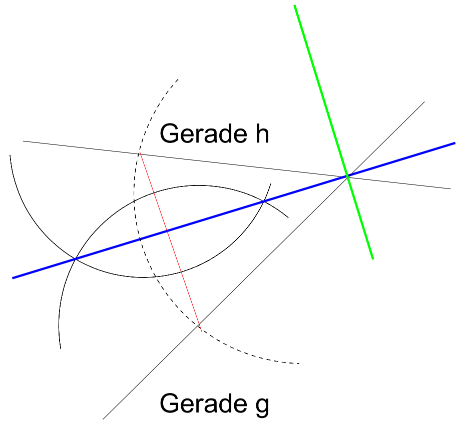
Konstruktion

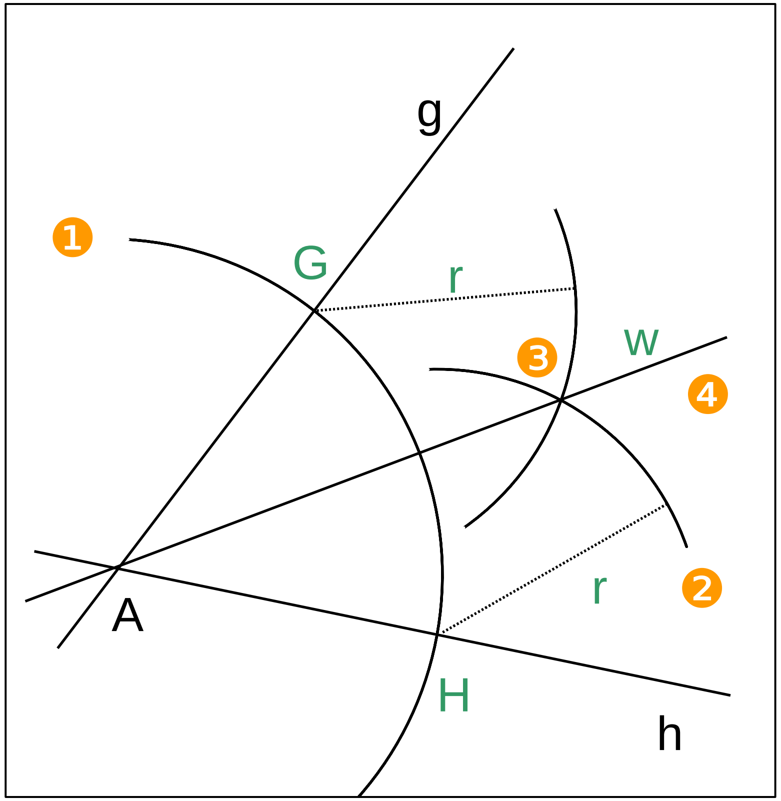
(1) Zeichne den Winkel α;

(2) Beschreibe um A mit einem beliebigen Radius r einen Kreisbogen;

(3) Beschreibe um die beiden Schnittpunkte G und H auf den beiden Schenkeln des Winkels Kreisbögen mit r, die sich in 3 schneiden;

(4) Zeichne von A aus durch 3 die Winkelhalbierende w.





Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: Grund-konstruktionen

Dreiteilung eines rechten Winkels

ACHTUNG! Es ist eindeutig bewiesen, dass eine Dreiteilung eines Winkels nicht konstruierbar ist. Eine Ausnahme bildet der rechte Winkel, für diesen ist eine Dreiteilung konstruierbar.

Konstruktion

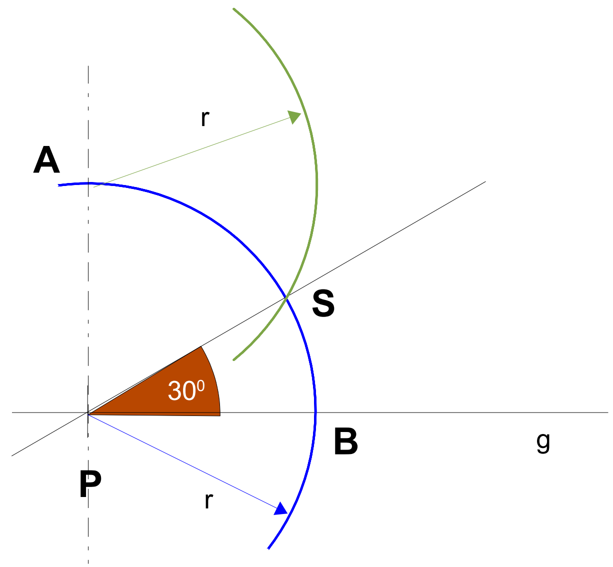
(1) Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P auf dieser Geraden

(2) Errichte in P die Senkrechte zur Geraden g (Konstruktion hier nicht ausgeführt, siehe Mittelsenkrechte)

(3) Schlage um P einen beliebigen Kreisbogen, der g (in B) und die Senkrechte zu g (in A) schneidet (blauer Kreis)

(4) Schlage um den Schnittpunkt mit der Senkrechten (A) einen Kreis mit dem gleichen Radius.

