33. Verteilungsfunktionen

33.1 Binomialverteilung

Eine der wichtigsten Verteilungsfunktionen ist die Binomialverteilung, die auch auf der Laplace-Definition der Wahrscheinlichkeit beruht. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses ist für alle möglichen Ereignisse gleich.
Allerdings gibt es eine Einschränkung der Vielfalt der möglichen Ereignisse. Es wird nur unterschieden zwischen einem Ereignis, welches eintreten kann und das dieses Ereignis nicht eintritt. Die eventuell möglichen anderen Ereignisse, die eintreten könnten werden zu einem Ereignis zusammengefasst: Ereignis A ist nicht eingetreten. Für solche Versuche wählt man für das Eintreten des Ereignisses die „1“ und für das Nichteintreten des Ereignisses die „0“. Solche Ereignisse werden als Bernoulli-Versuche bezeichnet.

Definition:
Ein Zufallsversuch mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Erfolg 1 bzw. Misserfolg 0) heißt **Bernoulli - Versuch**

Für die Binomialverteilung wird aber zugelassen, dass sich ein solcher Bernoulli-Versuch mehrmals wiederholt und damit zu einer Bernoullikette wird.

Definition:
Ein Zufallsexperiment, bei dem ein Bernoulli-Versuch n-mal so wiederholt wird, dass sich die Erfolgswahrscheinlichkeit p und die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg q (q = 1–p)nicht ändern, heißt **Bernoullikette**.

Die häufigsten Fragestellungen, die dabei auftreten sind folgende:
Wenn man eine Bernoullikette mit n Versuchen durchführt, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man rechnen,

- dass k mal das Ereignis „1“ eintritt.
- dass mindestens (oder höchstens) k mal das Ereignis „1“ eintritt.

Voraussetzung für die Anwendung der Binomialverteilung ist außerdem, dass alle Versuche mit Zurücklegen (mit Wiederholung) durchgeführt werden, so dass alle Wahrscheinlichkeiten an gleichen Pfaden des Baumdiagramms gleich sind, gleichgültig, auf welcher Ebene sich der Teilbaum befindet. Damit sind die Ereignisse stochastisch unabhängig, da die bedingten Wahrscheinlichkeiten an einem Pfad, der zum gleichen Ereignis führt gleiche der Wahrscheinlichkeit des Eintreten des Ereignisses überhaupt sind.
Die Binomialverteilung hängt damit von zwei Größen ab:

- Die Erfolgswahrscheinlichkeiten aller Stufen sind identisch: = p
  (im Urnenexperiment der Quotient aus der **Anzahl der Kugeln einer Farbe** und **alle vorhandene Kugeln**)
- die Binomialfunktion ist von zwei Parametern abhängig:
  n : Anzahl der Versuche oder Ziehungen
  p : Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines positiven Ereignisses

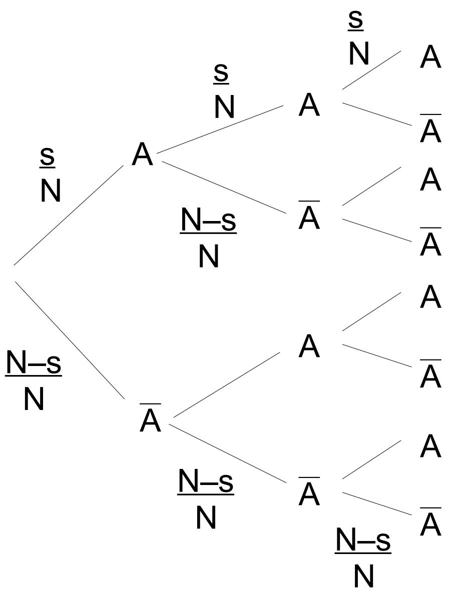
Diese beiden Werte bestimmen die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten positiver Ereignisse. Da es aber nur „0“ und „1“ gibt bestimmen sie damit auch die Wahrscheinlichkeit für das eintreten negativer Ereignisse.
Als nächstes soll die Formel für die Binomialverteilung aus den Regeln der bedingten Wahrscheinlichkeit hergeleitet werden.

33.1.1 Herleitung der Binomialverteilung

Dazu soll die Versuchsanordnung aus einer Urne mit zwei verschieden farbigen Kugeln bestehen.
In einer Urne befinden sich N Kugeln,

- davon sind s Kugeln von Farbe1
- dann sind N-s Kugeln von Farbe2
- die Wahrscheinlichkeit für Farbe 1 ist s /N
- die Wahrscheinlichkeit für Farbe 2 ist (N–s)/N

Jetzt soll die Ziehung mit zurücklegen betrachtet werden, dh. alle Wahrscheinlichkeiten, die an einem Teilbaum zu dem gleichen Ereignis führen sind an allen Teilbäumen gleich.



$P(X_1 = A) = s/N$ $P(X_1 = \bar{A}) = (N-s)/N$
$P(X_2 = A) = s/N$ $P(X_2 = \bar{A}) = (N-s)/N$
…
$P(X_n = A) = s/N$ $P(X_n = \bar{A}) = (N-s)/N$

Allgemein gilt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A nach k Versuchen k – mal eingetreten ist : $P(X_k = A) = \left(\frac{s}{N}\right)^k$

entsprechendes gilt für das Ereignis $\bar{A}$: $P(X_k = \bar{A}) = \left(\frac{N-s}{N}\right)^k$

Aus den beiden Formeln kann man schließen, wenn man n mal zieht mit Zurücklegen und es erscheint k mal das Ereignis A und n – k mal das Ereignis $\bar{A}$, dann tritt dieses Ereignis genau mit einer Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{\left(\frac{s}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-s}{N}\right)^{n-k}}$$

auf. Das ist die Wahrscheinlichkeit am Ende **eines Pfades** mit k positiven Ereignissen und n–k negativen Ereignissen.

Eine zweite Möglichkeit der Herleitung der Formel kann man mit den Mittel der Kombinatorik führen. Grundsätzlich handelt es sich um Versuchsdurchführungen mit Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge.
In einer Gesamtmenge von N Kugeln gibt es s Kugeln von der ersten Farbe, die als positives Ereignis gewertet werden. Jetzt werden n Ziehungen mit Zurücklegen durchgeführt. Für jede einzelne Ziehung gibt es für die Farbe 1 genau s Möglichkeiten. Wenn man die Anzahl für k Kugeln der Farbe 1 bestimmt, dann können ergeben sich s^k Möglichkeiten und es müssen n – k Kugeln von der anderen Farbe gezogen werden. Damit ergibt sich für die andere Farbe $(N–s)^{n–k}$ Möglichkeiten.
Damit ergibt sich als **erfolgreiche Anzahl** der Wert

$$\boxed{(s)^k \cdot (N-s)^{n-k}}$$

Als **Gesamtzahl** bei n Ziehungen aus N Gesamtkugeln der Wert N^n.

$$\boxed{(N)^n}$$

Gemäß der Laplace – Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der positiven Ereignisse durch die Anzahl der Gesamtereignisse zu dividieren. Das führt zu folgendem Quotienten

$$\boxed{\frac{(s)^k \cdot (N-s)^{n-k}}{N^n}}$$

Zerlegt man die Potenz des Nenner in ein Produkt zweier Potenzen $N^n = N^k \cdot N^{(n-k)}$ lassen sich die beiden Faktoren auf die Faktoren des Zählers aufteilen.

$$\boxed{\frac{s^k}{N^k} \cdot \frac{(N-s)^{n-k}}{N^{n-k}}}$$

Die nächste Frage, die steht ist: Wie viele Pfade gibt es in einem Baumdiagramm, die zu dieser Wahrscheinlichkeit führen. Dazu muss man die kombinatorischen Regeln bemühen:
Es ist die Permutation von n Elementen gesucht, bei der jeweils k und n – k Elemente sich nicht unterscheiden lassen. Damit handelt es sich um eine Permutation mit Wiederholung.
Die zugehörige Formel lautet:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Diese Formel entspricht genau der Definition des Binomialkoeffizienten. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für n–maliges Ziehen mit Wiederholung mit k positiven Ereignissen und n – k negativen Ereignissen über **alle möglichen Pfade** des Baumdiagramms:

$$\boxed{\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-s}{N}\right)^{n-k}}$$

Führt man in dieser Formel wieder die beiden Wahrscheinlichkeiten P für das Eintreten des positiven Ereignisses und q für das Eintreten des negativen Ereignisses ein, ergibt sich:

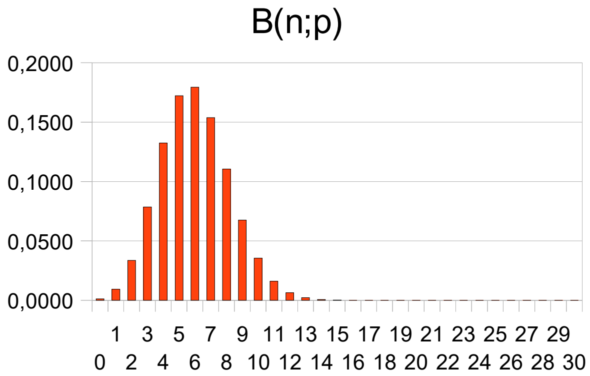
$$\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

33.1.2 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeits– oder Dichtefunktion

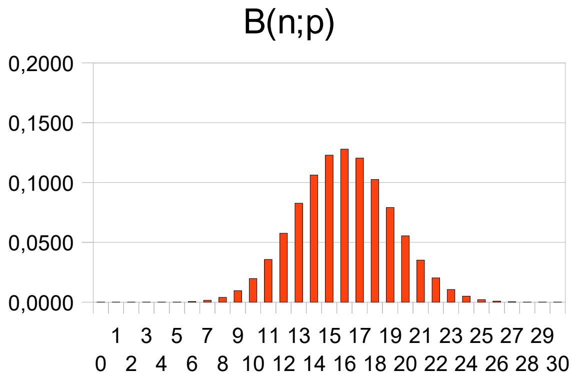
Die Dichtefunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeiten an einer Position, dh.: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit **genau** k positive Ereignisse zu erhalten.

33.1.2.1 Kurvenbild in Abhängigkeit von p bei festem n

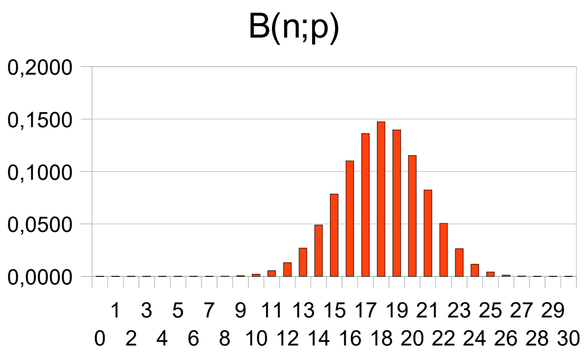
Für n = 40 ergeben sich folgende Kurvenbilder



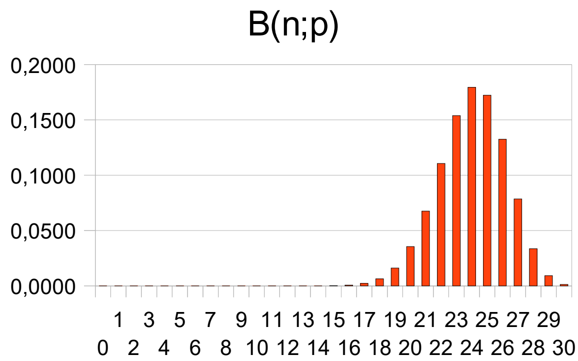
p = 0,2



p = 0,4



p = 0,6



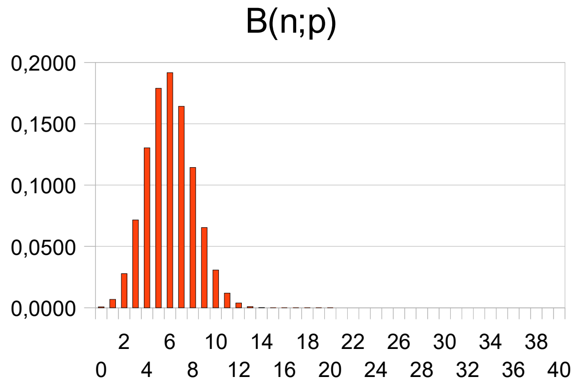
p = 0,8

1. Je größer p ist, umso weiter rechts liegt das Maximum der Verteilung.
2. Von p = 0,1 bis p = 0,5 wird die Verteilung bei festem n breiter und niedriger, von 0, 5 bis 0,9 wieder schmaler und höher.
3. Für p = 0,5 ist die Verteilung symmetrisch: B(n;p;k) = B(n;p;n-k)
4. Es gilt die Symmetriebeziehung: B(n;p;k) = B(n;1-p;n-k)

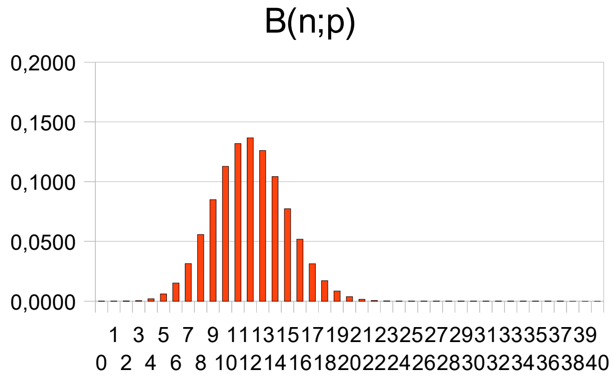
Die Symmetrieeigenschaft 4 kann aus den obigen Funktionsbildern abgelesen werden. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit p = 0,2, dann gilt für diese Wahrscheinlichkeit 1 – p = q = 0,8. Die Funktionskurve von q = 0,8, entspricht der von 0,2, wenn man bei der Betrachtung nicht bei k =0 beginnt, sondern bei k =n. Damit entsteht bei gleichem n bei p der gleiche Histogrammbalken an der Position k, wie bei 1– p an der Position n–k.

33.1.2.2 Kurvenbild in Abhängigkeit von n bei festem p

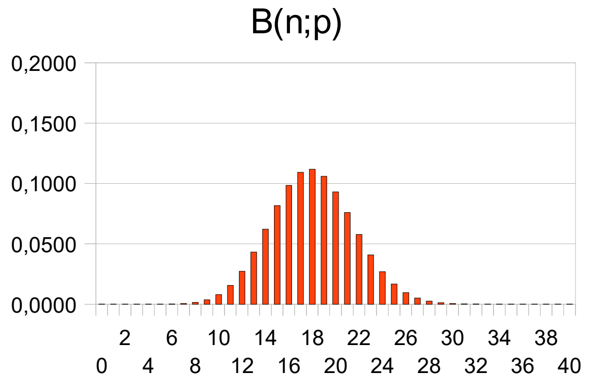
Für p = 0,3 ergeben sich folgende Kurvenbilder



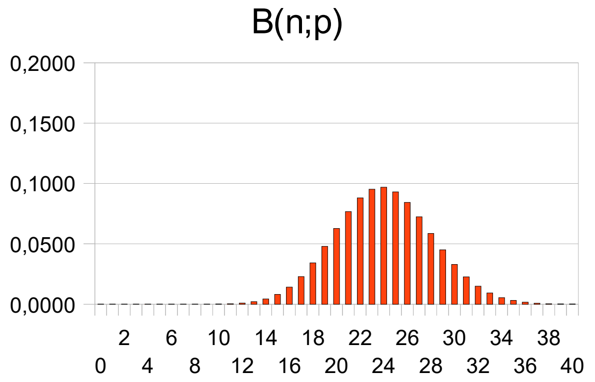
n = 20



n = 40



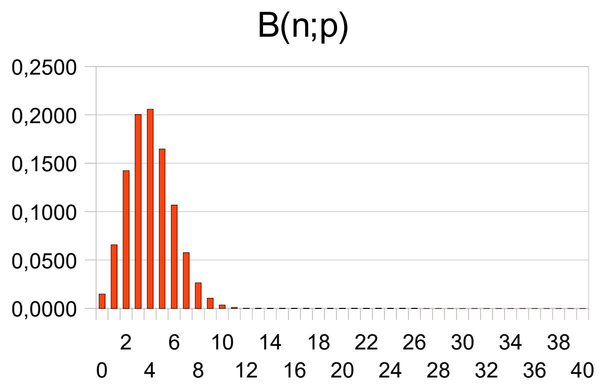
n = 60

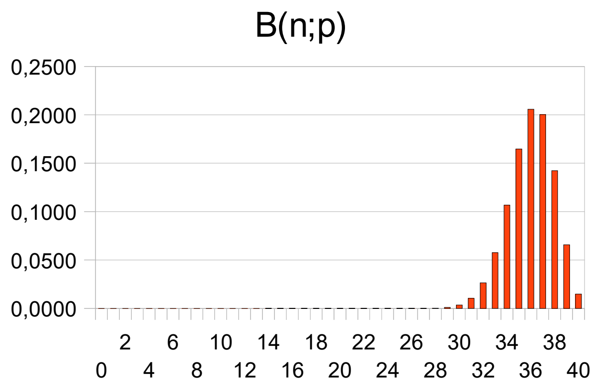


n = 80

1. Mit wachsendem n werden die Verteilungen breiter und flacher.
2. Das Maximum wandert mit wachsendem n weiter nach rechts.
3. Mit wachsendem n werden die Verteilungen symmetrischer.
4. Die Verteilungen B(n;p) und B(n;1–p) sind zueinander symmetrisch bezüglich der Achse k = n/2

Bei einem relativ kleinen Wert p ist die Verteilung rechtsschief (bzw. linkssteil), da die Wahrscheinlichkeit für ein kleines x groß ist. Bei einem relativ großen Wert p ist die Verteilung linksschief, da die Wahrscheinlichkeit für ein großes x eher groß ist. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts sind die folgenden zwei Funktionskurven geeignet:

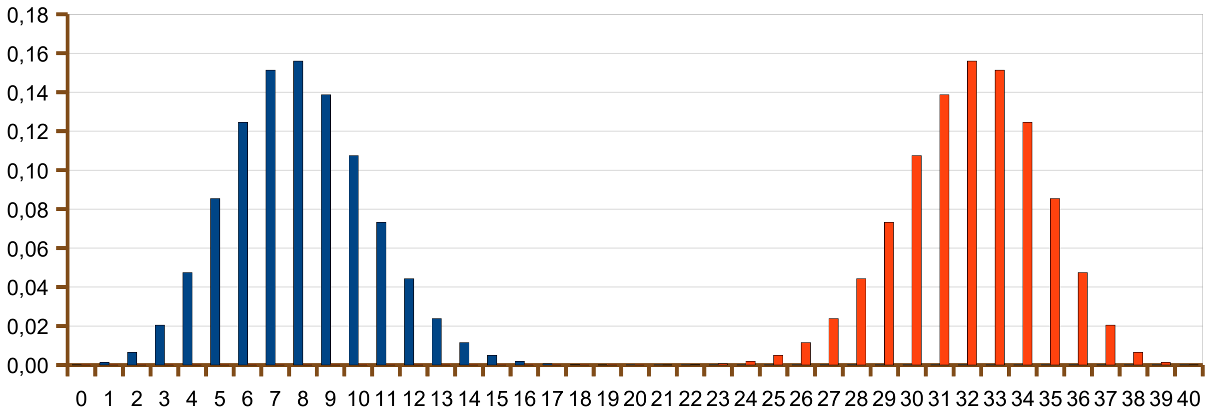




Für beide Kurven gilt n = 40. Die linke Kurve entsteht für p = 0,1 und die rechte Kurve für p = 0,9. Die Schiefe der Kurven erkennt man an der Anzahl der Balken, die bis zum Maximum auftreten. In der linken Kurve sind es 4, und nach dem Maximum sind es 9. Der letzte Balken entsteht bei k = 13, dieser ist aber auf dem Bild nicht mehr zu erkennen. Bei der rechten Kurve sind die Verhältnisse genau umgekehrt.

