

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Ähnlichkeit

**■ Ähnlichkeitsabbildungen**

Ebene Figuren heißen einander **ähnlich**, wenn

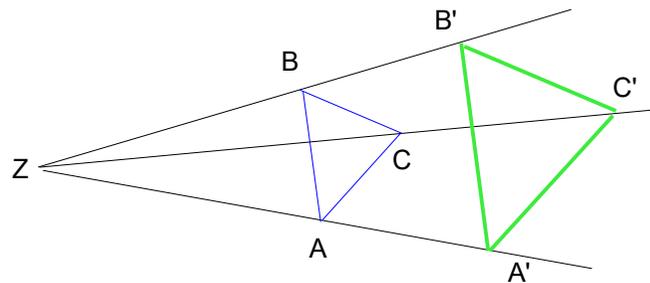
- entsprechende Strecken parallel verlaufen,
- entsprechende Streckenlängen im gleichen Verhältnis stehen
- die Winkel zwischen den Strecken gleich groß sind

Ähnlichkeitsabbildungen können durch ein Strahlenbündel dargestellt werden. Der allen Strahlen gemeinsame Punkt Z heißt Zentrum der Ähnlichkeitsabbildung.

**● Zentrische Streckung**

Die wichtigste Ähnlichkeitsabbildung ist die zentrische Streckung. Zentrische Streckung ist bestimmt durch einen Zentrumspunkt Z und einer geometrischen Figur, die durch die Strahlenbündel mit ihren Eckpunkten verbunden ist.

gegeben: A, B, C  
Z und damit  
die Längen  
ZA, ZB, ZC



Der **Streckungsfaktor k** verschiebt die Punkte A, B und C entlang der Strahlen in die Punkte A', B' und C'. Dabei gelten folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
 ZA' &= k \cdot ZA & \Rightarrow & \frac{ZA'}{ZA} = k \\
 ZB' &= k \cdot ZB & \Rightarrow & \frac{ZB'}{ZB} = k \\
 ZC' &= k \cdot ZC & \Rightarrow & \frac{ZC'}{ZC} = k
 \end{aligned}
 \Rightarrow \frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZC'}{ZC}$$

- für  $1 < k$  bewirkt eine Streckung
- für  $0 < k < 1$  bewirkt eine Stauchung
- für  $-1 < k < 0$  bewirkt eine Stauchung und Punktspiegelung an Z
- für  $k < -1$  bewirkt eine Streckung und Punktspiegelung an Z

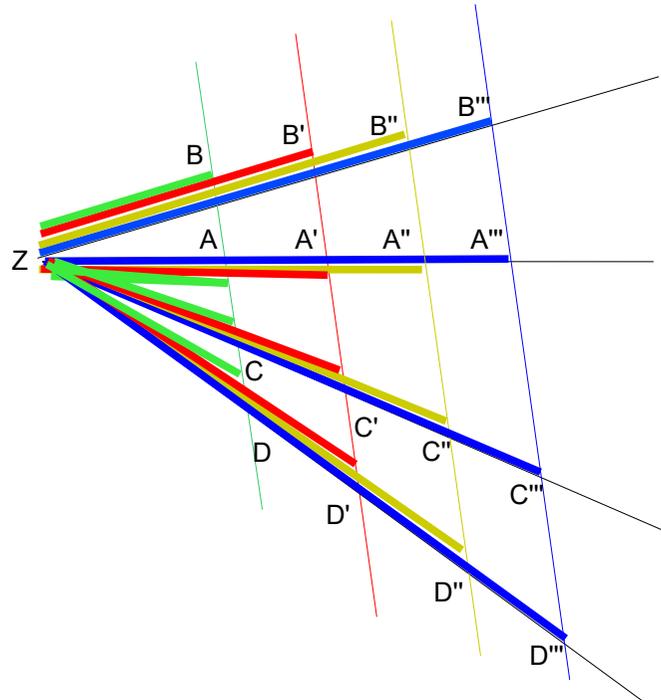
# Mathematik – Intensivkurs: Ähnlichkeit