(5) Der Schnittpunkt der beiden Kreise (S) verbunden mit dem Punkt P liefert einen Gerade im Winkel von 30^0 zur Geraden g



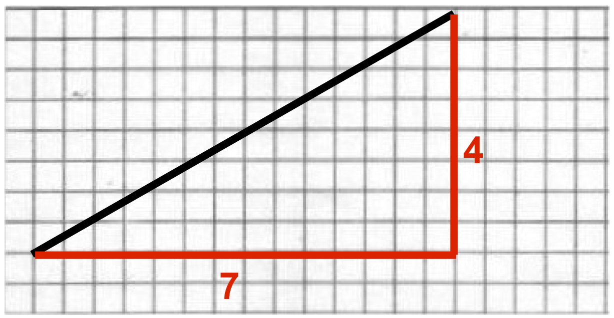
Mit dieser Konstruktion lassen sich dann auch Winkel von der Größe 60^0 oder 15^0, oder auch 75^0 konstruieren, einschließlich der Winkel im 2., 3. oder 4. Quadranten:

60^0 : Zeichne den zweiten Kreis nicht um A, sondern um B; oder konstruiere die Winkelhalbierende von 30^0 und 90^0.

15^0 : Ist die Winkelhalbierende von 30^0

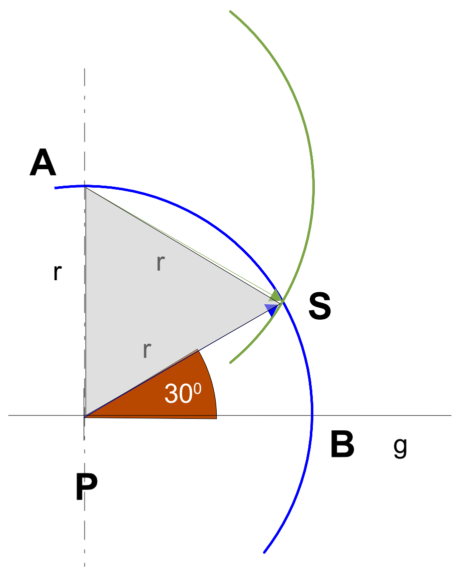
75^0 : Ist die Winkelhalbierende von 60^0 und 90^0

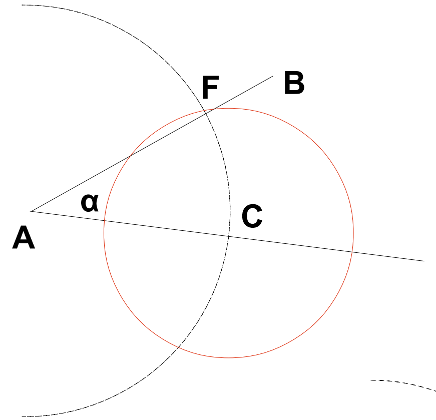
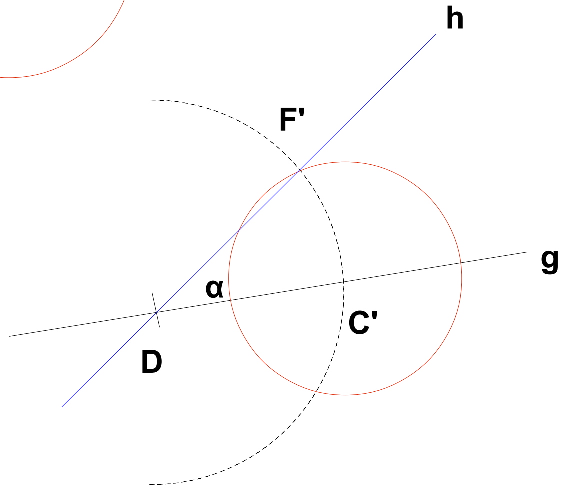
Soll man einen Winkel von 300 zeichnen und man hat gerade keinen Winkelmesser zur Hand, dann geht auf kariertem Papier auch folgender Trick:



Das Verhältnis 4:7 liefert nicht exakt den Wert für 30^0, aber im Rahmen der Zeichengenauigkeit völlig ausreichend.

Konstruktionsbeweis:
Die Konstruktion liefert in PAS ein gleichseitiges Dreieck, dessen Innenwinkel alle 60^0 sind.
Damit ist der Differenzwinkel zum rechten Winkel 30^0



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Grund-konstruktionen	**Übertragen eines Winkels** Gegeben ist der Winkel ∡CAB und die Gerade g. Zu konstruieren ist eine Gerade h, so dass der Schnittwinkel zwischen g und h die gleiche Größe wie der Winkel ∡CAB hat. Die Konstruktion basiert letztenendes auf der Übertragung eines Dreiecks. **Konstruktion** (1) Zeichne um A einen kreis mit einem beliebigen Radius. Dieser Kreis schneided die beiden Schenkel in den Punkten C und F. (2) Zeichne einen Kreis um D mit dem gleichen Radius. Dadurch entsteht zunächst nur der Punkt C'. (3) Zeichne von C aus einen Kreisbogen, der den anderen Schenkel des Winkles genau in F schneidet. (4) Trage von C' aus den gleichen Kreisbogen ab. (5) Der Schnittpunkt der beiden Kreisbögen ist der gesuchte Punkt F' (6) Die Verbindungslinie zwischen D und F' ist die gesuchte Gerade mit dem gleichen Winkel	 