Zur Veranschaulichung des Merkmals 4 ist die folgende Grafik geeignet. Bei dieser Funktion sind für n = 40 und p = 0,2 die blauen Histogrammbalken entstanden. Für die Gegenwahrscheinlichkeit 1 – p sind die roten Histogrammbalken entstanden.

Betrachtet man die Balken genauer, dann erkennt man, das der blaue Balken an der Stelle k = 4 die gleiche Höhe hat, wie der rote Balken an der Stelle k = 36. Es ist tatsächlich eine Spiegelung und keine Verschiebung, die Spiegelung erfolgt an der Position k = 20, die für n = 40 genau n/2 darstellt.



33.1.3 Erwartungswert

Der Erwartungswert der Binomialverteilung berechnet sich aus:

$$\boxed{\mathbf{E(x)=n\cdot p}}$$

33.1.4 Varianz und Streuung

Der zweite wichtige Wert ist die Streuung, die sich aus der Varianz ergibt

$$\boxed{\mathbf{Var(x)=n\cdot p\cdot(1-p)=n\cdot p\cdot q}}$$

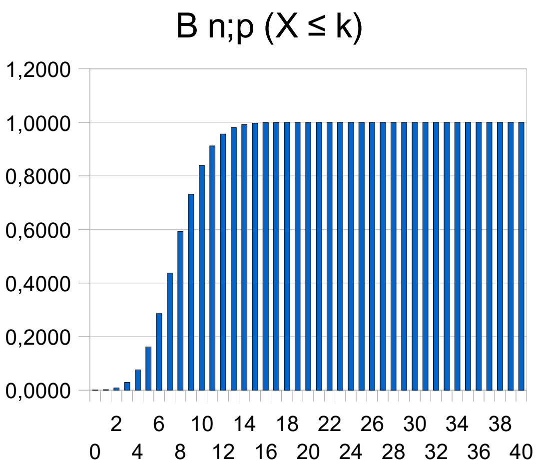
Die Streuung ergibt sich grundsätzlich aus der Quadratwurzel der Varianz:

$$\boxed{\sigma=\sqrt{\mathbf{n\cdot p\cdot(1-p)}}=\sqrt{\mathbf{n\cdot p\cdot q}}}$$

33.1.5 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

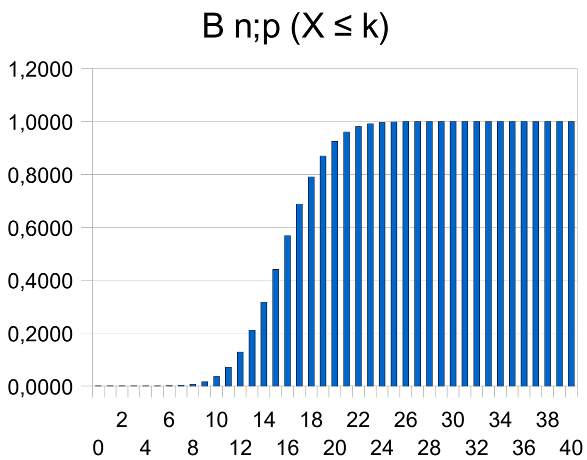
Die Verteilungsfunktion entsteht, wenn man die Wahrscheinlichkeiten bis zu einem bestimmten k addiert. Die so berechnete Wahrscheinlichkeit entspricht damit der Wahrscheinlichkeit, dass ein positives Ereignis bei n Versuchen 0 bis k mal auftritt. Diese Funktion ist also die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten bis zum Wert k. Damit kann man eine Eigenschaft direkt folgern: Diese Funktion muss monoton wachsend sein, da nur Werte addiert werden, aber keine subtrahiert. Für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wie die Binomialverteilung, ist die Funktion aber nicht streng monoton wachsend, da nur diskrete Werte möglich sind und z.B für k = 3,25 kein Wert angegeben werden kann. Damit entsteht eine treppenförmige Gestalt der Funktion. Der kleinste Funktionswert dieser Funktion ist 0 und der größte Funktionswert ist 1, da Wahrscheinlichkeiten nie größer als 1 sein können. Es sollen jetzt einige Eigenschaften dieser Verteilungsfunktion in Abhängigkeit von n und p untersucht werden.

33.1.5.1 Kurvenbild in Abhängigkeit von p bei festem n

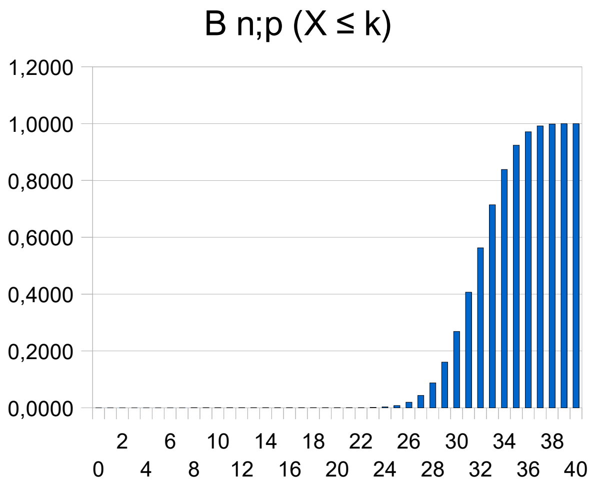


p = 0,2

p = 0,6



p = 0,4

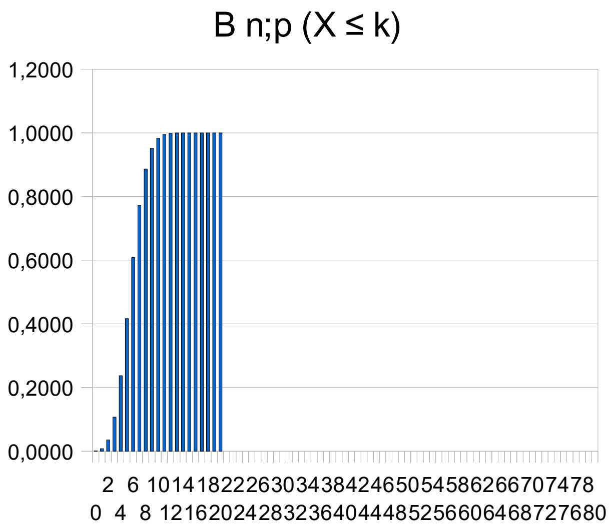


p = 0,8

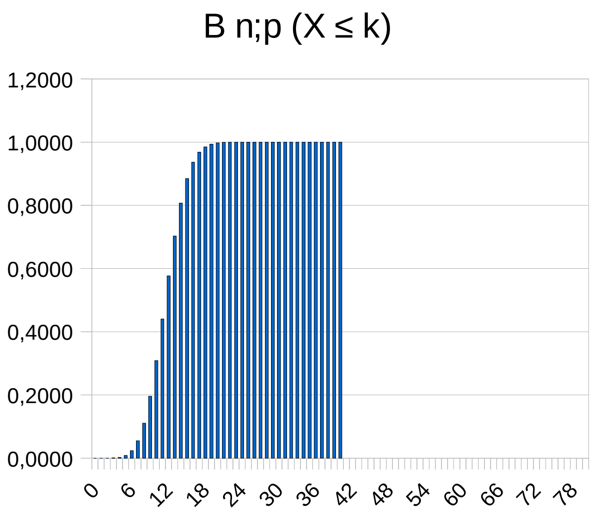
Man erkennt an den Funktionen, dass der Kurvenverlauf etwa gleich ist, aber das Steigen der Funktion setzt bei größerem p erst später ein.

33.1.5.2 Kurvenbild in Abhängigkeit von n bei festem p

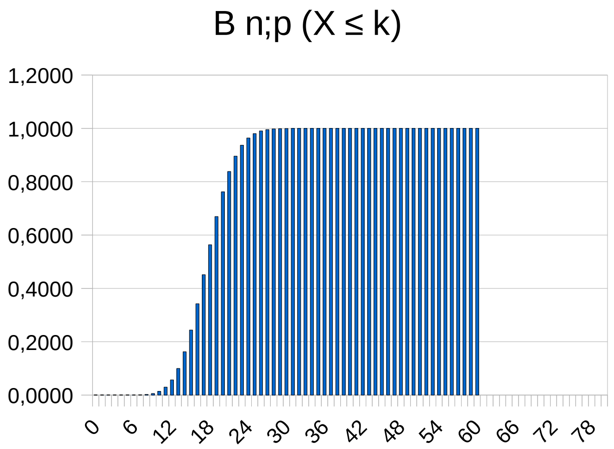
Es wird wieder der Wert für p = 0,3 gesetzt.



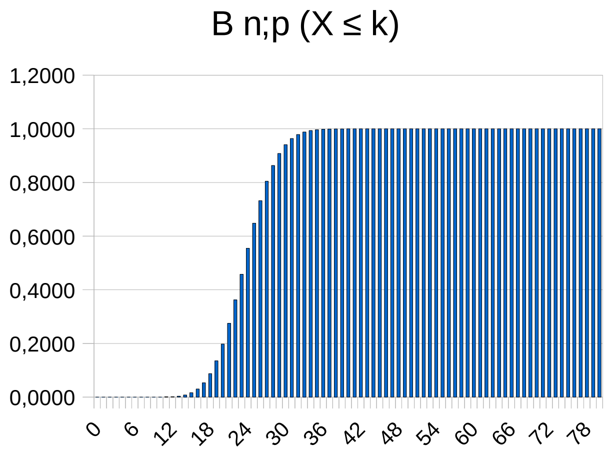
n = 20



n = 40



n = 60



n = 80

Auch hier unterscheiden sich die Kurven nur wenig. Der markanteste Unterschied ist der, dass die Steigung der Kurve mit wachsendem n später einsetzt. Aber dann kann man erkennen, das nach etwa 16 Säulen die maximale Wahrscheinlichkeit von 1 erreicht ist. Die Kurven werden also nicht flacher und die Steigung geringer.

Sowohl die Dichtefunktion wie auch die Verteilungsfunktion lassen sich nur mit viel Aufwand von Hand berechnen. Für die Verteilungsfunktion müsste man tatsächlich jedes einzelne Element der Dichtefunktion berechnen und manuell aufaddieren, da es keine geschlossene Formel für die Verteilungsfunktion gibt. Es ist tatsächlich die Summe manuell auszurechnen. Deshalb ist es in beiden Fällen ratsam den GTR dazu zu benutzen. Alle in der Schule benutzten GTR besitzen sowohl die Dichtefunktion, als auch die Verteilungsfunktion als implementierte Funktionen. Für die Dichtefunktion ist die Funktionsbezeichnung **binomialpdf** und für die Verteilungsfunktion die Bezeichnung **binomialcdf** üblich. Welche Parameter und in welcher Reihenfolge diese eingegeben werden müssen, ist dem jeweiligen Handbuch zu entnehmen.

33.1.6 Anwendung der Verteilungsfunktion

Währen die Anwendung der Dichtefunktion klar ist, lässt sich die Verteilungsfunktion für eine ganze Reihe von Aufgabenstellungen benutzten, bzw. muss die Verteilungsfunktion an Stelle der Dichtefunktion benutzt werden. Die Dichtefunktion benutzt man für folgende Aufgabenstellung:

> Bestimme die Wahrscheinlichkeit bei n Ziehungen **genau** k mal ein positives Ergebnis zu erhalten.

Die Grundaufgabe für die Anwendung der Verteilungsfunktion lautet:

> Bestimme die Wahrscheinlichkeit bei n Ziehungen **höchstens** k mal ein positives Ergebnis zu erhalten.

Der Unterschied in der zweiten Fragestellung besteht darin, dass alle Wahrscheinlichkeiten von 0 bis k aufaddiert werden müssen. Für einen Wert k = 10 sind auch die Wahrscheinlichkeiten von 0, 1, 2, …, bis 10 Ereignisse, die diese Bedingung erfüllen. Außer dieser Aufgabenstellung gibt es aber noch weitere. Eine ebenfalls häufig auftretende Aufgabenstellung ist:

> Bestimme die Wahrscheinlichkeit bei n Ziehungen **mindestens** k mal ein positives Ergebnis zu erhalten.

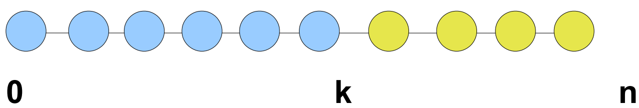
Der Unterschied zur zweiten Aufgabenstellung liegt darin, dass man nicht die Wahrscheinlichkeiten von 0 bis k zu summieren hat, sondern die Wahrscheinlichkeiten von k bis n. Dazu gibt es zunächst keine Funktion, die dieses Ergebnis als eine Zahl liefert. Man müsste jetzt tatsächlich alle Elemente der Dichtefunktion von k bis n einzeln addieren, um auf diesen gesuchten Wert zu kommen. Mit einem kleinen Trick kann dabei aber die Verteilungsfunktion benutzt werden.

Deshalb sollen jetzt alle Möglichkeiten aufgelistet werden, bei denen man die Verteilungsfunktion zur Lösung der Aufgabe einsetzen kann. Für die Verteilungsfunktion wird im folgenden die gängige Bezeichnung $F_{n,p}(k)$ benutzt. Dabei ist n die Anzahl der Ziehungen und p die Wahrscheinlichkeit für ein positives Ereignis. Diese Werte sind für jede Verteilungsfunktion feste Größen oder anderes ausgedrückt für jedes n und p existiert eine eigene Verteilungsfunktion. Diese Verteilungsfunktion ist dann eine Funktion der Variablen k, für jedes k erhält man einen anderen Funktionswert.

33.1.6.1 Aufgabenstellung $P(X \leq k)$

> Die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k oder höchstens k (also weniger als k+1) Erfolge auftreten, ist die Verteilungsfunktion selbst.

Die graphische Veranschaulichung dieser Fragestellung ist:



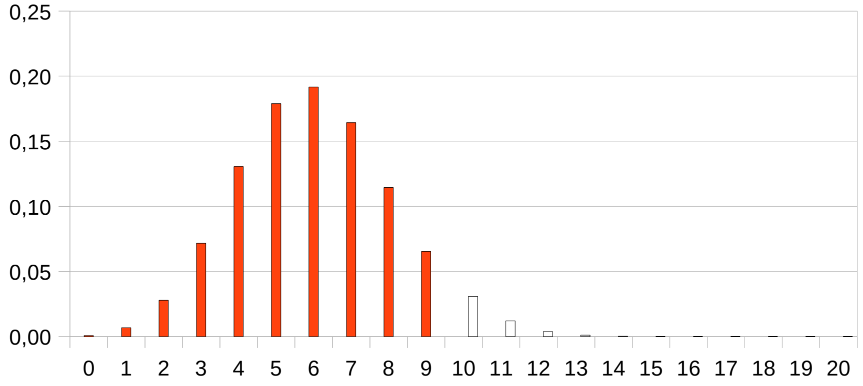
Für die Aufgabenstellung sind alle hier blau markierten Wert zu addieren.
Die gesuchte Berechnungsformel lautet:

$$P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=k)$$

Damit ist der gesuchte Wert genau der Wert der Verteilungsfunktion:

$$\mathbf{P(X \le k) = F_{n,p}\,(k)}$$

In zu summierenden Balken der Dichtefunktion für n = 20 und p = 0,3 ergibt sich für den Wert k = 9 folgendes Funktionsbild:



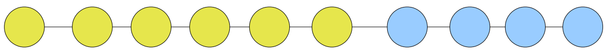
Die rot markierten Balken entsprechen den Einzelwerten, die zu addieren sind.

33.1.6.2 Aufgabenstellung P(X > k)

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als k oder mindestens k+1 Erfolge auftreten, ist die Summe von k+1 bis n.

Bei den Aufgabenstellungen ist exakt auf die Formulierung zu achten. „mehr als k“ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für k nicht mit in das Ergebnis einbezogen werden darf. Das Addieren beginnt mit der Wahrscheinlichkeit für die Position k+1.