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<b>Ähnlichkeit</b>	<p style="text-align: center;"><b>● Strahlensätze</b></p> <p style="text-align: center;"><b>★ 1. Strahlensatz</b></p> <p>Werden von einem Punkt Z ausgehende Strahlen von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf einem Strahl, wie die zugehörigen Abschnitte auf den anderen Strahlen</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZA'}{ZA}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZA'}{ZA}</math> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZB'}{BB'} = \frac{ZA'}{AA'}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZB'}{BB'} = \frac{ZA'}{AA'}</math> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{BB'}{AA'} = \frac{ZB}{ZA}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{BB'}{AA'} = \frac{ZB}{ZA}</math> </div> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-bottom: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZA'}{ZA}</math> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-bottom: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZB'}{BB'} = \frac{ZA'}{AA'}</math> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{BB'}{AA'} = \frac{ZB}{ZA}</math> </div> </div>

# Mathematik – Intensivkurs: Ähnlichkeit

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

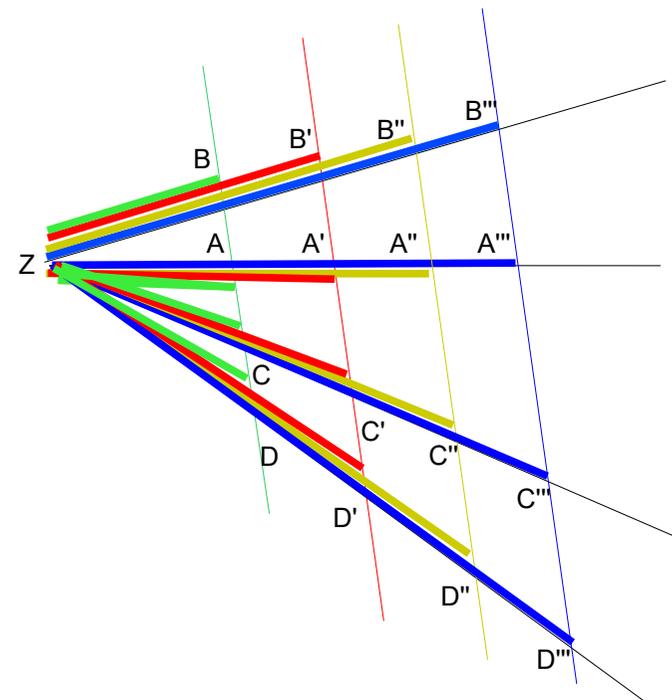
Ähnlichkeit



$$\frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZC'}{ZC} = \frac{ZD'}{ZD}$$

$$\frac{ZB''}{ZB} = \frac{ZA''}{ZA} = \frac{ZC''}{ZC} = \frac{ZD''}{ZD}$$

$$\frac{ZB'}{ZB''} = \frac{ZA'}{ZA''} = \frac{ZC'}{ZC''} = \frac{ZD'}{ZD''}$$



$$\frac{ZB}{BA} = \frac{ZB'}{B'A'} = \frac{ZB''}{B''A''} = \frac{ZB'''}{B'''A'''}$$

$$\frac{ZA}{AD} = \frac{ZA'}{A'D'} = \frac{ZA''}{A''D''} = \frac{ZA'''}{A'''D'''}$$

$$\frac{ZD}{AD} = \frac{ZD'}{A'D'} = \frac{ZD''}{A''D''} = \frac{ZD'''}{A'''D'''}$$