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

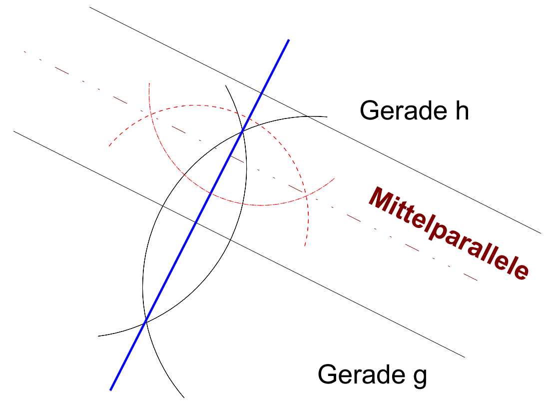
Grund-konstruktionen

Die Mittelparallele

Die Menge aller Punkte P, die von zwei parallelen Geraden g und h den gleichen Abstand haben, ist die **Mittelparallele** zu g und h.

Konstruktion

Man konstruiert die Mittelparallele, indem man zu einer Geraden die Senkrechte errichtet (blaue Linie), die dann auch senkrecht zur zweiten Geraden ist. Von der senkrechten Geraden (blaue Linie) benutzt man die beiden Schnittpunkte mit den Parallelen. Um diese Schnitt-punkte schlägt man Kreisbögen (rote gestrichelte Linie). Damit erhält man eine Senkrechte, die gleichzeitig Mittelparallele der Ausgangsgeraden ist.



Teilung einer Strecke

Konstruktion

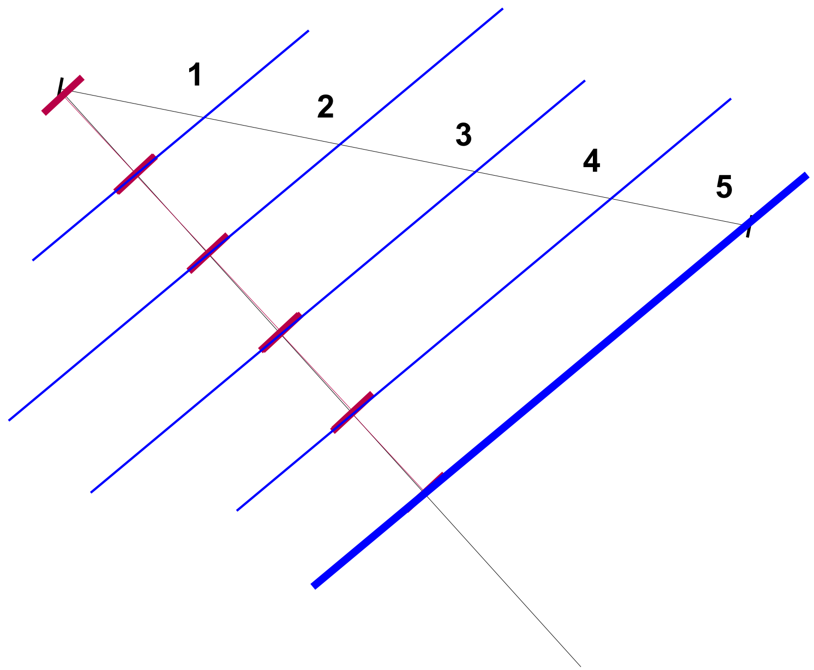
(1) Zeichne die Strecke **AB**;

(2) Zeichne von A aus unter einem beliebigen Winkel (<90°) einen Strahl;

(3) Trage auf diesem Strahl von A aus fünf gleichlange Teilstrecken ab, deren gleiche Länge beliebig ist;

(4) Verbinde den letzten Teilungspunkt 5' mit B;

(5) Zeichne zu dieser Verbindungsgeraden Parallelen durch die anderen Teilungspunkte, wodurch die Strecke **AB** in fünf gleichlange Teile geteilt wird.