Die graphische Veranschaulichung dieser Fragestellung ist:



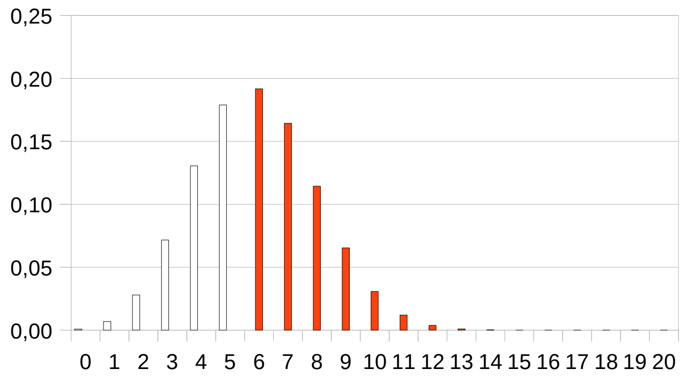
Zu addieren sind wieder die blau markierten Werte. Hier wird jetzt die Eigenschaft der Verteilungsfunktion benutzt, dass die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit diejenige, die man erhält, wenn man von 1 die aufsummierte Wahrscheinlichkeit bis k subtrahiert.

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(X{=}k{+}1) + P(X{=}k{+}2) + \ldots + P(X{=}n) \\ &= 1 - P(X{=}0) + P(X{=}1) + \ldots + P(X{=}k) \\ &= 1 - P(X \le k) \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite wird genau der Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion bis k subtrahiert, so dass als Ergebnis entsteht:

$$\mathbf{P(X > k) = 1 - F_{n,p}\,(k)}$$

Die Veranschaulichung in der Dichtefunktion liefert für k > 5 folgendes Bild:



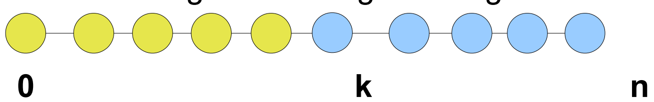
Die zu addierenden roten Balken beginnen mit dem Wert k = 6 und sind bis n = 20 zu addieren.

33.1.6.3 Aufgabenstellung P(X ≥ k)

Die Wahrscheinlichkeit, dass k oder mehr Erfolge auftreten, ist die Summe von k bis n.

In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von k Erfolgen mit in die Addition einzubeziehen.

Die graphische Veranschaulichung dieser Fragestellung ist:



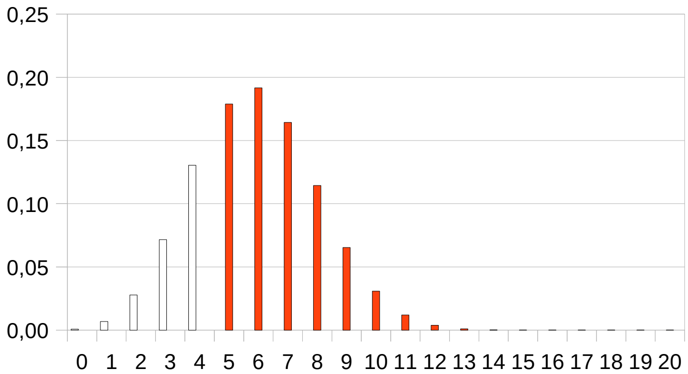
Diese Aufgabenstellung lässt sich auf die vorherige zurückführen. Es ist aber darauf zu achten, dass der Wert der Funktion $F_{n,p}(k)$ die Wahrscheinlichkeit für k mal positives Ereignis mit beinhaltet. Aber die Wahrscheinlichkeit für k gehört jetzt mit zum gesuchten Ereignis und nicht zum Gegenereignis, also darf diese Wahrscheinlichkeit nicht mit subtrahiert werden. Aber eine Verteilungsfunktion, die den Wert für k nicht berücksichtigt gibt es nicht. Da macht man sich die Eigenschaft der diskreten Verteilung zu nutze. Wenn die Wahrscheinlichkeit für k mit zu berücksichtigen ist, dann ist aber auf alle Fälle die Wahrscheinlichkeit für k – 1 nicht mit zu berücksichtigen. Werte zwischen k – 1 und k gibt es nicht (genau das ist diskrete Verteilung). Damit ergibt sich folgende Formel:

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= P(X=k) + P(X=k+1) + \ldots + P(X=n) \\ &= 1 - P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k-1) \\ &= 1 - P(X \leq k-1) \end{aligned}$$

und für die Berechnung über die Verteilungsfunktion

$$\boxed{\mathbf{P(X \geq k) = 1 - F_{n,p}\,(k-1)}}$$

Die Darstellung der Aufgabe in der Dichtefunktion für $k \geq 5$ ergibt folgendes Bild:



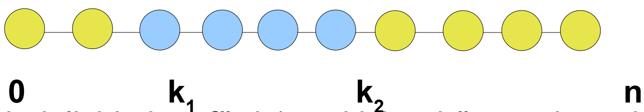
Hier ist im Gegensatz zur vorherigen Aufgabenstellung der Wert für $k = 5$ in die Summe mit einzubeziehen.

Damit sind die möglichen Fragestellungen für Ereignisse bis k, größer k und größer oder gleich k behandelt. Als nächstes geht es um Aufgabenstellungen, die Wahrscheinlichkeiten zwischen zwei Werten k_1 und k_2 betreffen. Fragestellungen dieser Art sind etwa: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der positiven Ereignisse zwischen 3 und 7 liegen. Auch diese Aufgabe lassen sich mit der Verteilungsfunktion relativ gut bearbeiten.

33.1.6.4 Aufgabenstellung $P(k_1 \leq X \leq k_2)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass weniger oder gleich k_2, aber mehr oder gleich k_1 Erfolge auftreten, lässt sich berechnen, indem man die erste Wahrscheinlichkeit, dass weniger oder gleich k_2 Erfolge auftreten, bestimmt und davon die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k_1 Erfolge auftreten subtrahiert.

Die graphische Veranschaulichung dieser Fragestellung ist:



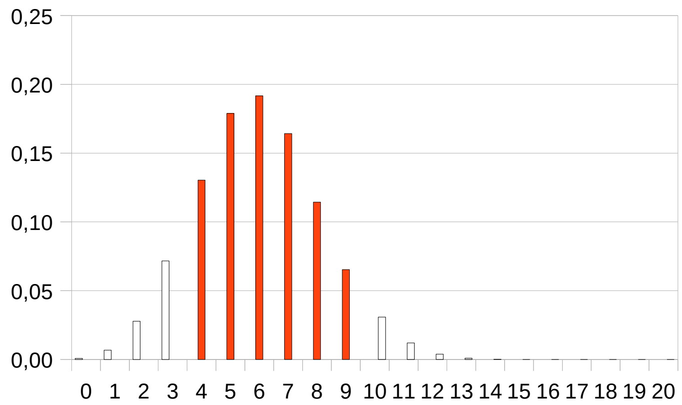
Die Wahrscheinlichkeiten für k1 und k2 gehören mit zu dem gesuchten Bereich. Damit ergibt sich für die Formel:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = P(X=k_1+1) + P(X=k_1+2) + \ldots + P(X=k_2)$$
$$= P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1 - 1)$$

Der Wert für k2 ist in der Aufgabenstellung mit enthalten, deshalb steht beim dem ersten Ausdruck das Gleichheitszeichen mit, da er Wert für k_1 auch enthalten ist, dürfen nur die Werte bis $k_1 - 1$ subtrahiert werden (die Verteilungsfunktion ist immer mit Gleichheitszeichen zu sehen !). Damit ergibt sich für die Berechnung mit der Verteilungsfunktion:

$$\mathbf{P(k_1 \leq X \leq k_2) = F_{n,p}(k_2) - F_{n,p}(k_1 - 1)}$$

Stellt man diese Aufgabestellung in der Dichtefunktion für $k_1 = 4$ und $k_2 = 9$ dar, ergibt sich folgendes Bild:

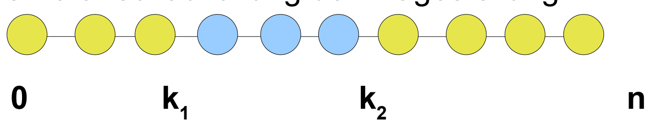


Bei der Summenbildung sind die Balken für k=4 und k=9 mit einzubeziehen. Deshalb dürfen bei der Benutzung der Verteilungsfunktion nur die Werte bis k =3 subtrahiert werden.

33.1.6.5 Aufgabenstellung $P(k_1 < X \leq k_2)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass weniger oder gleich k_2, aber mehr als k_1 Erfolge auftreten, lässt sich berechnen, indem man die erste Wahrscheinlichkeit, dass weniger oder gleich k_2 Erfolge auftreten, bestimmt und davon die Wahrscheinlichkeit, dass weniger oder gleich als k_1 Erfolge auftreten subtrahiert.

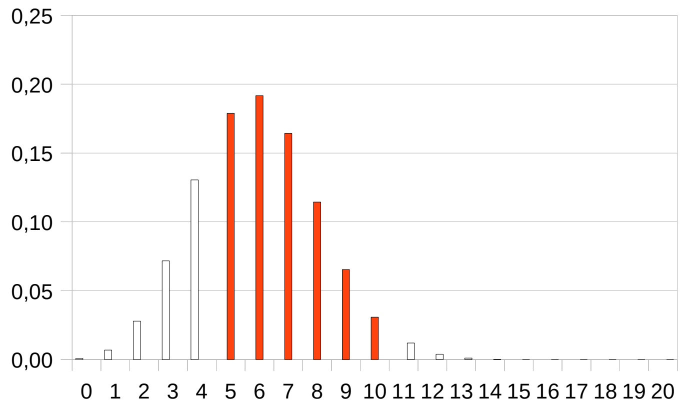
Die graphische Veranschaulichung der Fragestellung:



Die Wahrscheinlichkeit für k_1 ist in der Aufgabenstellung nicht mit erfasst, die für k_2 aber doch. Deshalb ist hier die Summe aller Wahrscheinlichkeiten bis einschließlich k1 zu subtrahieren, was zu der Formel führt:

$$\boxed{P(k_1 < X \leq k_2) = F_{n,p} (k_2) - F_{n,p} (k_1)}$$

Im Funktionsbild der Dichtefunktion für k_1 =4 und k_2 =10 sieht das dann folgendermaßen aus:



Es sind alle Wahrscheinlichkeiten der Werte von k = 5 bis k = 10 zu addieren.

An Hand dieser Beispiele sollte klar geworden sein, wie man mit der Verteilungsfunktion umgeht. Merken sollte man sich als Grundsatz: Die Fragestellung nach „höchstens“ entspricht genau der Verteilungsfunktion, die Fragestellung nach „mindestens“ entspricht der Gegenwahrscheinlichkeit und es ist der Wert für „mindestens“ von 1 zu subtrahieren.

33.1.6.6 Berechne Versuchsanzahl n bei gegebenem p , k und P

Die Aufgabenstellungen zur Binomialverteilung in den folgenden Abschnitten sind etwas schwieriger. Da Problem liegt darin, daß man die Funktion der Binomialverteilung nicht nach den Parameter n , p oder k auflösen kann. Bisher waren diese Werte immer gegeben und man sollte nur die Wahrscheinlichkeit P berechnen. Nützlich wäre es, wenn man für die Berechnung einen grafikfähigen Taschenrechner zur Verfügung hat, dann kann man die Probleme über Schnittpunktbestimmung auf dem Taschenrechner lösen. Die jetzigen Taschenrechner können so etwas nicht, aber man will nicht von diesen Aufgabenstellungen lassen. Der vorgeschlagene Lösungsweg heiß „systematisches probieren“ wobei nicht erklärt wird, worin die Systematik besteht. Hier sollen beide Lösungswege aufgezeigt werden, die mit dem graphischen Taschenrechner und das systematische Probieren, wobei der Versuch unternommen wird, eine Systematik zu finden.

> 4% der männlichen Bevölkerung sind farbenblind. Wie groß muss eine Gruppe von Männern mindestens sein, damit mit mindestens 90% iger Wahrscheinlichkeit mindestens (daher haben diese Aufgaben die Bezeichnung „3 mal mindestens Aufgaben“ erhalten)
> a) einer aus der Gruppe farbenblind ist
> b) fünf aus der Gruppe farbenblind sind

In diesem Fall sind nicht alle Parameter für die Verteilungsfunktion bekannt: p ja; n nein Dafür ist die Wahrscheinlichkeit bekannt, die herauskommen soll. Mathematisch gesehen ist die Gleichung nach n aufzulösen, aber genau das geht bei der Formel nicht. Man müsste in der Binomialverteilung das n durch eine Variable ersetzen, um eine Funktion der Variablen n zu erhalten. Binomialverteilungen im GTR sind auf das n sehr empfindlich, n muss unbedingt eine ganze Zahl sein (!), sonst streikt die Funktion. Der gesuchte Wert n ist in diesen Fällen ein minimaler Wert. Bei größeren n ist die Wahrscheinlichkeit größer, dass das Ereignis eintritt. Deshalb werden hier „mindestens“ Werte ermittelt. „Mindestens“ ist aber eine obere Summe von einem festen k bis zur oberen Grenze n. Dazu gibt es keine geeignete Funktion, deshalb muss die Funktion binomcdf auf das Gegenereignis umgestellt werden. Damit tritt diese Funktion nur in Verbindung mit „1 –„ auf. Die obere Grenze muss dann genau um 1 tiefer sein, als die untere Grenze bei „mindestens“ für „mindestens einer“ lässt sich die Aufgabe noch von Hand rechnen:
Hier wird wieder die Funktion binomcdf benötigt, die als Verteilungsfunktion der Binomialverteilung mit einem großen F angegeben wird.

$$F_{n,p} = \binom{n}{0}\cdot p^0\cdot q^n + \underbrace{\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q^1 + \binom{n}{n}\cdot p^n\cdot q^0}_{\text{mindestens einer}}$$

Damit führt die Fragestellung nach P(X = 0) zum ersten Element der Summe „Mindestens“ einer führt zur Aufgabenstellung 1 – „ keiner“, da eine Summe von 1 bis n nicht direkt berechnet werden kann.

$$1-\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^n=1-1\cdot 0{,}04^0\cdot 0{,}96^n \geq 0{,}9$$

Da der Wert des Binomialkoeffizienten = 1 (alle Binomialkoeffizienten „ … über 0“ führen zu einem Wert =1) und die Potenz von p dazu führt, dass p^0 =1 ebenfalls nicht geschrieben werden braucht, führt der Ausdruck zu einer Potenz der Gegenwahrscheinlichkeit (1 - p).
Die Ungleichung stellt eine untere Grenze für n dar, was auch sachlich richtig ist, denn je größer n, desto größer muss die Wahrscheinlichkeit sein. Außerdem ist der Wert immer auf die nächste ganze Zahl aufzurunden, da eine Abrundung eine Reduzierung der Wahrscheinlichkeit bewirken würde
Diese Gleichung läßt sich noch über den Logarithmus nach n auflösen. Da beim Auflösen der Gleichung durch einen Logarithmus dividiert werden muss, der kleiner als 0 ist (alle Logarithmen zwischen 0 und 1 sind negativ) dreht sich das Ungleichheitszeichen bei der Division um.

$$\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}96)}\leqslant n$$

$$\frac{-2{,}3026}{-0{,}0408}=56{,}4\leqslant n \quad \Rightarrow \quad n \geq 56{,}4 \text{ mindestens } n = 57$$

Die Ungleichung stellt eine untere Grenze für n dar, was auch sachlich richtig ist, denn je größer n, desto größer muss die Wahrscheinlichkeit sein. Außerdem ist der Wert immer auf die nächste ganze Zahl aufzurunden, da eine Abrundung eine Reduzierung der Wahrscheinlichkeit bewirken würde

$\Rightarrow$ n ≥ 56,4 mindestens n = 57

für „mindestens fünf“ (alles, was mehr als einer ist) lässt sich die Aufgabe nur noch mit GTR rechnen. Hier wird wieder die Funktion binomcdf benötigt, die als Verteilungsfunktion der Binomialverteilung mit einem großen F angegeben wird.

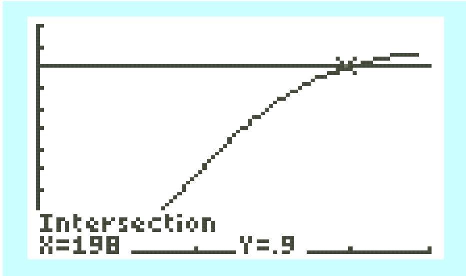
$$F_{n,p}=\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot q^n+\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot q^{n-1}+\ldots+\underbrace{\binom{n}{5}\cdot p^5\cdot q^{n-5}+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q^1+\binom{n}{n}\cdot p^n\cdot q^0}_{\text{mindestens fünf}}$$

Berechnung mit dem GTR

Mit den meisten GTR lassen sich aber auch keine oberen Summen berechnen. Deshalb ist es auch hier erforderlich, daß man auf die untere Summe umstellt und deshalb den Wert für k um 1 reduziert.

binomcdf (n ; p ; k) ≥ 0,9 <=> 1 - binomcdf (n ; p ; k–1) ≥ 0,9

Y1:1−binomcdf(int(X) , 0.04 , 4)
Y2:0,9



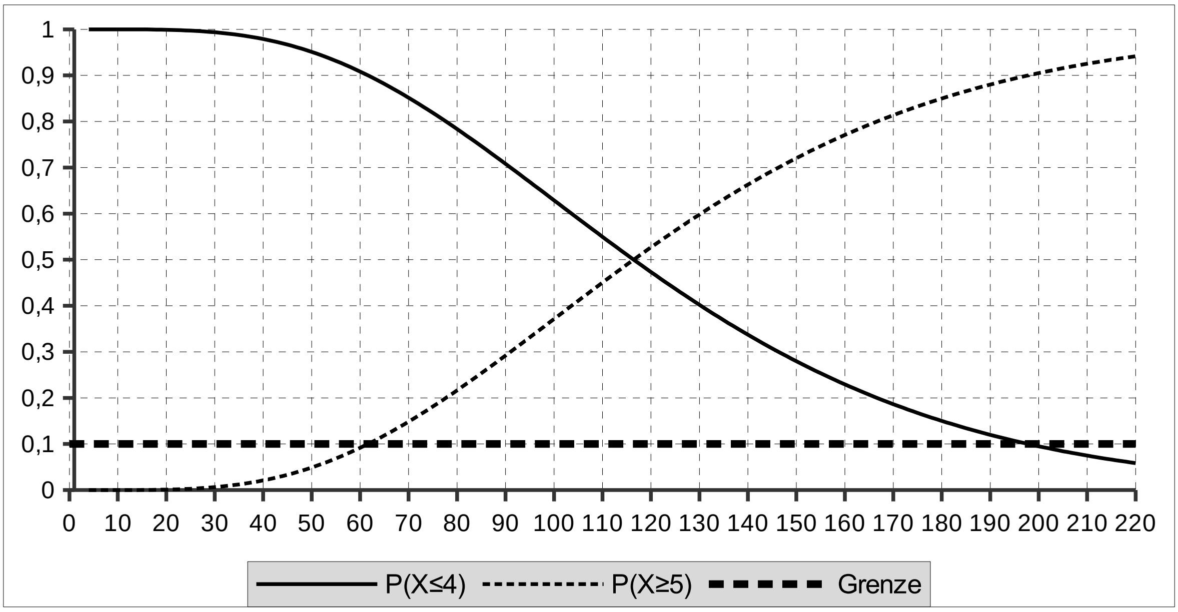
Fenstereinstellung:
Xmin = 0 ; Xmax = 150 Xscl = 10
Ymin = 0 ; Ymax = 1.1 Yscl = 0.1

Von der Verteilungsfunktion und der vorgegebenen Grenzwahrscheinlichkeit ist der Schnittpunkt zu bilden. Der Schnittpunkt liefert den Wert für k – 1 . Der gesuchte Wert k liegt um 1 höher.