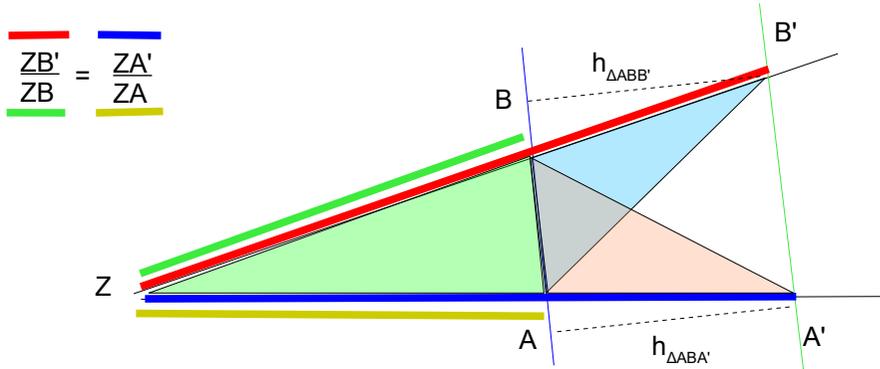
© Dipl.-Math.  
Armin Richter

# Mathematik – Intensivkurs: Ähnlichkeit

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

## Ähnlichkeit

### ★ Beweis des 1. Strahlensatzes



Die beiden Dreiecke sind flächengleich, da sie die gleiche Grundseite AB besitzen und die gleiche Höhe.



Die Fläche des Dreiecks sei hier mit den Betragstrichen gekennzeichnet.

$$|\Delta ABB'| = |\Delta ABA'| \quad (1)$$

Dann kann man aber auch auf beiden Seiten dieser Gleichung die Fläche des Dreiecks  $\Delta ZBA$  dazu addieren:

$$|\Delta ABA'| + |\Delta ZBA| = |\Delta ABB'| + |\Delta ZBA|$$

Das entspricht genau den Flächen der beiden größeren Dreiecke  $\Delta ZBA'$  und  $\Delta ZB'A'$ :

$$\overset{\textcircled{1}}{|\Delta ZBA'|} = \overset{\textcircled{2}}{|\Delta ABA'| + |\Delta ZBA|} = \overset{\textcircled{4}}{|\Delta ABB'| + |\Delta ZBA|} = \overset{\textcircled{3}}{|\Delta ZB'A'|} \quad (2)$$

Division durch  $|\Delta ZBA'|$

$$\overset{\textcircled{1}}{\frac{|\Delta ZBA'|}{|\Delta ZBA'|}} = \overset{\textcircled{3}}{\frac{|\Delta ABA'|}{|\Delta ZBA'|} + \frac{|\Delta ZBA|}{|\Delta ZBA'|}} = \overset{\textcircled{4}}{\frac{|\Delta ABB'|}{|\Delta ZBA'|} + \frac{|\Delta ZBA|}{|\Delta ZBA'|}} = \overset{\textcircled{2}}{\frac{|\Delta ZB'A'|}{|\Delta ZBA'|}}$$

Die Zähler von ① und ② sind gleich, wegen Gleichung (2)

Die Zähler von ③ und ④ sind gleich, wegen Gleichung (1)

Damit müssen auch die verbleibenden Quotienten gleich sein:

$$\frac{|\Delta ZBA|}{|\Delta ZBA'|} = \frac{|\Delta ZBA|}{|\Delta ZB'A'|} (= |\Delta ZBA'|)$$

Die Fläche eines Dreiecks ist genau die Hälfte des Produktes aus einer Grundseite und der zugehörigen Höhe. Als Höhen dienen hier die gepunkteten Linien. Damit ergibt sich:

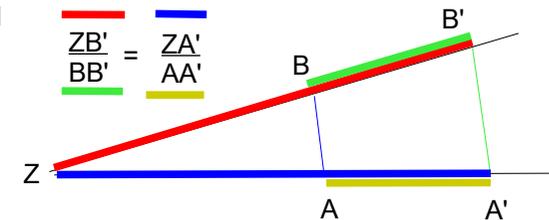
$$\frac{1}{2} |ZA| |BC| = \frac{1}{2} |ZB| |AD|$$

$$\frac{1}{2} |ZA'| |BC| = \frac{1}{2} |ZB'| |AD|$$

Und gekürzt  $\frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|ZB|}{|ZB'|}$