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Grund-konstruktionen	**Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks**	

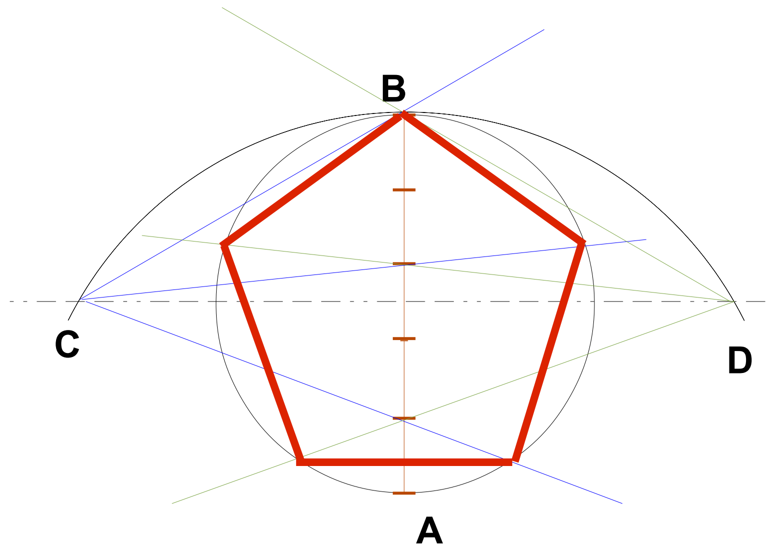
Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks

(1) Schlage um den Punkt A des gegebenen Kreises einen Kreisbogen mit dem Radius AB, der die waagerechte Achse in C und D schneidet

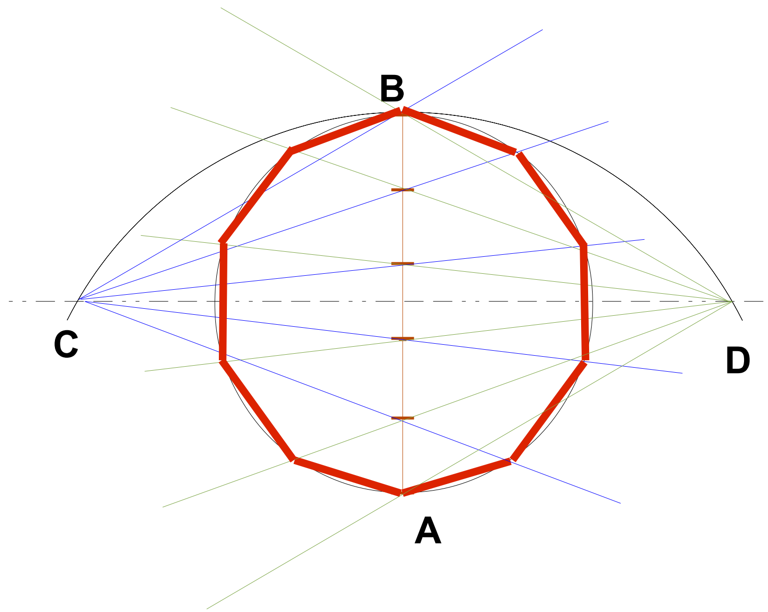
(2) Teile den Durchmesser AB in n gleiche Teile (hier: fünf)

(3) Zeichne von C und D aus Strahlen durch die ungeraden Teilungspunkte (beginnend bei A=0: 1, 3, 5=B)

(4) Verbinde die entsprechenden Punkte miteinander, um das regelmäßige n-Eck zu erhalten. (Es sind jeweils die von C und D auf dem gegenüberliegenden Kreisbogen liegenden Schnittpunkte)



Um ein n-Eck mit einer geraden Anzahl von Ecken zu bekommen, reicht es, wenn man bei der Unterteilung der Strecke AB die halbe Anzahl abträgt, dafür dann nicht jeden zweiten Teilungspunkt verbindet, sondern jeden Teilungspunkt .



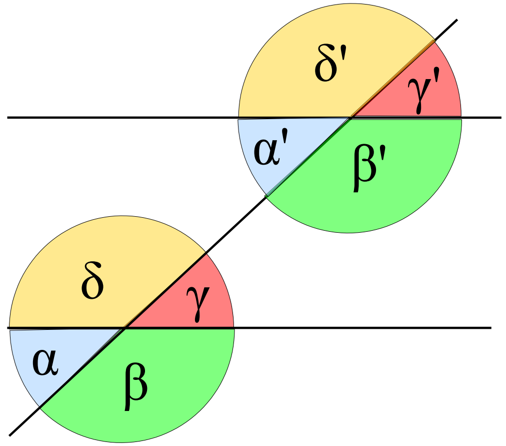
Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Winkelbeziehungen

Winkel an geschnittenen Parallelen

- Nebenwinkel ergänzen sich zu 180^0
- Schneidet eine Gerade zwei Parallelen, dann sind die Stufenwinkel gleich groß.
- Umkehrung: Schneidet eine Gerade zwei andere Geraden und die Stufenwinkel sind gleich groß, dann die die beiden Geraden parallel.