Man muß **mindestens** eine Gruppe von 199 Personen auswählen um mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 90% **mindestens** 5 Personen zu finden, die farbenblind sind.

Berechnung mit dem WTR

Zunächst sollen die summierten Wahrscheinlichkeiten für k = 5 und wachsendes n untersucht werden, sowie das gleiche für k = 4 , da nur mit den unteren Summen von 0 bis k gerechnet werden kann.



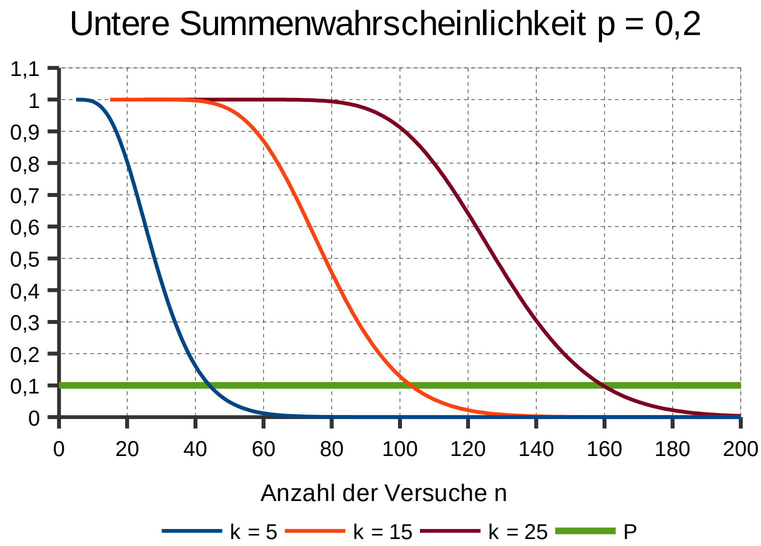
$$P_{n;0,04}(X \geq 5) = 1 - P_{n;0,04}(X \leq 4) = 1 - \text{binomcdf}(n; 0,04; 4) \geq 0,9$$

In diesen beiden Kurven sind der Werte der Binomialverteilung dargestellt in Abhängigkeit von n. In diesem speziellen Fall sind für k = 5 die untere Summenwahrscheinlichkeit P(X ≤ 4) als durchgehende Linie und die obere Summenwahrscheinlichkeit P(x ≥ 5) als gestrichelte Linie dargestellt. Durch Umstellen der Formel wurde die Aufgabe so umgewandelt, dass kein „ 1 – „ mehr auftritt, dafür geht es nicht mehr um eine mindest Wahrscheinlichkeit, sondern um eine höchste Wahrscheinlichkeit. Damit ist die durchgehende Kurve zu betrachten.

Bei dieser Funktion handelt es sich um eine monoton fallende Funktion. Das bedeutet,

- wenn man eine Summenwahrscheinlichkeit bestimmt hat und die ist größer als die angegebene Grenzwahrscheinlichkeit, muss man den n Wert erhöhen.
- Ist die berechnete Wahrscheinlichkeit kleiner als die Summenwahrscheinlichkeit, muss man den n Wert reduzieren.

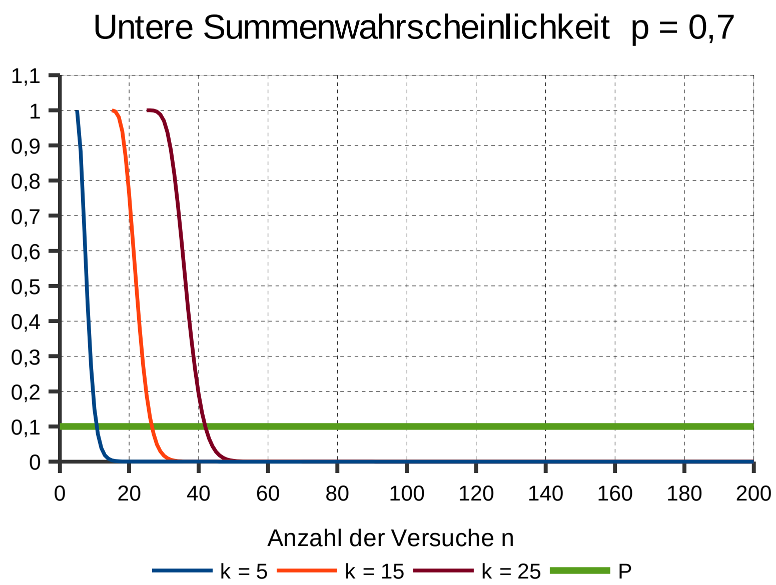
Verhalten der Funktionswerte



Im unteren Bereich sind die k Wert der einzelnen Funktionen bei gleicher Wahrscheinlichkeit p angegeben.
Für niedrigen p Wert sind die Kurven weit auseinander gezogen.
Die n Werte sind viel größer als die k Werte.
Für die n Werte kann man etwa bei n = 6 * k beginnen.

	k	n
blau	5	44
rot	15	103
braun	25	160

Für p = 0,2 ist 1/0,2 = 5 und damit 5 * k ein guter Startwert.



Im unteren Bereich der Grafik sind die zugehörigen k Werte bei gleicher Wahrscheinlichkeit p angegeben.

Für ein hohes p sind die Kurven sehr schmal, was dazu führt, dass die n Werte nicht viel höher sind als die k Werte. Man kann eventuell mit einem Wert von
n = 1,5 k beginnen.

	k	n
blau	5	14
rot	15	26
braun	25	42

Für p = 0,7 ist 1/0,7 = 1,43 und damit n = 1,5 k ein guter Startwert.

Die Berechnung sollte mit einem n = k : p begonnen werden.

Mit wachsenden Werten von n reduziert sich die Wahrscheinlichkeit, dh.:

- Liegt die berechnete Wahrscheinlichkeit noch über der Grenzwahr scheinlichkeit, ist der Wert von n zu erhöhen.
- Liegt die berechnete Wahrscheinlichkeit unter der Grenzwahr scheinlichkeit, ist der Wert von n zu reduzieren.

Geht man jetzt der Empfehlung nach, mit welchem n man beginnen soll, so beginnt man mit n = 5/0.04 = 125

binomcdf(125;0,04;4) = 0,4369

Die Berechnete Wahrscheinlichkeit liegt über der Grenzwahrscheinlichkeit deshalb ist der Wert von n zu erhöhen. Üblicherweise halbiert man jetzt das Intervall bis zur oberen Grenze. Da es diese obere Grenze nicht gibt sollte man vielleicht die Hälfte von 125 dem Wert von 125 hinzuaddieren, aber auf eine ganze Zahl runden:

binomcdf(188; 0,04 ; 4) = 0,1255

Dieser Wert liegt immer noch über der Grenzwahrscheinlichkeit von 0.1. also ist der Wert von n weiter zu erhöhen. Die Halbierung des Intervalls bis 125 führte zu dem Wert 63. deshalb sollte man jetzt den Wert 62 oder 64 halbieren und zu 188 addieren.
188 + 31 = 219

binomcdf(219;0,04;4) = 0.06

Dieser Wert liegt unter der Grenzwahrscheinlichkeit von 0.1. also ist n wieder zu reduzieren. In diesem Fall könnte man wieder auf die Hälfte des Intervalls gehen und z.B zu 188 nicht 31. sondern nur 16 addieren, also wieder die Hälfte von 31.

binomcdf(204;0,04;4) = 0,086

Der Wert liegt nur wenig unter 0.1. deshalb die Intervalle kleiner wählen, etwa in 5-er Abschnitten, bis man wieder über die Grenzwahrscheinlichkeit kommt. Irgendwann im 1-er Intervallen arbeiten.
Eventuell macht es auch Sinn zu einem bestimmten Zeitpunkt mit einer Tabelle zu arbeiten, weil man den gesuchten Wert für p schon weitgehend eingeschränkt hat.

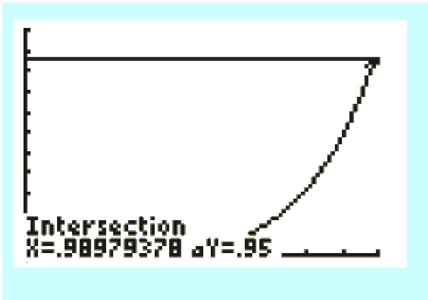
n	P(X=4)	P(X≤ 4)
193	0,0640	0,1119
194	0,0627	0,1093
195	0,0615	0,1068
196	0,0602	0,1044
197	**0,0590**	**0,1020**
198	**0,0578**	**0,0996**
199	0,0566	0,0973

Damit die Wahrscheinlichkeit größer als 90% ist, muss die Anzahl der Versuche mindestens 198 sein.

33.1.6.7 Berechne Trefferwahrscheinlichkeit p bei gegebenem n , k und P

Ein Gerät besteht aus 5 Bauteilen, die *unabhängig voneinander* mit der gleichen Funktionswahrscheinlichkeit arbeiten. Fällt ein Bauteil aus, so arbeitet das Gerät nicht mehr.
Welche Funktionswahrscheinlichkeit müssen die Bauteile haben, wenn das Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % funktionieren soll ?

(Die Berechnung stützt sich auf die Voraussetzung „unabhängig voneinander“, da in diesem Fall der Multiplikationssatz ohne bedingte Wahrscheinlichkeit gilt. In diesem Fall ist die bedingte Wahrscheinlichkeit jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses selbst.)
Auch in diesem Fall ist eine manuelle Berechnung noch möglich, aber auch eine Berechnung mit dem GTR.

manuelle Berechnung	*Berechnung mit dem GTR*
X: Bauteil funktioniert n = 5; P > 0,95 **Gesucht p ;** $P_p^5(X=0) = \binom{5}{0} \cdot p^5 \cdot (1-p)^0 \geq 0{,}95$ $p^5 \geq 0{,}95 \quad \vert \sqrt[5]{\ }$ $p \geq \sqrt[5]{0{,}95} \approx 98{,}98\,\%$	Y1 : binompdf(5 , X , 0) Y2 : 0,95  Fenstereinstellung: Xmin = 0 ; Xmax = 1 Xscl = 0.1 Ymin = 0 ; Ymax = 1.1 Yscl = 0.1

Jedes Bauteil einer Produktionsserie fällt mit der Wahrscheinlichkeit p aus. Die Bauteile werden unabhängig voneinander produziert Wie groß darf p höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 80% höchstens 10 von 100 Bauteilen ausfallen.

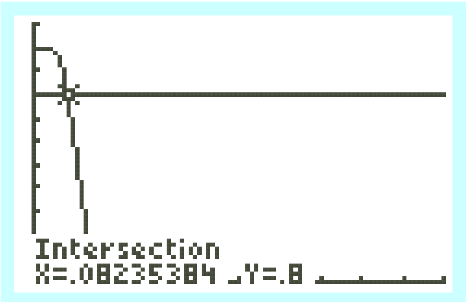
Auch in diesem Fall sind nicht alle Parameter für die Verteilungsfunktion bekannt: n ja; k ja; p nein. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit bekannt, die erreicht werden soll. Mathematisch gesehen ist die Gleichung nach p aufzulösen, aber genau das geht bei der Binomialverteilung nicht. Dazu kommt noch, dass das notwendige q ebenfalls 1 - p ist ebenfalls unbekannt ist. Man kann den Wert von p durch eine Variable ersetzen, da p eine reelle Zahl ist. Dabei sollten die grafikfähigen Taschenrechner keine Probleme machen, da sie in der Lage sind Funktionen darzustellen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist eine obere Grenze der Wahrscheinlichkeiten, ist die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall eines Bauteil kleiner, dann ist natürlich auch die gesamte Ausfallquote kleiner. Deshalb wird hier mit „höchstens" gearbeitet, aber das liefert genau die Funktion binomcdf .Deshalb gibt es keinen Wechsel zum Gegenereignis.

$$F_{100,p} = \binom{100}{0} \cdot p^0 \cdot q^{100} + \binom{100}{1} \cdot p^1 \cdot q^{99} + \ldots + \binom{100}{10} \cdot p^{10} \cdot q^{90} \leq 0{,}8$$

$P_{100;p}\ (X \leq 10)$ = binomcdf (100; p ; 10) ≤ 0,8

Y1:binomcdf(100 , p , 10)
Y2:0,8

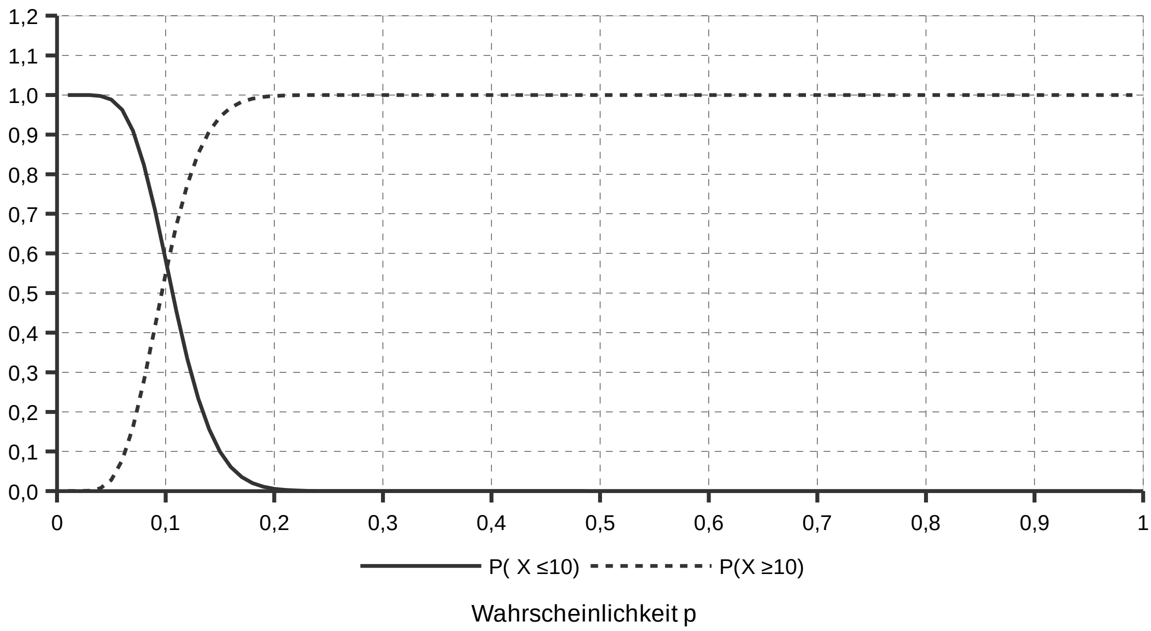


Fenstereinstellung:
Xmin = 0 ; Xmax = 1 Xscl = 0,1
Ymin = 0 ; Ymax = 1.1 Yscl = 0.1

Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall eines Bauteils darf **höchstens** 0,08235 sein, damit von **höchstens** 10 Bauteilen **höchsten** 80% ausfallen.

Berechnung mit dem WTR

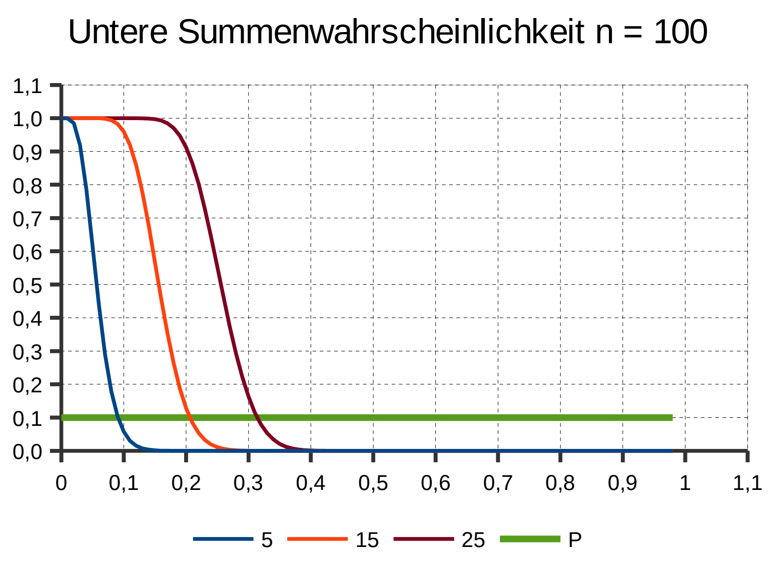
Hat man keinen grafikfähigen Taschenrechner empfiehlt sich eventuell folgendes Vorgehen. Dazu soll zunächst wieder die Binomialverteilung für k = 10 in Abhängigkeit von p analysiert werden.