(Die Brüche sind genau der Kehrwert der Formel vom Beginn)

#### Zweiter Teil



Wir betrachten die Kehrwerte der Behauptung

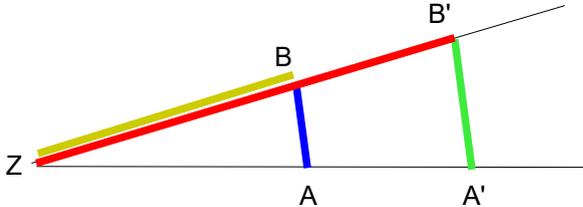
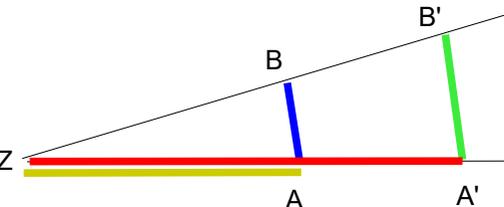
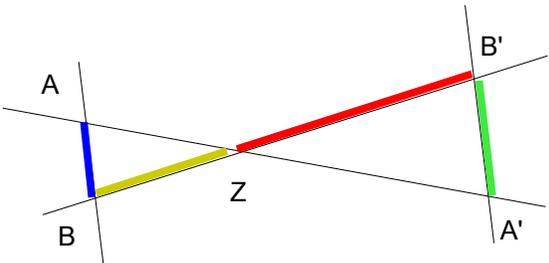
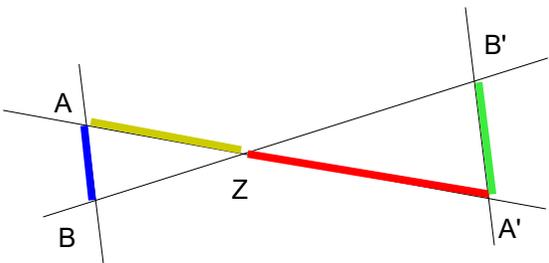
$$\frac{AA'}{ZA} = \frac{ZA' - ZA}{ZA} = \frac{ZA'}{ZA} - 1 = \frac{ZB'}{ZB} - 1 = \frac{ZB' - ZB}{ZB} = \frac{BB'}{ZB}$$

Das wurde im Teil 1 bewiesen

#### Dritter Teil

Die dritte Aussage ist eine Folgerung aus den ersten beiden.

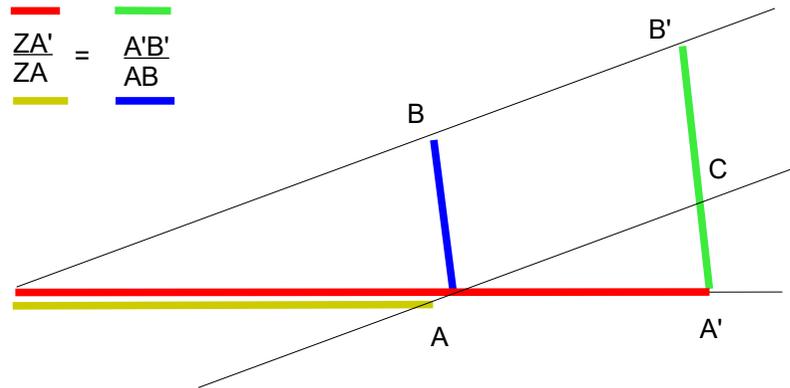
# Mathematik – Intensivkurs: Ähnlichkeit

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<b>Ähnlichkeit</b>	<p>★ 2. Strahlensatz</p> <p>Werden von einem Punkt Z ausgehende Strahlen von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die von Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf den Strahlen.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZB'}{ZB} = \frac{A'B'}{AB}</math> </div>  </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZA'}{ZA} = \frac{A'B'}{AB}</math> </div>  </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-bottom: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZB'}{ZB} = \frac{A'B'}{AB}</math> </div>  </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{ZA'}{ZA} = \frac{A'B'}{AB}</math> </div>  </div>