Nebenwinkel
(ergänzen sich zu 180^0)

$\alpha+\beta = 180^0$ $\gamma+\beta = 180^0$
$\alpha+\delta = 180^0$ $\gamma+\delta = 180^0$
$\alpha'+\beta' = 180^0$ $\gamma' + \delta' = 180^0$

Scheitelwinkel
(sind gleich)
$\alpha = \gamma$
$\beta = \delta$
$\alpha' = \gamma'$
$\beta' = \delta'$

Stufenwinkel
F-Winkel
(sind gleich)

$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$
$\delta = \delta'$

Äußere Wechselwinkel
Z-Winkel
(sind gleich)
$\alpha = \gamma'$
$\beta = \delta'$

Innere Wechselwinkel
Z-Winkel
(sind gleich)
$\gamma = \alpha'$
$\delta = \beta'$

Nachbarwinkel
E-Winkel
(ergänzen sich zu 180^0)
$\alpha' = \delta$
$\beta' = \gamma$

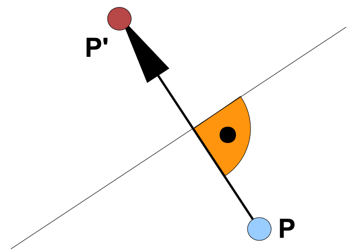
Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Abbildungen

Achsenspiegelung

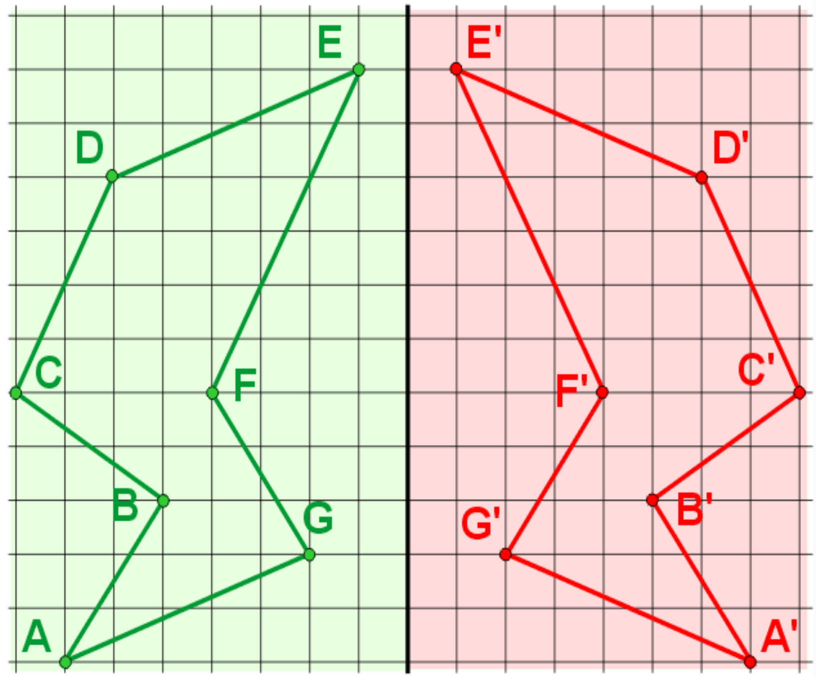
Grundeigenschaft:
Sind P und P’ symmetrisch bezüglich der Achse a, dann steht die Verbindungsstrecke [PP’] senkrecht auf der Achse und wird von dieser halbiert.



Abbildungsvorschrift

Bei gegebener Achse a wir jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P´ auf folgende Weise zugeordnet:

- **Falls P $\notin$ a, liegt der Bildpunkt P’ so, dass [PP’] von der Achse a rechtwinklig halbiert wird.**
- **Falls P $\in$ a ist, gilt P = P’.**



Eigenschaften

- Längentreu
  Urbildstrecke und Bildstrecke sind bei Achsenspiegelung immer gleich lang
- Paralleltreu
  Sind Urbildlinien parallel zueinander, dann sind auch die Bildlinien parallel zueinander
- Winkeltreu
  Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich groß
- Orientierungsumkehr
  Der Drehsinn wird bei der Achsenspiegelung umgekehrt
- Fixpunkte
  Alle Punkte auf der Achse, und nur diese, sind Fixpunkte und werden auf sich selbst abgebildet.
- Fixfiguren
  Eine Figur, die bei einer Achsenspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt achsensymmetrisch und sind Fixfiguren der Achsenspiegelung. Die Achse und alle senkrechten Geraden sind Fixgeraden

Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Abbildungen

Punktspiegelung

Grundeigenschaft:
Die Verbindungsstrecke zweier zueinander symmetrischer Punkte wird vom Symmetriezentrum halbiert.
Jede Punktspiegelung kann durch zwei Achsenspiegelungen an zueinander senkrechten Geraden a und b mit Schnittpunkt S ersetzt werden.
Die Punktspiegelung ist der Spezialfall einer **Drehung** um 180⁰.