In diesen beiden Kurven sind der Werte der Binomialverteilung dargestellt in Abhängigkeit von p. In diesem speziellen Fall sind für n = 100 und k = 10 die untere Summenwahrscheinlichkeit P(X ≤ 10) als durchgehende Linie und P(X ≥ 10) als gestrichelte Linie dargestellt.

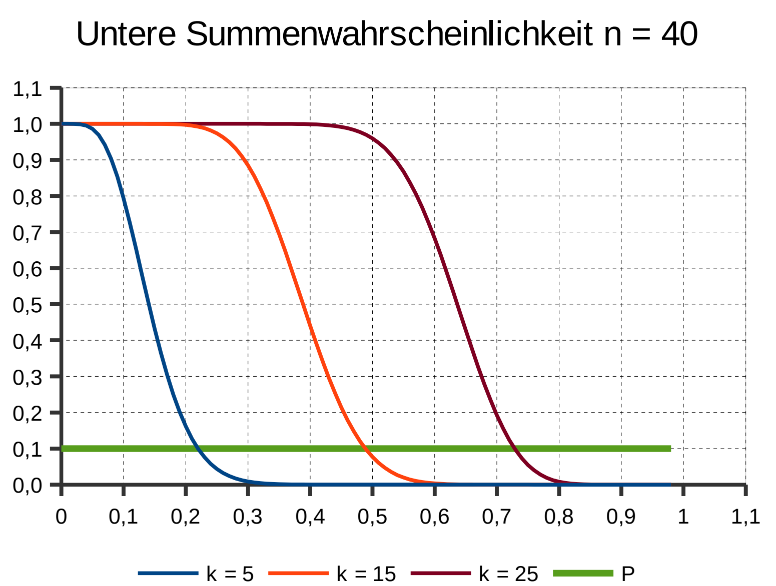
Falls eine obere Summenwahrscheinlichkeit gesucht ist, dann wird die Berechnung so umgestellt, dass es auf eine untere Summenwahrscheinlichkeit führt, da obere Summenwahrscheinlichkeiten nicht berechnet werden können. Am Ende ist es immer die untere Summe, es ändert sich nur ob eine oberer Grenzwert, oder ein unterer Grenzwert gegeben ist; ob eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit mindestens erreicht werden muss, oder ob die Wahrscheinlichkeit höchstens erreicht werden darf.

Bei dieser Funktion handelt es sich um eine monoton fallende Funktion.



	k	p
blau	5	0,09
rot	15	0,21
braun	25	0,32

Für k = 5 ist p = 0,09. Für n = 100 ist k / n = 1/20 = 0,05.
Für k = 15 ist p = 0,21. Für n = 100 ist k / n = 0,15.
Für k = 25 ist p = 0,32. Für n = 100 ist k / n = 0,25
Alle Werte liegen unter der gesuchten Wahrscheinlichkeit, man könnte die Werte leicht aufrunden.



	k	p
blau	5	0,22
rot	15	0,49
braun	25	0,73

Für k = 5 ist p = 0,22. Für n = 40 ist k / n = 0,13.
Für k = 15 ist p = 0,49. Für n = 40 ist k / n = 0,38.
Für k = 25 ist p = 0,73. Für n = 40 ist k / n = 0,63
Alle Werte liegen unter der gesuchten Wahrscheinlichkeit, aber die Werte sind gute Startwerte für die Berechnung.

Die Berechnung sollte mit einem p = k : n begonnen werden.

Mit wachsenden Werten von p reduziert sich die Wahrscheinlichkeit, dh.:

- Liegt die berechnete Wahrscheinlichkeit unter der Grenzwahr scheinlichkeit, ist der Wert von p zu reduzieren.
- Liegt die berechnete Wahrscheinlichkeit über der Grenzwahr scheinlichkeit, ist der Wert von p zu erhöhen.

Geht man jetzt der Empfehlung nach, mit welchem p soll man beginnen, so beginnt man mit p = 10/100 = 0,1

$P_{100;0,1}$ (X ≤ 10) = binomcdf (100 ; 0.1 ; 10) = 0,5832

Dieser Wert ist noch weit von dem gesuchten Wert 0.8 entfernt. Die Wahrscheinlichkeit ist unter der Grenzwahrscheinlichkeit, deshalb ist die Wahrscheinlichkeit zu reduzieren. In der numerischen Mathematik hat sich bewährt das Intervall immerzu halbieren. In diesem Fall also mit p = 0.05 weiter zu rechnen:

$P_{100\,;\,0,05}$ (X ≤ 10) = binomcdf(100; 0.05 ; 10) = 0,9885

Diese Wahrscheinlichkeit ist über der Grenzwahrscheinlichkeit, deshalb ist die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen auf die Hälfte zwischen 0.1 und 0.05. also p = 0.075

$P_{100\,;\,0,075}$ (X ≤ 10) = binomcdf(100; 0.075 ; 10) = 0,8707

Wenn der GTR für p eine Liste akzeptiert, ist die Arbeit mit Liste am schnellsten. In einer Liste sollte der Wert k/n etwa in der Mitte der Listenwerte liegen. In diesem Fall bei p = 0,1 sollte man mit der Liste bei 0,05 beginnen und dann Schrittweiten von 0,01 angeben, als obere Grenze 0,15 benutzen.

Das Problem bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten liegt darin, daß man eine reelle Zahl sucht. Hat man eine geeignete Dezimalzahl gefunden muß man die Stellen zahl um 1 erhöhen und in dem Bereich von neuem anfangen, so daß man wenigstens eine 4-stellige Wahrscheinlichkeit hinbekommt. Bei der Suche nach n sucht man eine ganze Zahl, die man dann gut festlegen kann.

33.1.6.8 Berechne Trefferanzahl k bei gegebenem n , p und P

Auch hier müßte ein Auflösen der Binomialverteilungsfunktion nach k erfolgen. Diese Aufgabenstellung ist aber genau die, die im Hypothesentest behandelt wird. Da dem Hypothesentest ein eigener Abschnitt gewidmet ist, werden hie keine Ausführungen dazu gemacht.

33.1.7 Multinominalverteilung – Erweiterung der Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist einsetzbar, wenn man nur das Eintreten eines Ereignisses zu betrachten hat. Es gibt nur eine Unterscheidung: das Ereignis tritt ein und das mit der Wahrscheinlichkeit p oder das Ereignis tritt nicht ein und das dann mit der Wahrscheinlichkeit 1 – p.
Umgesetzt auf das Ziehen von Kugeln kann man sagen es werden Kugeln einer Farbe gezogen oder Kugeln, die diese Farbe nicht haben. Wie kann man die Wahrscheinlichkeiten bestimmen, wenn in einer Urne Kugeln mit mehren Farben sind und man die Wahrscheinlichkeit bestimmen möchte 3 rote, 5 blaue und 2 weiße zu ziehen.
Da die Binomialverteilung nach wie vor nur gilt, wenn man das „Ziehen mit Zurücklegen" durchführt, bleiben auch für alle Ziehungen die Wahrscheinlichkeiten gleich.

Es soll jetzt untersucht werden, wie verändert sich die Binomialverteilung wenn man drei verschiedene Farben unterscheiden will. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer Urne R rote Kugeln, W weiße Kugeln und B blaue Kugeln vorhanden sind. Damit ergibt sich die Gesamtzahl der Kugeln aus N = R + W + B. Aus der Gesamtmenge N sollen r rote Kugel, w weiße Kugeln und b blaue Kugeln gezogen werden. Damit ergibt sich die Gesamtzahl aller gezogenen Kugeln aus n = r + w + b.
Die Wahrscheinlichkeiten sind für alle Ziehung gleich : $p_r = R/N$, $p_w = W/N$, $p_b = B/N$.

Zunächst soll untersucht werden, wie sich die Wahrscheinlichkeit berechnet, wenn man r rote Kugel zieht und n – r „nicht rote Kugeln". Damit ist die Voraussetzung für die Binomialverteilung erfüllt und es kann die Formel der Binomialverteilung verwendet werden.

$$P_{n;pr}(X = r) = \binom{n}{r} p_r^{\,r} (1 - p_r)^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\;r!}\; p_r^{\,r} (1-p_r)^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\;r!}\; p_r^{\,r} (p_w + p_b)^{w+b} =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\;r!}\; p_r^{\,r} (p_w + p_b)^{w} (p_w + p_b)^{b}$$

Erläuterung zu dieser Formel: es werden n Kugeln gezogen, davon sollen r rote sein. Daraus resultiert der Binomialkoeffizient. Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel ist p_r und die Wahrscheinlichkeit für eine weiße oder blaue $1 - p_r$. $1 - p_r = p_w + p_b$, da die Summe mit p_r wieder 1 ergeben muss. Aus dem gleichen Grund ist n – r = w + b. Die Potenzregeln ermöglichen die Trennung der hinteren Klammer in zwei zwei Faktoren. Der Binomialkoeffizient ist nach Definition umgeschrieben.
Jetzt sollen die weißen und die blauen Kugeln ohne die roten Kugeln betrachtet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus W+B Gesamtanzahl w weiße Kugeln und b blaue Kugeln zu ziehen. Für die weißen Kugeln ergibt sich jetzt (ohne roter Kugeln) eine Wahrscheinlichkeit von W / (W+B) und für die blauen Kugeln eine Wahrscheinlichkeit von B / (W+B). Diese beiden Brüche sollen etwas näher untersucht werden.

$$\frac{W}{(W+B)} = \frac{\frac{W}{N}}{\frac{(W+B)}{N}} = \frac{\frac{W}{N}}{\frac{W}{N}\cdot\frac{B}{N}} = \frac{p_r}{p_w \cdot p_b}$$

Die hier ausgeführte Wahrscheinlichkeit für die weißen Kugeln ergibt sich auch aus dem Quotienten der ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten. Damit lässt sich für die

Wahrscheinlichkeit des Ziehens von w weißen Kugeln aus W + B verbleibenden Kugeln wieder die Binomialverteilung nutzen, aber mit anderen Wahrscheinlichkeiten:

$$P_{n-r;\,pw}(X = k_w) = \binom{n-r}{w}\left(\frac{p_w}{p_w + p_b}\right)^w\left(\frac{p_b}{p_w + p_b}\right)^{n-r-w} = \frac{(n-r)!}{(n-r-w)!\;\;w!}\left(\frac{p_w}{p_w + p_b}\right)^w\left(\frac{p_b}{p_w + p_b}\right)^{n-r-w}$$

$$= \frac{(n-r)!}{b!\;\;w!}\left(\frac{p_w}{p_w + p_b}\right)^w\left(\frac{p_b}{p_w + p_b}\right)^b$$

Es werden insgesamt nur noch aus n – r Kugeln w weiße Kugeln gezogen. Die Umrechnung der Wahrscheinlichkeiten und des Binomialkoeffizienten erfolgt analog der obigen Formel.

Das Ziehen der zunächst roten Kugeln und dann das Ziehen der weißen ohne Berücksichtigung der roten Kugeln ist unabhängig, da auch mit anderen Wahrscheinlichkeiten gerechnet wurde. Deshalb können diese beiden Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden:

$$= \frac{n!}{(n-r)!\;\;r!}\;p_r^{\,r}\;(p_w + p_b)^w\;(p_w + p_b)^b \;\cdot\; \frac{(n-r)!}{b!\;\;w!}\left(\frac{p_w}{p_w + p_b}\right)^w\left(\frac{p_b}{p_w + p_b}\right)^b$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\;\;r!}\;\frac{(n-r)!}{b!\;\;w!}\;p_r^{\,r}\;(p_w + p_b)^w\;(p_w + p_b)^b\left(\frac{p_w}{p_w + p_b}\right)^w\left(\frac{p_b}{p_w + p_b}\right)^b$$

$$= \frac{n!}{r!\;\;b!\;w!}\;p_r^{\,r}\;p_w^{\,w}\;p_b^{\,b}$$

Die zweite Zeile sortiert die Reihenfolge der Faktoren etwas um. Durch Kürzen der Fakultäten entsteht links die Anzahl der zu berücksichtigenden zweige im Baum und anschließend die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Farben mit den Potenzen, die die Anzahl der jeweils gezogenen Kugeln angeben. Diese Formel kann man auf noch mehr Unterscheidungen erweitern. Für eine Unterscheidung von vier Farben : rot, weiß, blau und schwarz würde sich folgende Formel ergeben:

Wahrscheinlichkeit aus einer Menge von vier verschieden farbigen Kugeln r rote , w weiße , b blaue und s schwarze Kugeln zu ziehen

- mit Zurücklegen
- ohne Reihenfolge

$$\frac{n!}{r!\cdot w!\cdot b!\cdot s!}\cdot p_r^{\,r}\cdot p_w^{\,w}\cdot p_b^{\,b}\cdot p_s^{\,s}$$

Der Bruch mit den Fakultäten in dieser Formel gibt die Anzahl der Pfade an, die berücksichtigt werden müssen, wenn man die Reihenfolge nicht berücksichtigt.

33.1.8 Verteilung – mit Zurücklegen ; mit Beachtung der Reihenfolge

Möchte man die Reihenfolge berücksichtigen, dann ist jeder Pfad einzeln zu betrachten und es gibt keine Zusammenfassung. Bei einer Verteilung „mit Beachtung der Reihenfolge“ gibt es keine zwei gleichen Pfade, da bei jedem Pfad die Reihenfolge unterschiedlich ist. Damit muss man für diesen Fall nur die Anzahl der Pfade auf 1 setzen, sprich, den Bruch weglassen und schon hat man:

Wahrscheinlichkeit aus einer Menge von vier verschieden farbigen Kugeln r rote , w weiße , b blaue und s schwarze Kugeln zu ziehen

- mit Zurücklegen
- mit Reihenfolge

$$p_r^{\,r} \cdot p_w^{\,w} \cdot p_b^{\,b} \cdot p_s^{\,s}$$

Hier muss in beiden Fällen „mit Zurücklegen“ gearbeitet werden, da das für die Binomialverteilung Voraussetzung ist. Damit ist für jede Farbe bei jeder Ziehung die Wahrscheinlichkeit wieder gleich. Damit sind nur die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Farben mit der gewollten Anzahl zu Potenzieren.

Bleibt die Frage offen, wie würden die Formeln aussehen, wenn man ohne Zurücklegen arbeitet.

33.2 Hypergeometrische Verteilung

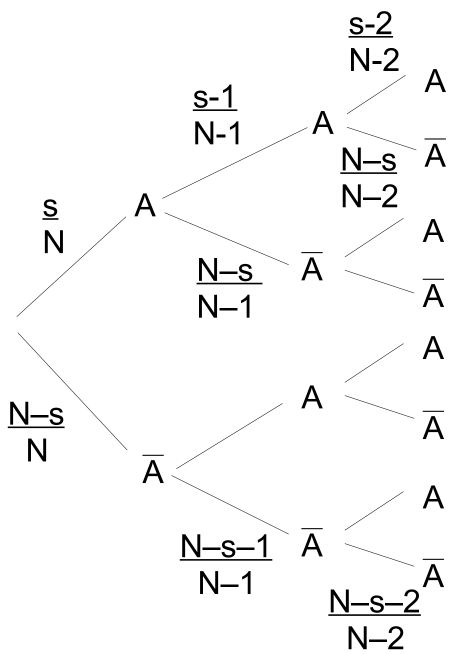
Die Hypergeometrische Verteilung entspricht in den Grundzügen den Voraussetzungen der Binomialverteilung, allerdings ist hier als Änderung zu berücksichtigen, dass die Ziehung ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung) erfolgt. Aus den vorherigen Abschnitten zu bedingten Wahrscheinlichkeit ist klar, dass es sich dabei nicht um unabhängige Ereignisse handeln kann, das der Ausgang eines früheren Ereignisses die möglichen Ausgänge nachfolgender Ereignisse beeinflusst. Aus diesem Grund werden die Gesetze der bedingten Wahrscheinlichkeit hier zu Änderungen der Formeln führen.

33.2.1 Herleitung der Hypergeometrischen Verteilung

Die Versuchsanordnung ist die gleiche, wie bei der Binomialverteilung, aber es werden keine gezogenen Kugeln zurückgelegt.
In einer Urne befinden sich N Kugeln,

- davon sind s Kugeln von Farbe1
- dann sind N-s Kugeln von Farbe2
- die Wahrscheinlichkeit für Farbe 1 ist s /N
- die Wahrscheinlichkeit für Farbe 2 ist (N–s)/N

In diesem Fall entsteht folgendes Baumdiagramm:



Bei Ziehungen ohne Zurücklegen ändert sich an jedem Baum die Wahrscheinlichkeit, da mit jedem Ziehen die Anzahl der Kugeln sich reduziert, aber auch die Farbzusammensetzungen ändern sich ständig.
Hier soll die Wahrscheinlichkeit für n Ziehungen untersucht werden.

$$P(X_1=A) = s/N$$

$$P(X_2=A \mid X_1=A) = \frac{s-1}{N-1}$$

…

$$P(X_n=A \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \dots X_{n-1}=x_{n-1}) = \frac{s - \sum_{j=1}^{n-1} x_j}{N-(n-1)}$$

Für die Werte xi steht eine „1“, wenn das Ereignis A gemeint ist und eine „0“, wenn das Ereignis A gemeint ist. Damit wird im Zähler nur dass wieder eine „1“ abgezogen, wenn ein Ereignis A eintritt. Im Nenner wird immer eine „1“ abgezogen, da mit jeder Ziehung eine Kugel weniger in der Urne ist.

Eine analoge Formel kann man finden für das Ereignis $\overline{A}$.

$P(X_1 = \overline{A}) = (N-s)/N$ Wahrscheinlichkeit im 1. Schritt

$P(X_2 = \overline{A} \mid X_1=\overline{A}) = \frac{N-s-1}{N-1}$ Wahrscheinlichkeit im 2. Schritt

…

$P(X_n=\overline{A} \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \dots X_{n-1}=x_{n-1}) = \frac{s - \sum_{j=1}^{n-1}(1-x_j)}{N-(n-1)}$ Wahrscheinlichkeit im n–ten Schritt

Mit dieser Formel wird im Zähler immer dann eine „1“ abgezogen, wenn das $x_i = 0$ ist. Damit reduziert sich der Zähler nur dann, wenn das Ereignis $\overline{A}$ eintritt.