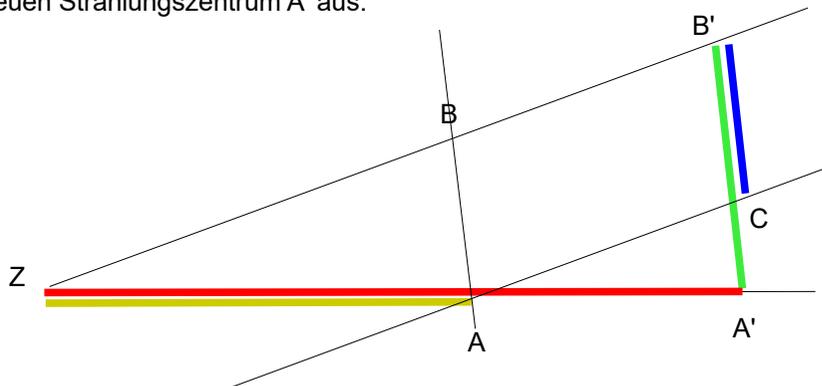
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Ähnlichkeit

★ Beweis des 2. Strahlensatzes



Man zeichnet eine Parallele zu  $ZB'$  durch  $A$  und betrachte die neue Figur vom neuen Strahlenszentrum  $A'$  aus.



Da hier  $CB'$  und  $AB$  als Gegenseiten eines Parallelogramms gleich lang sind, gilt :

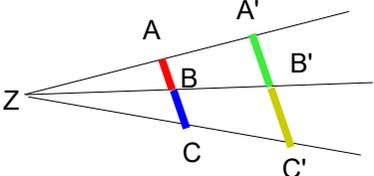
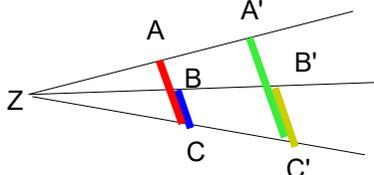
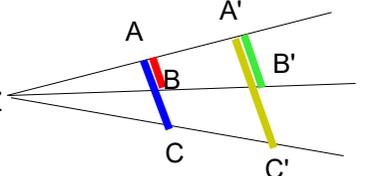
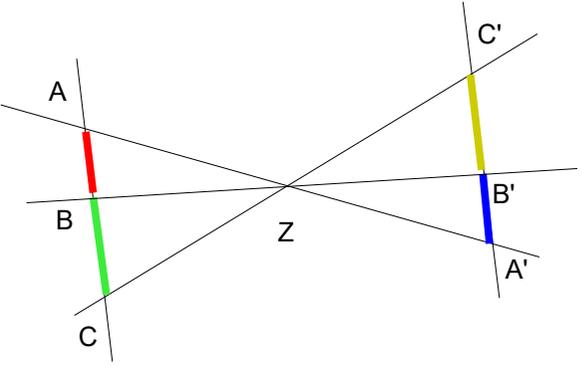
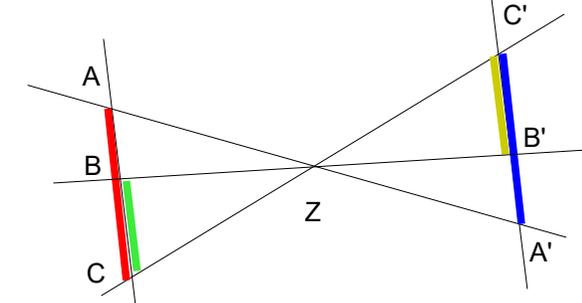
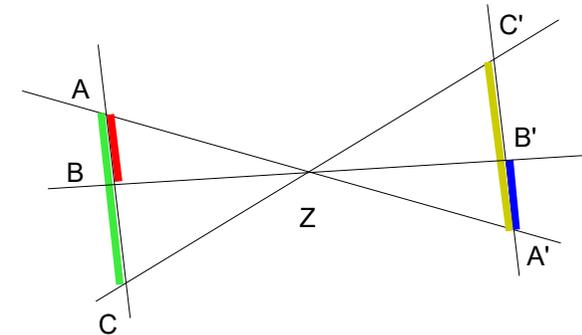
$$\frac{ZA}{ZA'} = \frac{AZ}{A'Z} = \frac{CB'}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Bezeichner  
gedreht