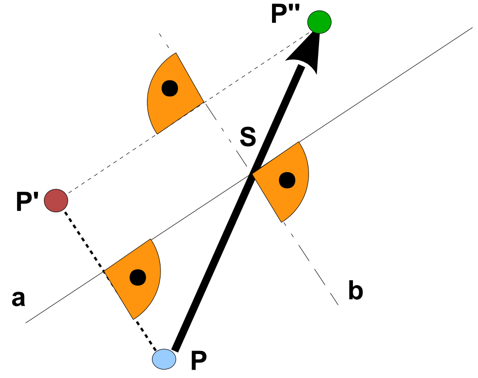
Abbildungsvorschrift

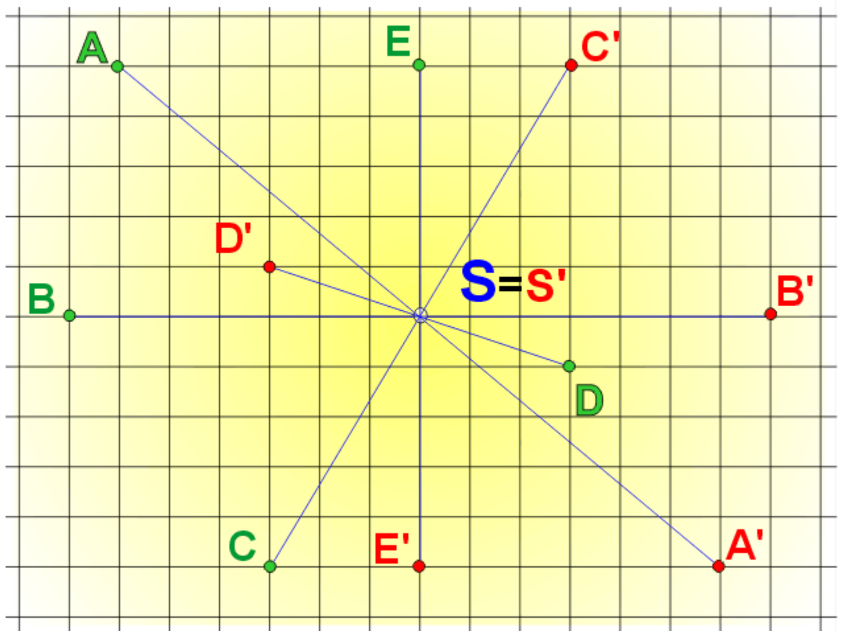
Bei gegebenem Zentrum S wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P’ so zugeordnet:

- **Für P ≠ Z wird die Verbindungsstrecke zwischen P und P´ vom Zentrum Z halbiert.**
- **Z wird auf sich selbst abgebildet.**

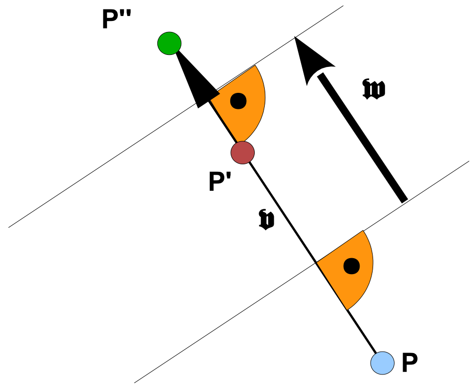
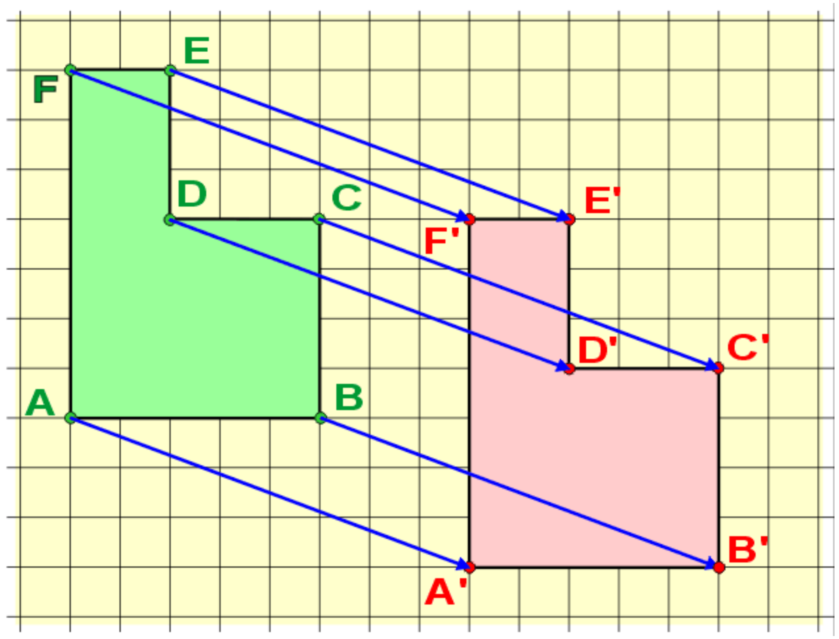
Eigenschaften

- Längentreu
  Urbildstrecke und Bildstrecke sind immer gleich lang
- Paralleltreu
  Sind Urbildlinien parallel zueinander, dann sind auch die Bildlinien parallel zueinander
- Winkeltreu
  Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich groß
- Orientierungstreu
  Der Drehsinn bleibt bei der Punktspiegelung erhalten
- Fixpunkte
  Der Spiegelpunkt S ist der einzige Fixpunkt
- Fixfiguren
  Eine Figur, die bei einer Punktspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt punktsymmetrisch und sind Fixfiguren der Punktspiegelung





Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Abbildungen	**Verschiebung** Grundeigenschaft: jeder Bildpunkt liegt im selben Abstand und in der selben Richtung von seinem Urbild entfernt. Eine Verschiebung um die Länge w kann ersetzt werden durch eine doppelte **Achsenspiegelung** an parallelen Geraden. Der Schubvektor v steht senkrecht zu den Achsen und hat die doppelte Länge des Abstands w zwischen den beiden Parallelen. **Eigenschaften** - Längentreu Urbildstrecke und Bildstrecke sind immer gleich lang - Paralleltreu Sind Urbildlinien parallel zueinander, dann sind auch die Bildlinien parallel zueinander - Winkeltreu Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich groß - Orientierungstreu Der Drehsinn bleibt bei der Verschiebung erhalten - Fixpunkte Es gibt keine Fixpunkte - Fixfiguren Alle Parallelen (Geraden, nicht Strecken) zum Verschiebungspfeil sind Fixfiguren	 

Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Abbildungen		

Drehung

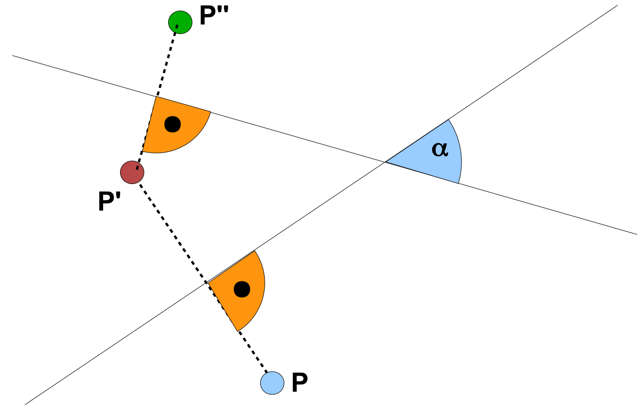
Grundeigenschaft:
Urbildpunkt und Bildpunkt liegen im selben Abstand vom Drehzentrum Z auf Strahlen,die in Z um den Drehwinkel α gedreht wurden.

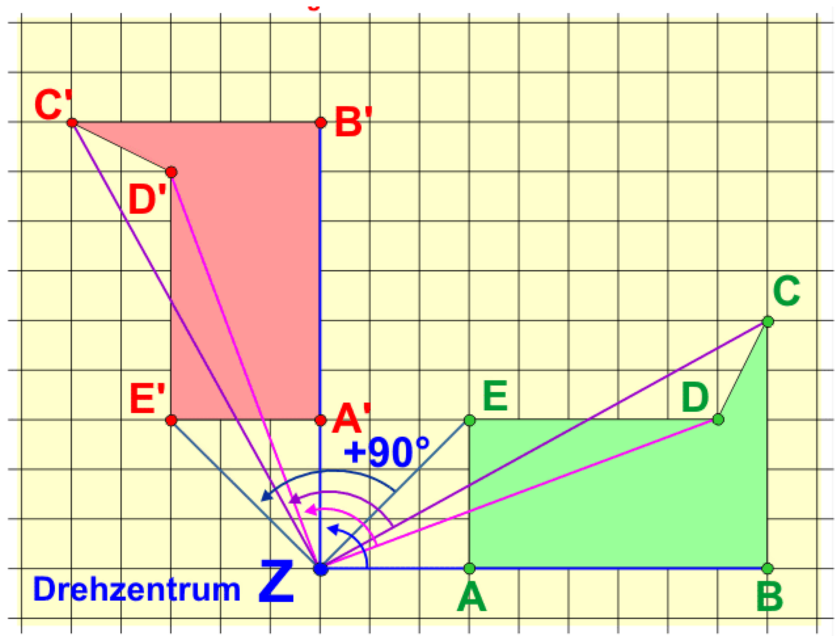
Eine Drehung um S lässt sich ersetzen durch eine Doppelspiegelung an zwei Geraden, die sich in S schneiden. Der Winkel β zwischen den Spiegelgeraden ist halb so groß wie der Winkel α .

Eine Drehung um 180° um den Punkt S nennt man **Punktspiegelung** an S.

Eigenschaften

- Längentreu
  Urbildstrecke und Bildstrecke sind immer gleich lang
- Paralleltreu
  Sind Urbildlinien parallel zueinander, dann sind auch die Bildlinien parallel zueinander
- Winkeltreu
  Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich groß
- Orientierungstreu
  Der Drehsinn bleibt bei der Drehung erhalten
- Fixpunkte
  Das Drehzentrum Z ist der einzige Fixpunkt
- Fixfiguren
  Alle Kreise um das Drehzentrum sind Fixfiguren.





Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Abbildungen 	Die Verkettung von drei Achsenspiegelungen ist genau dann wieder eine Achsenspiegelung, wenn die drei Achsen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben oder zueinander parallel sind. Die Verkettung von drei Achsenspiegelungen, deren Achsen nicht parallel und sich in keinem gemeinsamen Punkt schneiden, ist stets eine Gleitspiegelung.	

Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Schrägbilder

Schrägbilder

Die Grundlage für das Zeichnen von Schrägbildern bildet das Zeichnen von senkrechten Linien in einem Rechteck, die räumlich „nach hinten „ verlaufen.
Die häufig verwendete drei – dimensionale Darstellung verwendet die sogenannte „Kavalierperspektive“, die Linien, die in den Hintergrund verlaufen in einem Winkel von 45 und einer Verkürzung um die Hälfte zeichnen.
Alle anderen Linien können nur aus Verbindungen von Punkten bestehen, die auf dieser Grundlage entstanden sind. Linien die im Original nicht rechtwinklig verlaufen sind nicht konstruierbar. Aus diesem Grund ist es mitunter notwendig, dass Hilfslinien erzeugt werden, die zu den vorgegebenen Linien rechtwinklig verlaufen.
Damit ist das Zeichnen eines Rechtecks der Prototyp alle Schrägbilder

Rechteck

Zeichne das Rechteck in der originalen Größe.

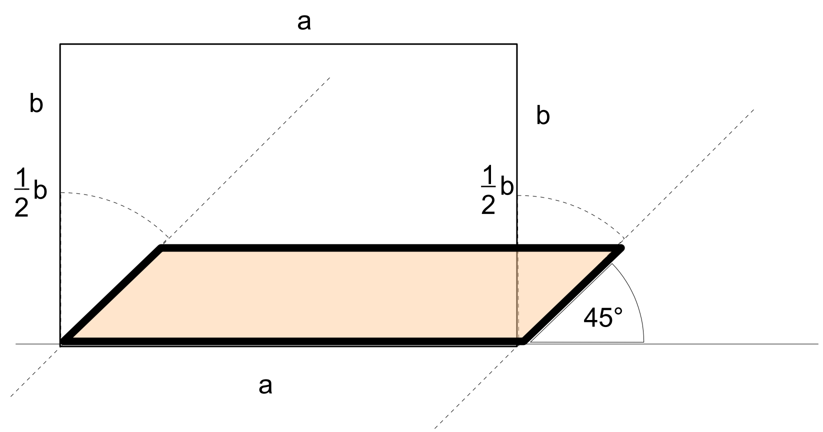
Verlängern die unterer Kante mit einer dünnen Linie entweder nach rechts oder nach links.

Messen in dieser Richtung mithilfe dieser Linien von jedem Eckpunkt aus einen Winkel von 45 Grad ab und zeichnen entsprechende Hilfslinien.

Teilen die Länge der Rechteckhöhe, also der Kanten, die später nach hinten verlaufen, durch zwei.

Steche mit dem Zirkel im Eckpunkt ein und übertage die Länge auf die beiden 45 geneigten schrägen Linien.

Verbinden diese vier Punkte zu einem Viereck (Parallelogramm).



Treff Lernen
Christina Strauch

Mathematik – Intensivkurs: Allgemeine Geometrie		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**

Schrägbilder

Dreieck

Ein Dreieck besteht aus einer Grundseite und zwei schrägen Dreiecksseiten. Diese lassen sich nicht ohne weiteres als Schrägbild zeichnen. Gesucht sind Linien, die senkrecht zur Grundseite verlaufen. Eine Linie, die senkrecht zur Grundlinie verläuft ist die Höhe auf diese Seite.

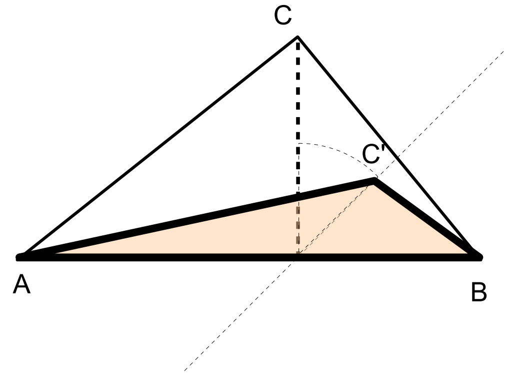
Zeichne das Dreieck in Originalgröße

Zeichne die Höhe auf die Grundlinie

Trage am Schnittpunkt der Höhe mit der Grundlinie die Hilfslinie von 45° an

Übertrage die halbe Höhe des Dreiecks auf diese Hilfslinie.

Die Verbindung der beiden Endpunkte der Grundlinie mit dem übertragenen dritten Punkt des Dreiecks liefert das perspektivische Dreieck



Trapez

Auf der Grundlage der Konstruktion für eine Dreieck kann man die Konstruktion für ein Trapez durchführen. In einem Trapez kann man in den beiden Eckpunkten der kleineren Seiten jeweils die Höhe des Trapezes einzeichnen. Beide Höhen werden nach der Konstruktionsvorschrift für Dreieckshöhen bearbeitet. Die beiden neuen Punkte liefern das gesuchte Trapez.

Die Verbindungslinie C'D' ist ebenfalls parallel zu AB !

Die Länge von C'D' ist genau so lang, wie CD !