Mit diesen beiden Formeln soll eine Formel hergeleitet werden, die die Wahrscheinlichkeit angibt, wenn mit n Ziehungen ohne Zurücklegen k positive und n-k negative Ereignisse eintreten. Damit hat man wieder die Formel für die Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades. Dazu kann man den Pfad betrachten, in dem die ersten k Ereignisse positiv sind und die letzten n-k Ereignisse negativ sind. Damit ergibt sich folgende Formel:

$P(X_n = x_n \mid X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_{n-1} = 0) =$

Aus den ersten k positiven Ereignissen ergibt sich:

$$\frac{s}{N} \quad \frac{s-1}{N-1} \quad \frac{(s-2)}{N-2} \quad \dots \quad \frac{(s-k+1)}{(N-k+1)}$$

Aus den folgenden n–k negativen Ereignissen ergibt sich:

$$\frac{N-s}{N-k} \quad \frac{N-s-1}{N-k-1} \quad \frac{N-s-2}{N-k-2} \; . \; . \; . \; \frac{N-s-(n-k-1)}{N-(n-1)}$$

Zähler und Nenner der beiden Ausdrücke sind Produkte von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Solche Produkte kann man als Fakultäten schreiben. Aber die Fakultäten sind nicht vollständig, da die Produkte nicht bis zum Faktor 1 fallen, sondern an unterschiedlichen Stellen vorher enden. Deshalb müssen die Werte ausgeglichen werden:

1. Zähler : $\frac{s!}{(s-k)!}$ 2. Zähler $\frac{(N-s)!}{(N-s-(n-k))!}$

Beim 1. Zähler fehlen die Faktoren von s–k bis 1 um einen Gesamtausdruck von s! zu erhalten, deshalb stehen diese fehlenden Faktoren als (s-k)! im Nenner. Bei dem zweiten Zähler fehlen die Faktoren von (N–s– (n–k–1)) bis 1 .
Diese Brüche lassen sich mit entsprechender Erweiterung auch in Binomialkoeffizienten umschreiben.

$$\frac{s!}{(s-k)!} = \frac{s! \quad k!}{(s-k)! \quad k!} = \binom{s}{k} k! \qquad \frac{(N-s)!}{(N-s-(n-k))!} = \frac{(N-s)! \quad (n-k)!}{(N-s-(n-k))! \; (n-k)!} = \binom{N-s}{n-k}(n-k)!$$

Der Nenner lässt sich als ein Produkt schreiben, da der der erste Faktor im zweiten Bruch direkt an den letzten Faktor des ersten Bruch anschließt:

$$N\,(N-1)\,(N-2) \dots (N-k+1) \qquad (N-k)\,(N-k-1)\,(N-k-2) \;\dots\; (N-(n-1)) = \binom{N}{n}\; n!$$

Mit den vorgenommenen Umwandlungen lassen sich die obigen zwei Brüche in anderer Form schreiben und noch weiter zusammenfassen:

$$\frac{\binom{s}{k}\,k!\,\binom{N-s}{n-k}(n-k)!}{\binom{N}{n}\,n!} = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \boxed{\frac{\binom{s}{k}\cdot\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}\cdot\binom{n}{k}}}$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades bei:

- N Kugeln davon
- s Kugeln von der gesuchten Farbe
- N – s Kugeln von anderer Farbe
- bei n Ziehung ohne Zurücklegen
- k Kugeln der gesuchten Farbe gezogen werden.

Die Anzahl aller Pfade ist die gleiche, wie bei der Binomialverteilung: $\binom{n}{k}$

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aller Pfade bei gleicher Ereignisanzahl:

$$\boxed{\frac{\binom{s}{k}\cdot\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Das ist die Formel für n – maliges Ziehen ohne Zurücklegen.

Analog zum Ziehen mit Zurücklegen für die Binomialverteilung kann man auch für die Hypergeometrische Verteilung die Formel aus der Kombinatorik herleiten. Im Gegensatz zur Binomialverteilung sind hier die Formeln „ohne Wiederholung“ zu benutzen.

Um aus s Kugeln der 1. Farbe k Kugeln auszuwählen, ohne Zurücklegen, ergibt die Anzahl

$$\boxed{\binom{s}{k}}$$

damit sind aus den verbleibenden N – s Kugeln bei n Ziehungen, bei denen schon k Kugeln der 1. Farbe gezogen sind, noch n – k Kugeln zu Ziehen, was zu der Anzahl

$$\boxed{\binom{N-s}{n-k}}$$

führt. Die beiden Ereignisse, die 1. Farbe zu ziehen und die 2. Farbe zu ziehen sind unabhängig, deshalb müssen die beiden Zahlen Multipliziert werden. (Das Ziehen der Kugeln der 1. Farbe hat keinen Einfluss auf das Ziehen der 2. Farbe. Es wird nur die Anzahl k beeinflusst, aber nicht das Ziehen.)

Die Gesamtzahl, aus N Kugeln insgesamt n Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen ist wieder nach dem Binomialkoeffizienten zu berechnen.

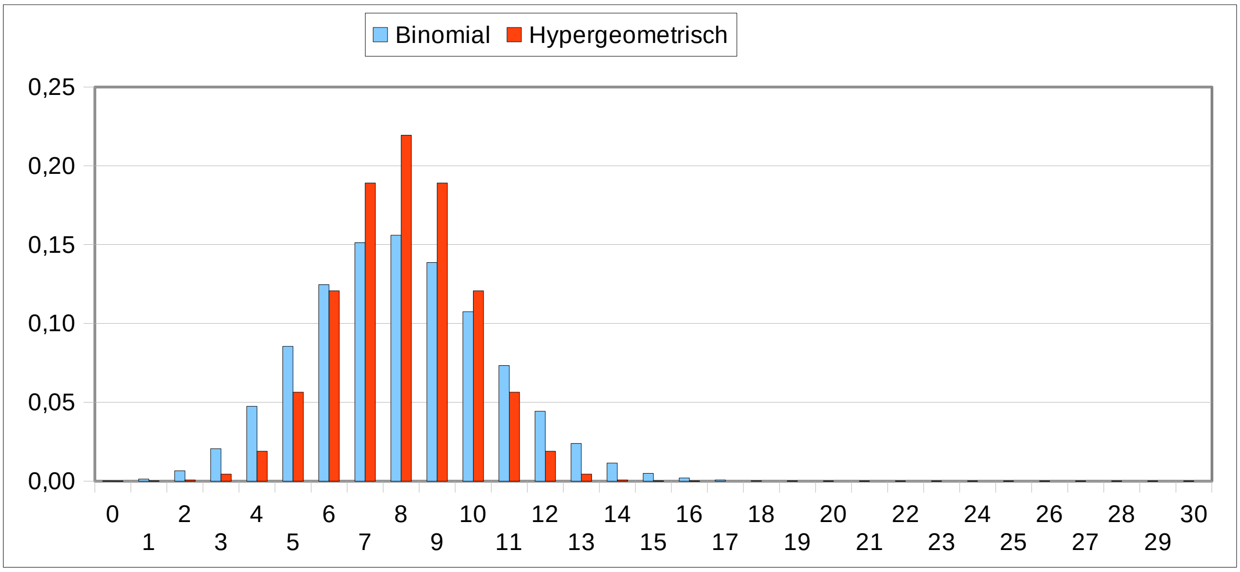
$$\binom{N}{n}$$

Damit lässt sich Wahrscheinlichkeit nach der Laplace – Definition wieder als Quotient der beiden Anzahlen ausdrücken.

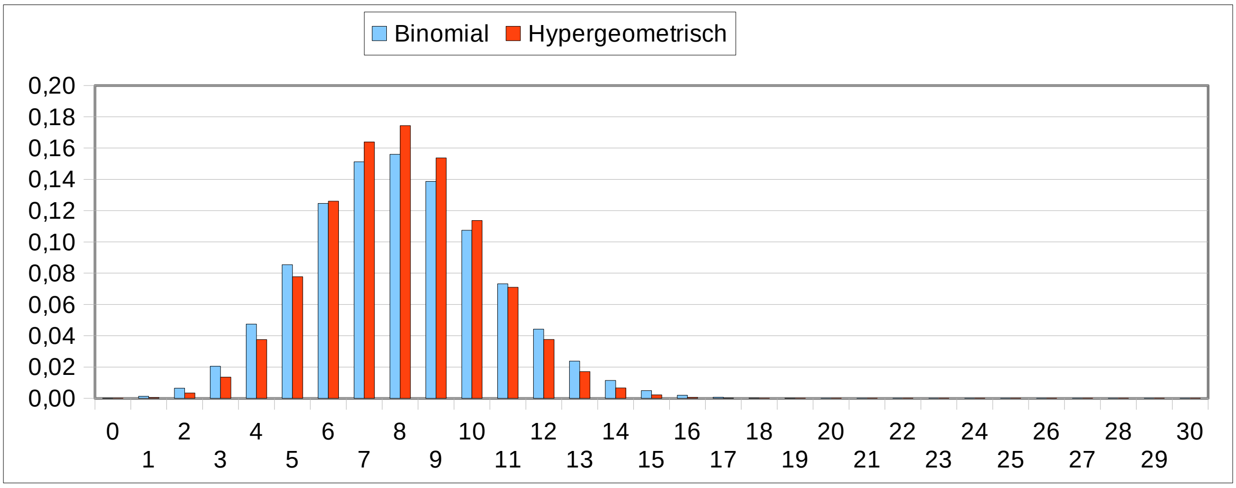
$$\frac{\binom{s}{k}\cdot\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

33.2.2 Eigenschaften der Dichtefunktion

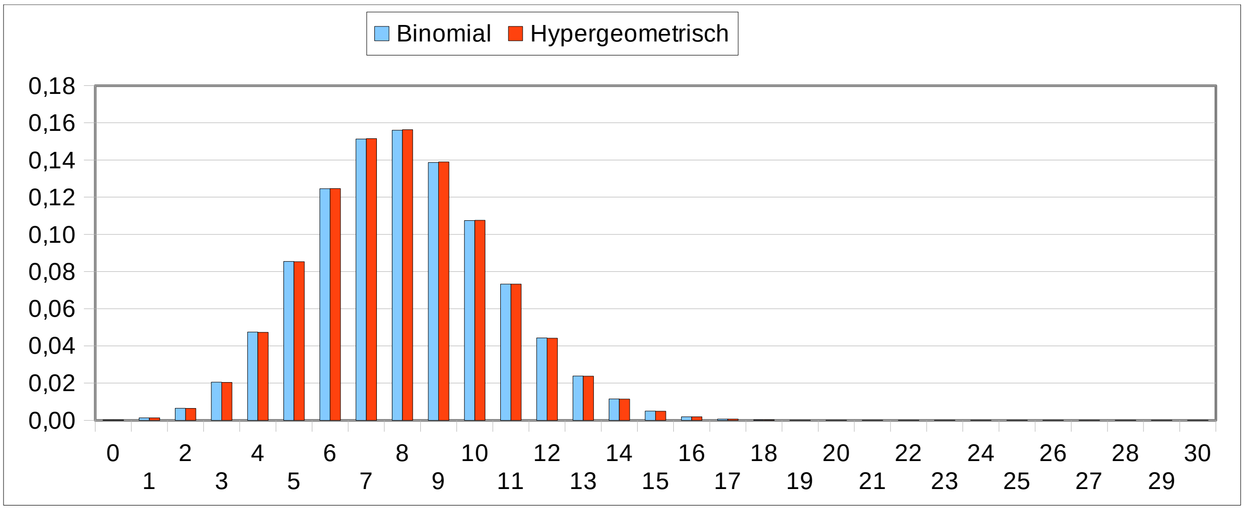
Die Dichtefunktion unterscheidet sich nicht wesentlich von der Dichtefunktion der Binomialverteilung. Die markantesten Unterschiede existieren für kleine n. Es lässt sich nachweisen, dass sich mit wachsendem n die hypergeometrische Verteilung der Binomialverteilung annähert.
Dazu sollen zunächst bei gleichem n = 40 und verschiedenen N Werten und gleichen Wahrscheinlichkeiten, wie sie bei der Binomialverteilung benutzt wurden, die beiden Kurvenbilder verglichen werden.



Bei einer Gesamtzahl von **N = 80** und einer Anzahl von positiven Ereignissen von s = 16 ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit für positive Ereignisse von 0,2. Für eine Anzahl von n = 40 ergeben sich die beiden Funktionen für Binomial und Hypergeometrisch. Die blauen Säulen zeigen die Binomialverteilung, die roten Säulen die hypergeometrische Verteilung. Es sind klare Unterschiede zu erkennen.



Für einen Wert von **N = 200** und positiven Ereignissen von s = 40 ergibt sich wieder eine Wahrscheinlichkeit von p = 0,2. Die Höhe der Säulen der beiden Funktionen sind geringer geworden. Die Anzahl der Ziehungen sind bei n = 40 geblieben.



Für einen Wert von **N = 10000** und positiven Ereignissen s = 2000 ergibt sich wieder eine Wahrscheinlichkeit von p = 0,2. Hier sind bei n = 40 die beiden Säulen nicht mehr zu unterscheiden.

Damit ändert sich auch das Verhalten der Verteilungsfunktion nicht wesentlich von der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung.

33.2.3 Erwartungswert

Der Erwartungswert einer hypergeometrischen Verteilung ergibt sich aus:

$$E(x)=n\cdot\frac{s}{N}$$

33.2.4 Varianz und Streuung

Die Varianz einer hypergeometrischen Verteilung

$$\mathbf{Var}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}\cdot(\mathbf{N}-\mathbf{s})\cdot(\mathbf{N}-\mathbf{n})}{\mathbf{N}^2\cdot(\mathbf{N}-1)} = \mathbf{n}\cdot\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{N}}\right)\cdot\left(1-\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{N}}\right)\cdot\frac{\mathbf{N}-\mathbf{n}}{\mathbf{N}-1}$$

Die Streuung ergibt sich wieder aus der Quadratwurzel der Varianz. Die beiden Werte in den Klammern entsprechen den Werten p und q aus der Binomialverteilung.

33.2.5 Verallgemeinerte Hypergeometrische Verteilung

Die hypergeometrische Verteilung geht, wie die Binomialverteilung, davon aus, dass es nur zwei Realisierungen gibt, entweder das Ereignis tritt ein oder es tritt nicht ein. Eine weitere Unterscheidung ist nicht vorgesehen.
Jetzt soll untersucht werden, wie sich die Wahrscheinlichkeit darstellt, wenn in einer Urne mehrere Farben sind und es sollen eine bestimmte Anzahl jeder Farbe gezogen werden – natürlich ohne zurücklegen .

Beispiel:

> Einer Urne mit genau N = 70 Kugeln (M_1 = 20 weißen, M_2 = 35 roten, M_3 = 10 blauen und M_4 = 5 gelben Kugeln) werden nacheinander genau 13 Kugeln "auf gut Glück" und ohne Zurücklegen entnommen.
> Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass sich unter den 13 entnommenen Kugeln genau fünf weiße, fünf rote, zwei blaue und eine gelbe Kugel befinden?

Diese Aufgabestellung kann man als ein vierstufiges Experiment darstellen.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lassen sich 5 weiße Kugeln aus insgesamt 70 Kugeln bei 13 maligem Ziehen ohne Zurücklegen ziehen. Das ist eine klassische Aufgabenstellung der hypergeometrischen Verteilung.

$$\frac{\binom{20}{5}\cdot\binom{50}{8}}{\binom{70}{13}}$$

2. 8 Kugeln werden mit einer anderen Farbe gezogen als weiß und 50 andersfarbige Kugel als weiß sind in der Urne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man aus den verbleibenden 50 Kugeln bei 8 maligem Ziehen ohne Zurücklegen aus den 35 roten Kugeln 5 rote Kugeln ziehen

$$\frac{\binom{35}{5}\cdot\binom{25}{3}}{\binom{50}{8}}$$

Die Ereignisse sind unabhängig, da nach dem ersten Ziehen z.B. alle weißen Kugeln entnommen werden und die zweite Ziehung ohne weiße Kugeln stattfindet. Damit hängt die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der roten Kugel nicht von der der weißen ab. Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ereignisse müssen multipliziert werden. Da ergibt für die ersten beiden stufen folgendes Ergebnis:

$$\frac{\binom{20}{5}\cdot\binom{50}{8}}{\binom{70}{13}}\cdot\frac{\binom{35}{5}\cdot\binom{25}{3}}{\binom{50}{8}}=\frac{\binom{20}{5}\cdot\binom{35}{5}\cdot\binom{25}{3}}{\binom{70}{13}}$$

Der Nenner der 2. Stufe kürzt sich mit einem Faktor des Zählers der ersten Stufe, die die Anzahl der „nicht weißen Kugeln" der ersten Stufe genau die Gesamtzahl der zweiten Stufe darstellen. Damit entstehen im Zähler drei Faktoren: Der erste Faktor gibt die Ziehung von 5 weißen aus 20 verfügbaren an, der zweite Faktor gibt die Ziehung von 5 roten aus 35 verfügbaren an, der dritte Faktor ist der Rest. Der Nenner ist die Gesamtzahl aller möglichen Ziehungen von 13 Kugeln aus 70.
Nimmt man den dritten Faktor für den Rest in gleicher Weise auseinander ergeben sich dort für die zwei blauen und die eine gelbe noch einmal zwei Binomialkoeffizienten: „Anzahl der in dieser Farbe vorhandenen Kugeln" über „Anzahl der zu ziehenden Kugeln dieser Farbe". Damit entsteht für das Beispiel folgende endgültige Lösung:

$$P(A) = P(X_1 = 5, X_2 = 5, X_3 = 2, X_4 = 1) = \frac{\binom{20}{5}\cdot\binom{35}{5}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{70}{13}}$$

In diesem Fall spricht man von der verallgemeinerten hypergeometrischen Verteilung.