Nach 1.  
Strahlen  
satz

Parallelogramm

# Mathematik – Intensivkurs: Ähnlichkeit

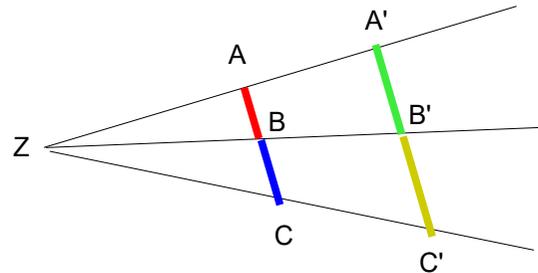
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<b>Ähnlichkeit</b>	<p style="text-align: center;">★ 3. Strahlensatz</p> <p>(Der dritte Strahlensatz ist eine Schlussfolgerung aus den ersten beiden und wird deshalb nicht immer als eigener Strahlensatz aufgeführt.)                      Werden von einem Punkt Z ausgehende Strahlen von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Parallelen wie die Abschnitte auf der anderen Parallelen</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}</math> </div>  </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}</math> </div>  </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}</math> </div>  </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}</math> </div>  </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}</math> </div>  </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}</math> </div>  </div>
	<p>Alle Aussagen der drei Strahlensätze gelten für beliebig viele Strahlen und beliebig viele Geraden.</p>	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Ähnlichkeit

★ Beweis des 3. Strahlensatzes

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$



Nach 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{ZB}{ZB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

2. Strahlensatz

$$\frac{ZB}{ZB'} = \frac{BC}{B'C'}$$

2. Strahlensatz

Die linken Seiten der beiden Gleichungen sind gleich:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Umgeschrieben nach den Regeln der Bruchrechnung:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

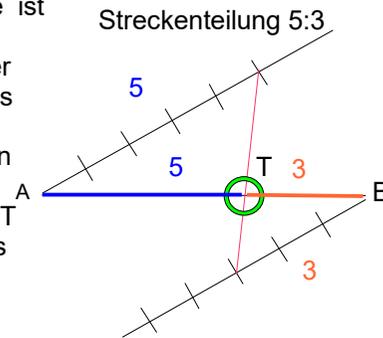
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Ähnlichkeit

**Streckenteilung**

Mit Hilfe der Aussagen des Strahlensatzes ist es möglich, jede beliebige Strecke mit graphischen Mittel in einem rationalen Verhältnis  $m/n$  zu teilen. Eine gegebene Strecke soll in einem Verhältnis  $m : n$  geteilt werden. Dazu legt man durch die Endpunkte der Strecke zwei parallele Geraden. Auf der einen Parallelen trägt man  $m$  Einheiten ab, auf der anderen  $n$  Einheiten.

Liegt der Teilungspunkt innerhalb der Strecke ist das Teilungsverhältnis positiv, das AT und TB gleichgerichtet sind und man spricht von einer **inneren Teilung**. Grafisch bedeutet das, dass die Einheiten auf den Parallelen auf verschiedenen Seiten der Strecke abgetragen werden müssen. Die Richtigkeit bestätigt der Strahlensatz, da T Ausgangspunkt von zwei Strahlen ist und das Verhältnis auf den Parallelen dem auf den Strahlen entspricht.



Liegt der Teilungspunkt außerhalb der Strecke ist das Teilungsverhältnis negativ, da AT und TB entgegen gerichtet sind und man spricht von einer **äußeren Teilung**. Grafisch bedeutet das, dass die Einheiten auf den Parallelen auf gleichen Seiten der Strecke abgetragen werden müssen.