Zusammenfassung:

Wahrscheinlichkeit aus einer Menge von R roten, W weißen, B blauen und S schwarzen Kugeln r rote , w weiße , b blaue und s schwarze Kugeln zu ziehen

- ohne Zurücklegen
- <u>ohne</u> Reihenfolge

$$\frac{\binom{\mathbf{R}}{\mathbf{r}}\cdot\binom{\mathbf{W}}{\mathbf{w}}\cdot\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{b}}\cdot\binom{\mathbf{S}}{\mathbf{s}}}{\binom{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}}$$

33.2.6 Verteilung – ohne Zurücklegen ; mit Beachtung der Reihenfolge

Aus der Binomialverteilung ist die Anzahl der zu berücksichtigenden Pfade bekannt. In dieser Formel „ohne Reihenfolge“ tritt aber die Anzahl der Pfade nicht auf. Das bedeutet, man kann hier keinen Wert kürzen, sondern man muss durch die Anzahl der Pfade zusätzlich dividieren, will man die Wahrscheinlichkeit „mit Reihenfolge“ berechnen. Denn auch in diesem Fall ist jeder Pfad für sich getrennt zu sehen. Damit ergibt sich folgende Formel.

Wahrscheinlichkeit aus einer Menge von R roten, W weißen, B blauen und S schwarzen Kugeln r rote , w weiße , b blaue und s schwarze Kugeln zu ziehen

- ohne Zurücklegen
- mit Reihenfolge

$$\frac{r!\cdot w!\cdot b!\cdot s!}{n!}\cdot\frac{\binom{R}{r}\cdot\binom{W}{w}\cdot\binom{B}{b}\cdot\binom{S}{s}}{\binom{N}{n}}$$

Es wird hier mit dem Kehrwert der Anzahl der Pfade multipliziert und damit durch die Anzahl dividiert. Man kann die Fakultätsausdrücke des linken Bruchs auch zu den Binomialkoeffizienten setzen, in denen die jeweiligen Anzahlen vorhanden sind:

$$\frac{\binom{R}{r}\cdot r!\cdot\binom{W}{w}\cdot w!\cdot\binom{B}{b}\cdot b!\cdot\binom{S}{s}\cdot s!}{\binom{N}{n}\cdot n!}$$

Löst man den ersten Binomialkoeffizienten auf in seine Fakultätsausdrücke ergibt sich

$$\binom{R}{r}\cdot r! = \frac{R!\cdot r!}{(R-r)!\cdot r!} = \frac{R!}{(R-r)!}$$

Was übrig bleibt sind die Kombinatorikformeln für „ohne Zurücklegen; mit Reihenfolge“, so daß man die obige Formel auch umschreiben kann in:

$$\frac{\frac{R!}{(R-r)!}\cdot\frac{W!}{(W-w)!}\cdot\frac{B!}{(B-b)!}\cdot\frac{S!}{(S-s)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}$$

Diese Ausdrücke lassen sich auch mit dem Taschenrechner berechnen. Dazu gibt es die Funktion nPr . Die Eingabe 8 P 3 berechnet genau einen der fünf angegebenen Brüche..

33.2.7 Zusammenfassung diskrete Wahrscheinlichkeit

Beispiel:
M = 5 rote Kugeln k = 3 rote ziehen
N = 13 Kugel insgesamt (8 blaue) n = 8 Kugeln ziehen (5 blaue)

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
mit Reihenfolge	$P = \dfrac{\dfrac{M!}{(M-k)!} \cdot \dfrac{(N-M)!}{(N-M-(n-k))!}}{\dfrac{N!}{(N-n)!}}$ Beispiel: **Kombinatorikformeln** $\dfrac{\dfrac{5!}{(5-3)!} \cdot \dfrac{8!}{(8-5)!}}{\dfrac{13!}{(13-8)!}} = \dfrac{\dfrac{5!}{2!} \cdot \dfrac{8!}{3!}}{\dfrac{13!}{5!}}$ **Zählprinzip** $\frac{5}{13}\,\frac{4}{12}\,\frac{3}{11}\,\frac{8}{10}\,\frac{7}{9}\,\frac{6}{8}\,\frac{5}{7}\,\frac{4}{6}$ ein Pfad im Baumdiagramm	$P = \dfrac{M^k (N-M)^{n-k}}{N^n} = \dfrac{M^k}{N^k}\,\dfrac{(N-M)^{n-k}}{N^{n-k}} = p^k\, q^{n-k}$ Beispiel: **Kombinatorikformeln** $\dfrac{5^3\,(13-5)^{8-3}}{13^8} = \dfrac{5^3}{13^3}\,\dfrac{(13-5)^{8-3}}{13^{8-3}} = \left(\dfrac{5}{13}\right)^3 \left(\dfrac{8}{13}\right)^5$ **Zählprinzip** $\frac{5}{13}\,\frac{5}{13}\,\frac{5}{13}\,\frac{8}{13}\,\frac{8}{13}\,\frac{8}{13}\,\frac{8}{13}\,\frac{8}{13}$ ein Pfad im Baumdiagramm
ohne Reihenfolge	**Hypergeometrische Verteilung** $P = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ Beispiel : **Kombinatorikformeln** $\dfrac{\binom{5}{3}\binom{13-5}{8-3}}{\binom{13}{8}} = \dfrac{\binom{5}{3}\binom{8}{5}}{\binom{13}{8}}$ **Zählprinzip** $\binom{13}{3}\ \frac{5}{13}\,\frac{4}{12}\,\frac{3}{11}\,\frac{8}{10}\,\frac{7}{9}\,\frac{6}{8}\,\frac{5}{7}\,\frac{4}{6}$ alle Pfade mit 3 rot und 5 blau	**Binomialverteilung** $P = \binom{n}{k}\left(\dfrac{M}{N}\right)^k \left(\dfrac{N-M}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k}$ Beispiel : **Kombinatorikformeln** $\binom{13}{3}\left(\dfrac{5}{13}\right)^3 \left(\dfrac{13-5}{13}\right)^5 = \binom{13}{3}\left(\dfrac{5}{13}\right)^3 \left(\dfrac{8}{13}\right)^5$ **Zählprinzip** $\binom{13}{3}\ \frac{5}{13}\,\frac{5}{13}\,\frac{5}{13}\,\frac{8}{13}\,\frac{8}{13}\,\frac{8}{13}\,\frac{8}{13}\,\frac{8}{13}$ alle Pfade mit 3 rot und 5 blau

33.3 Normalverteilung

33.3.1 Zentraler Grenzwertsatz von Moivre – Laplace

Für die folgenden Seiten ist die Gültigkeit dieses Grenzwertsatzes von entscheidender Bedeutung. Grenzwertsätze gehören zu den wichtigsten Aussagen der Stochastik. Wie es schon sein Name zum Ausdruck bringt, kommt dabei dem Zentralen Grenzwertsatz, der eine theoretische Erklärung für das Auftreten der Normalverteilung liefert, eine besondere Stellung zu. Die älteste Fassung des Zentralen Grenzwertsatzes in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der Grenzwertsatz von MOIVRE-LAPLACE, der die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung beschreibt.
Praktisch wird dieser Satz vor allem zum näherungsweisen Berechnen von Binomialwahrscheinlichkeiten benutzt.

Grenzwertsatz von Moivre - Laplace:
Ist X eine binomialverteilte Zufallsgröße, die nach Bn;p verteilt ist, dann gilt:
1) Für wachsendes n ($n \to \infty$) nähert sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung (Wahrscheinlichkeit für einzelne Ereignisse) der Dichtefunktion der Normalverteilung an.
2) Für wachsendes n ($n \to \infty$) nähert sich die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung (Wahrscheinlichkeit für summierte Ereignisse) der Verteilungsfunktion der Normalverteilung an.

Dieser Satz besagt nicht, daß mit größer werdendem n aus der Binomialverteilung die Normalverteilung wird, sondern besagt, daß für größer werdendes n die beiden Verteilungen so gut wie nicht mehr zu unterscheiden sind. Aus diesem Grund wird bei großen n nicht mehr mit der Binomialverteilung gerechnet, sondern mit der Normalverteilung. Die Praxis hat gezeigt, daß für diese Umwandlung $\sigma > 3$ sein sollte, sonst gibt es doch einige Abweichungen. Das bedeutet, daß die Streuung nicht sehr klein sein sollte, also die Kurve nicht zu schmal und die Binomialverteilung nicht zu nahe an den Rand gedrückt werden sollte, da dann die Wahrscheinlichkeitsfunktion zu deformiert wird.
Es gelten folgende Formeln:

$$B_{n;p}\,(X = k) \approx \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$ Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichtefunktion)

$$F_{n;p}\,(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}\right)$$ Verteilungsfunktion

Bemerkung:
1. Bei stetigen Verteilungsfunktionen wie der Normalverteilung spricht man an Stelle von „Wahrscheinlichkeitsfunktion“ von einer „Dichtefunktion“, wie dicht zusammen die Einzelwerte liegen. Zur deutlichen Unterscheidung zur Verteilungsfunktion benutzt man diesen Begriff manchmal auch für diskrete Verteilungen.
2. Der Summand 0,5 in der zweiten Formel ist die sogenannte Stetigkeitskorrektur. Man kann die Formel auch ohne die 0,5 benutzen.
3. μ und σ sind der Erwartungswert und die Streuung der Binomialverteilung

33.3.2 Wechsel von der Binomialverteilung zur Normalverteilung

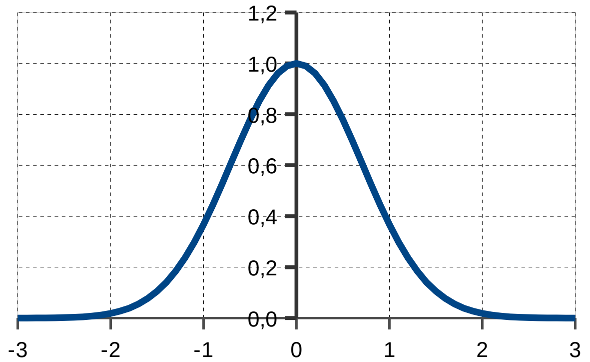
Bei der Berechnung de Erwartungswertes und der Streuung stellt man bei der Binomialverteilung schnell fest, dass die entstehenden Dezimalzahlen bei der Umsetzung und der Interpretation Probleme bereiten. Diese Probleme resultieren daraus, dass die Binomialverteilung eine sogenannte diskrete Verteilung ist, die nur für ganzzahlige x – Werte definiert ist.

Durch die Benutzung einer stetigen Verteilung, die auch für reelle x – Werte definiert ist, würde dieses Problem nicht auftreten. Deshalb versucht man aus der Binomialverteilung eine stetige Verteilung zu erzeugen, die aber trotzdem die Werte der Binomialverteilung widerspiegelt. Für diesen Wechsel ist die Gültigkeit des Zentralen Grenzwertsatzes die Voraussetzung.

Zum Einstieg der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bereits bekannt: Für eine wachsende Anzahl von Versuchen konvergiert die Häufigkeit des Ereignisses gegen die Wahrscheinlichkeit. Der Zentrale Grenzwertsatz ist damit eine Erweiterung. Es konvergiert nicht nur die Wahrscheinlichkeit, sondern auch der Mittelwert und die Streuung gegen die Normalverteilung. Daraus resultiert, dass viele Probleme mit Hilfe der Normalverteilung gelöst werden, obwohl sie zunächst einer anderen Verteilung zuzuordnen sind.

Deshalb löst man auch viele Probleme der Binomialverteilung mit der Normalverteilung.

Die Grundgleichung der Normalverteilung lautet : $\boxed{y = e^{-x^2}}$



Die Funktion sieht dem Säulendiagramm einer Binomialverteilung schon sehr ähnlich. Die höchste Stelle der Funktion ist die Stelle des **Erwartungswertes**. Bei der Binomialverteilung ist aber auch noch die Summe über alle Säulen gleich 1, da das die Gesamtwahrscheinlichkeit darstellt. Für diese Funktion würde das bedeuten, dass die Fläche unter der Funktion gleich 1 ist. Das wird wahrscheinlich nicht der Fall sein. Zunächst werden die Wendepunkte auf den Wert 1 gebracht. Die Wendepunkte kennzeichnen die Streuung der Wahrscheinlichkeit.

Für die Wendepunkte benötigt man die 2. Ableitung der Funktion:

$$y' = -2x\, e^{-x^2}$$
$$y'' = -2\,(e^{-x^2} - 2x^2\, e^{-x^2})$$
$$y'' = -2\, e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$
$$x_{w1} = -\sqrt{½} \qquad x_{w2} = +\sqrt{½}$$

Das bedeutet, wenn im Exponenten statt $-x^2$ stehen würde $-½\, x^2$ ändert sich die Ableitung und die Wendepunkte liegen bei +1 und –1 .

Damit ist lautet die angepaßte Funktion : $\boxed{y = e^{-\frac{1}{2}x^2}}$

Um die Fläche unter einer Funktion zu bestimmen, muss man die Funktion integrieren. Unglücklicher Weise kann man für diese Funktion keine Stammfunktion in einem geschlossenen Ausdruck angeben, so dass diese Funktion früher nur über Tabellen behandelt werden konnte. Um noch einmal Klarheit zu schaffen:

- es gibt auch für diese Funktion eine Stammfunktion
- man kann diese Funktion aber nicht mit den üblichen Integrationsmethoden bestimmen.

Für den GTR ist das kein Problem, da er sowieso keine Stammfunktionen berechnen kann, sondern die Flächeninhalt tatsächlich über die „Streifenmethode“ für bestimmte Integrale berechnet.

Es hat sich gezeigt, dass die Fläche unter der Funktion genau den Wert $\sqrt{2\pi}$ hat.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2 \cdot \pi}$$

Damit die Fläche unter der Kurve gleich 1 ist, muß durch diesen Wert dividiert werden. Damit ergibt sich die **Dichtefunktion der Standard Normalverteilung** zu:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

mit den Eigenschaften:

- der Mittelwert (Erwartungswert) ist 0
- die Wendepunkte (Streuung) sind bei ± 1
- die Fläche unter der Kurve (summierte Wahrscheinlichkeit) ist gleich 1.

Bildet man von dieser Funktion die 1. Ableitung erhält man:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} = \boxed{-x\ \varphi(x)} \qquad x_E = 0$$

Die 1. Ableitung ist also die Funktion wieder selbst multipliziert mit – x .
Der Extremwert (Erwartungswert) liegt bei x = 0.

Für die 2. Ableitung ergibt sich:

$$\varphi''(x) = -\varphi(x) - x\, \varphi'(x)$$

$$\boxed{\varphi''(x) = (-1 + x^2)\, \varphi(x)} \qquad x_{w1} = -1 \qquad x_{w2} = +1$$

Auch die 2. Ableitung läßt sich durch die Ausgangsfunktion ausdrücken und die Wendepunkte (Streuung) der Funktion liegen bei x= -1 und x = 1. Deshalb bezeichnet man diese Funktion als Standard Normalverteilung.

33.3.3 Allgemeine Normalverteilung

Es läßt sich aber auch eine verallgemeinerte Funktion dazu finden, die die Binomialverteilung besser widerspiegelt. Für größer werdendes n (Anzahl) oder größer werdendes p wandert der Erwartungswert weiter nach rechts. Ein weiteres Problem ist, dass der Erwartungswert einer Binomialverteilung nicht im Nullpunkt liegt und deshalb muß die Funktion so verschoben werden, damit das Maximum bei dem Wert μ liegt. (*Bei Verallgemeinerungen von Funktionen führt ein Ausdruck (x – c) immer zu einer Verschiebung der Funktion in x Richtung um c Einheiten*)

Eine Verschiebung der Funktion auf den Erwartungswert μ führt zu der Funktion

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$$

Bis dahin haben wir erreicht, dass der Erwartungswert bei μ liegt. Jetzt muß noch gesichert werden, dass die Streuung bei σ und die Fläche unter der Kurve den Wert 1 hat, da diese Fläche die Verteilungsfunktion darstellt und als Gesamtsumme den Wert 1 haben muß.

(Bei Verallgemeinerungen von Funktionen führt ein Ausdruck bx immer zu einem Strecken und Stauchen in x Richtung. b > 1 drückt die Funktion zusammen und b < 1 zieht die Funktion auseinander. Wenn σ > 1 ist, ist 1/ σ < 1)

Der Erwartungswert liegt bei μ und der Ausdruck x – μ erreicht, dass der Erwartungswert damit auf 0 liegt. Jetzt geht es um einen Faktor vor dem x, der ein Strecken/ Stauchen in x – Richtung bewirkt, so dass der Wendepunkt bei x = σ liegt.

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2}$$

$$\varphi'(x) = -b\,(x-\mu)\, e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2}$$

$$\varphi''(x) = -b\, e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2} + b^2 (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2}$$

$$\varphi''(x) = \left(-b + b^2 (x-\mu)^2\right) \; e^{-\frac{1}{2} b (x-\mu)^2}$$

Für den Wendepunkt die 2. Ableitung Null setzen, es reicht, wenn man die Klammer Null setzt.

$$-b + b^2 (x-\mu)^2 = 0$$

$$b\,(x-\mu)^2 = 1$$

$$(x-\mu)^2 = \frac{1}{b}$$

$$x - \mu = \pm\sqrt{\frac{1}{b}} = \sigma$$

(σ ist nicht der tatsächliche x Wert des Wendepunktes , sondern ist der Abstand des Wendepunktes zum Erwartungswert, damit nicht x, sondern x – μ)
Durch Quadrieren der Gleichung und Multiplizieren mit b erhält man folgende Gleichung

$b\ \sigma^2 = 1$ und nach Auflösung ergibt sich $\quad b = \frac{1}{\sigma^2}$

Damit ändert sich aber die Funktion und somit auch die Fläche unter der Funktion. Die Fläche unter der Funktion muß aber nach wie vor 1 bleiben.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \qquad t = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sigma} \qquad dx = \sigma\, dt$$

Intergrationsmethode „Substitution“, in Schule wieder mal nicht behandelt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma\, dt = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sigma \cdot 1$$

deshalb muß der Vorfaktor ergänzt werden zu : $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

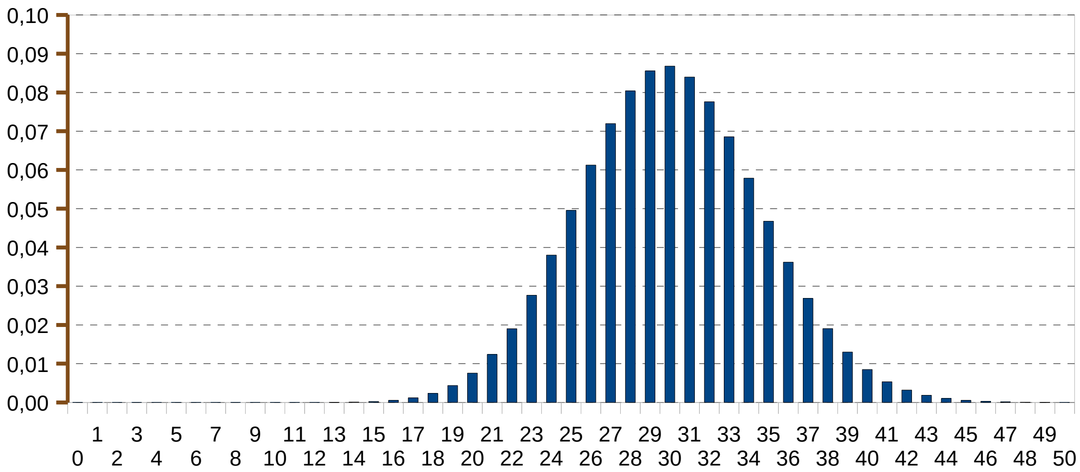
dann ist die Fläche unter der Kurve wieder 1.

Mit diesem Wert ergibt sich als Funktion der Normalverteilung zu einer vorgegebenen Binomialverteilung

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

33.3.4 Das Kurvenbild der Binomialverteilung und der Normalverteilung.

Für das Kurvenbild der Binomialverteilung wurden die Werte n = 100 und p = 0,3 benutzt.

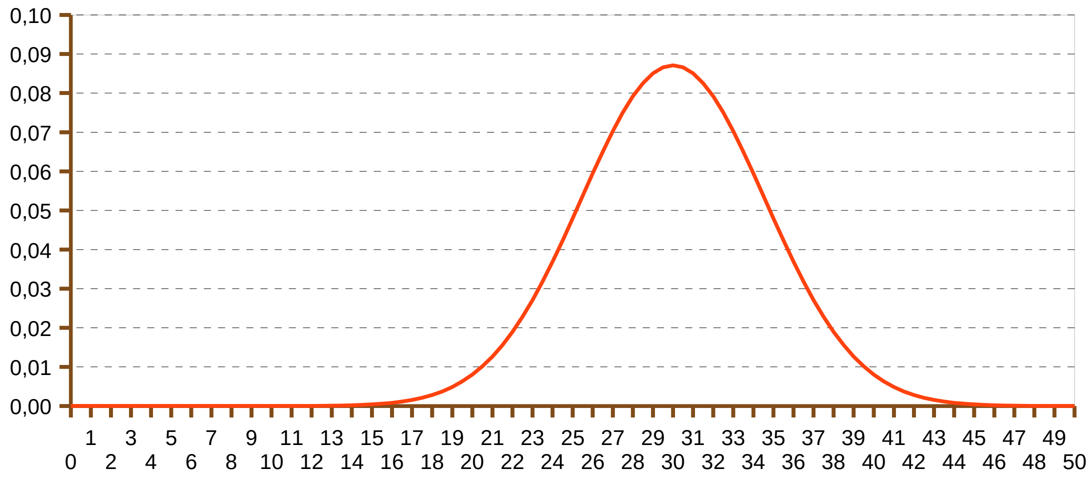


Die Werte n = 100 und p = 0,3 führen zur den Werten μ = 30 und σ = 4,58.

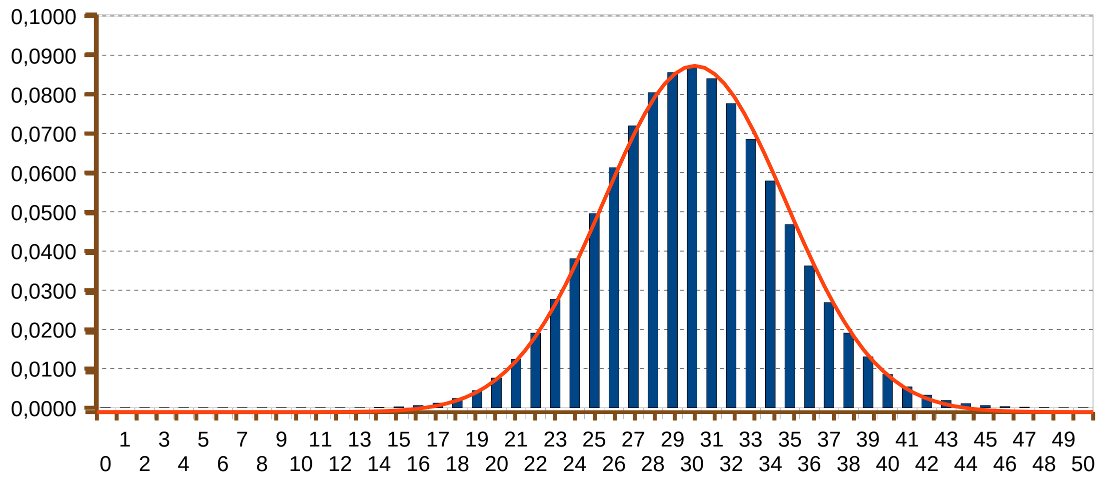
und diese zu einer Normalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{4{,}58\sqrt{2\cdot\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-30}{4{,}58}\right)^2}$$

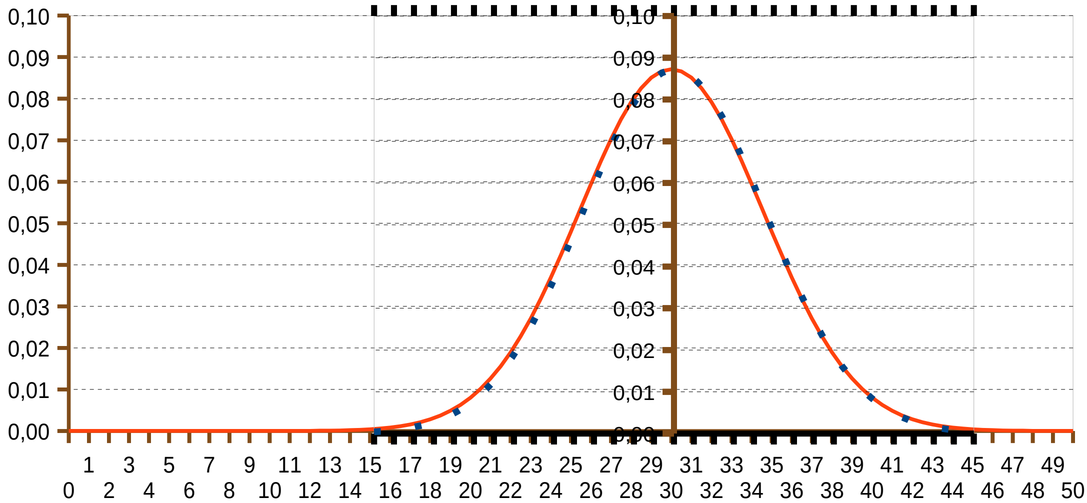
Diese Funktion liefert folgendes Kurvenbild



Legt man die beiden Funktionen übereinander ergibt sich :



Da die Funktionsverschiebung um μ die Funktion nicht streckt oder staucht, kann man die ursprüngliche Funktion auch auf die y – Achse verschieben und es ergeben sich links und rechts vom Erwartungswert, der jetzt 0 ist, das gleiche Kurvenbild.
Im unten abgebildeten Kurvenbild ist die rote Kurven die gleiche, wie auf der vorherigen Seite. Die blau punktierte Linie ist die Kurven mit dem gleichen σ aber dem Erwartungswert 0. Die x Achse der blau punktierten Kurve ist oberhalb der Kurven angegeben. Positioniert man beide Kurven genau über dem Erwartungswert, die 0 der blauen Kurven muß auf der 30 der roten Kurven liegen und stellt bei beiden Kurven die gleiche Breite ein, hier jeweils 15 nach links und rechts, sind die Kurven Deckungsgleich.



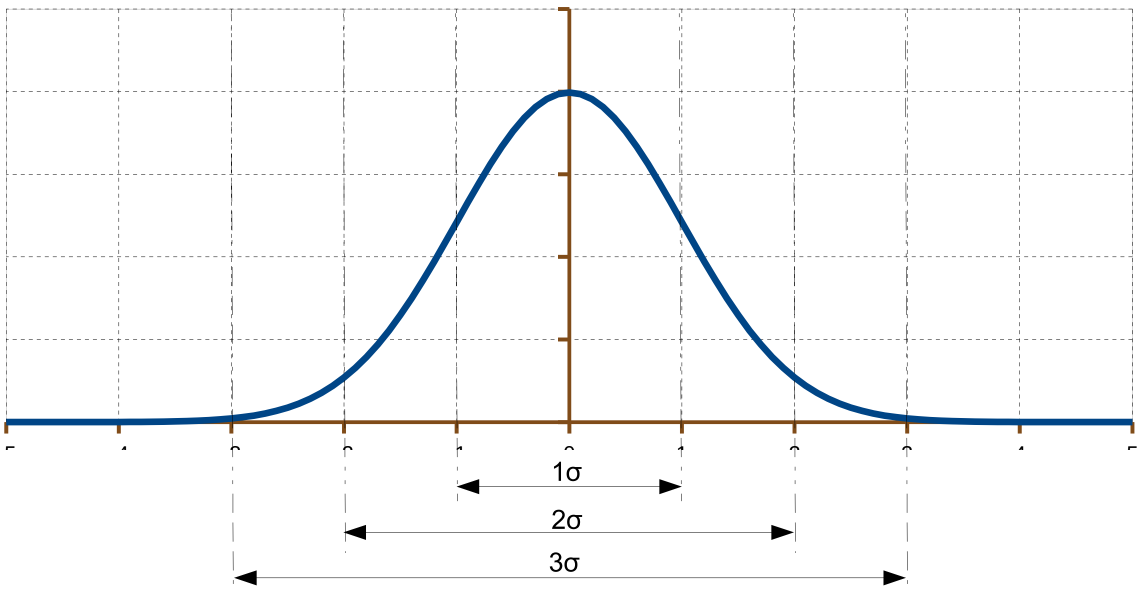
Bei dieser Normalverteilungsfunktion kann man folgende Eigenschaften feststellen:

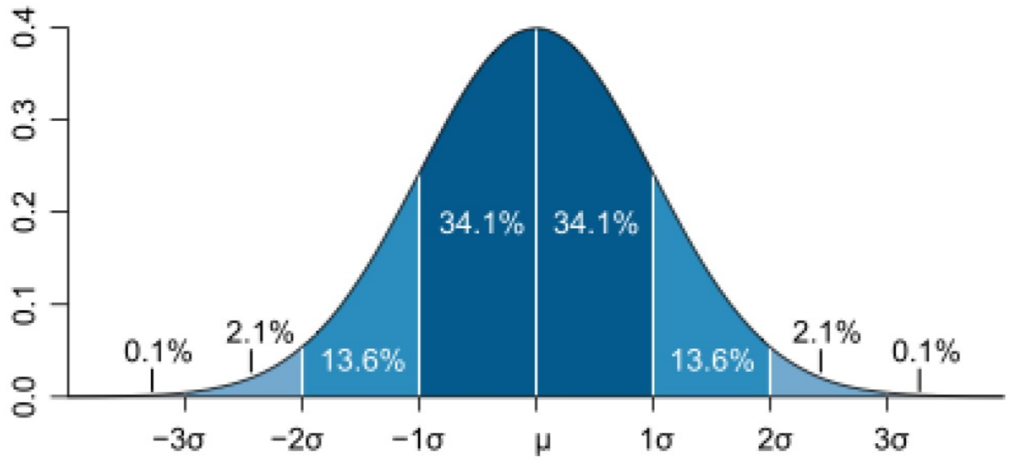
- Die Funktion ist symmetrisch zu Erwartungswert.
- Die Fläche unter der Kurve links und rechts vom Erwartungswert ist gleich, nämlich ½ (Die Fläche ist gleich der Verteilungsfunktion und die muß insgesamt 1 sein.)
- Betrachtet man einen beliebigen, aber festen Abstand (k Wert) vom Erwartungswert, sind die Flächen bis zu Erwartungswert gleich und die Flächen außerhalb des gewählten k Wertes sind auch gleich.

Was nicht so leicht nachzuweisen ist, da es für die Fläche keine Stammfunktion gibt, ist die Tatsache,

- unabhängig, wie groß das σ ist, sind die Flächen unterhalb der Kurven, gemessen in σ Abständen immer gleich

In σ – Abständen gemessen hat man unter der Kurven immer den gleichen Flächeninhalt. Das führt dazu, daß man sich bei seinen Berechnungen auf die Standard Normalverteilung beschränken kann, die $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ hat und man kann alle Aussagen aus dieser Verteilung beziehen, solange man sich nicht auf konkrete k Werte bezieht, sondern nur auf Vielfache von σ . Diese Vielfachen von σ lassen sich dann einfach auf die konkreten Verteilungen übertragen.





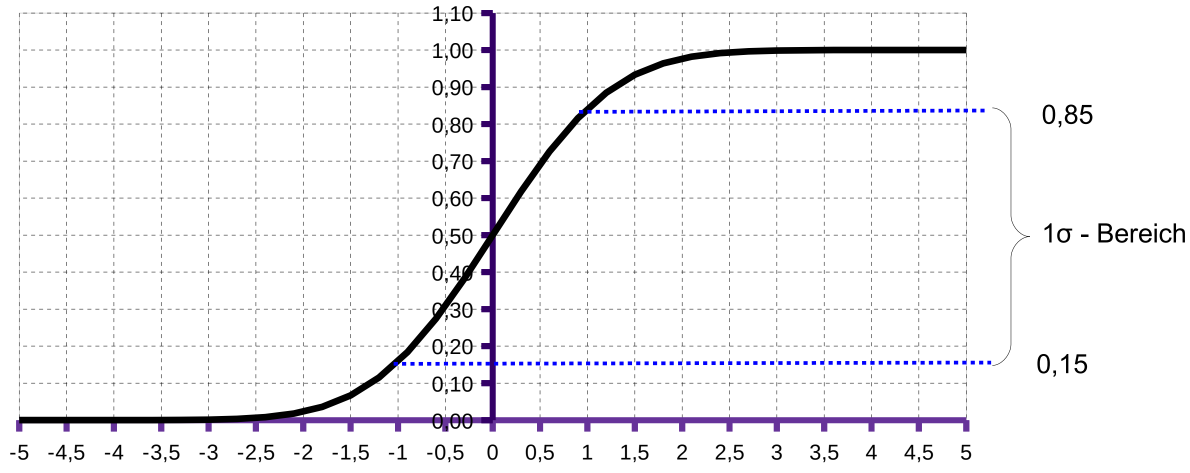
Berechnungen haben gezeigt, daß

- das Intervall μ ± 1 · σ enthält etwa 68% der Gesamtfläche,
- das Intervall μ ± 2 · σ enthält etwa 95% der Gesamtfläche
- das Intervall μ ± 3 · σ enthält etwa 99% der Gesamtfläche

betragen.

33.3.5 Die Verteilungsfunktion der Standardisierten Normalverteilung

Die Fläche unter der Dichtefunktion gibt gleichzeitig den Wert der Verteilungsfunktion an. Die Verteilungsfunktion ist monoton wachsend, da es nur Flächenteile oberhalb der x – Achse gibt. Ihr kleinster Wert bei - ∞ ist 0 und ihr größter Wert bei + ∞ ist 1. Die Stelle x = 0, die den Extremwert der Funktion φ (x) darstellt ist damit der Wendepunkt der Stammfunktion.
Die Verteilungsfunktion für die Standard Normalverteilung hat folgendes Aussehen:



Der 1σ Bereich umfasst die y – Werte von x = - 1 bis x = +1. Diese beiden Werte sind die Wendepunkte von φ(x) und damit die Grenzen des 1σ Bereichs. Die Wahrscheinlichkeit des 1σ Bereichs ist die Differenz der beiden Wahrscheinlichkeiten an diesen Punkten. Bereits an dieser etwas groben Zeichnung sieht man, daß diese Differenz etwas 0,7 betragen muß.

In Anlehnung an die **Dichtefunktion φ(x)** bezeichnet man die **Verteilungsfunktion mit Φ(x)** . Verteilungsfunktionen erhalten immer den Großbuchstaben der Bezeichnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion. Deshalb sollten diese auch immer mit einem Kleinbuchstaben bezeichnet werden.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Der etwas unhandliche Ausdruck der Dichtefunktion und der nicht vorhandene Funktionsausdruck für die Verteilungsfunktion führten dazu, daß man diese Werte immer nur aus Tabellen ablesen konnte. Die heute verfügbaren Taschenrechner haben damit ein Ende gemacht. Jeder einigermaßen gute Taschenrechner bietet die Möglichkeit die Werte zu berechnen. Übliche Bezeichnungen für die beiden Funktionen sind immer der Name der Verteilungsfunktion und daran angehängt ein „pdf“ für die Dichtefunktion und ein „cdf“ für die Verteilungsfunktion.
Bei guten Taschenrechnern kann man bei der Verteilungsfunktion eine untere und eine obere Grenze eingeben. Damit kann man Wahrscheinlichkeiten beliebiger Bereiche berechnen. Läßt der Taschenrechner nur die Eingabe einer oberen Grenze (die meisten Schultaschenrechner) zu, muß man die Differenz selbst berechnen.

33.3.6 Berechnung des Sigma - Bereiches

Die Berechnung der der Wahrscheinlichkeiten der Sigma Bereiche stellt damit kein Problem mehr dar. Man könnte sogar die Wahrscheinlichkeit für den 1,6534 σ Bereich berechnen.
Das Problem stellt die Umkehrung dar.
Man hat eine Verteilung, z.B. eine Binomialverteilung mit bekanntem μ und σ. Die Frage ist jetzt:

> Wie weit muß mein er Bereich gehen, damit die Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Ereignisse 95% betragt.

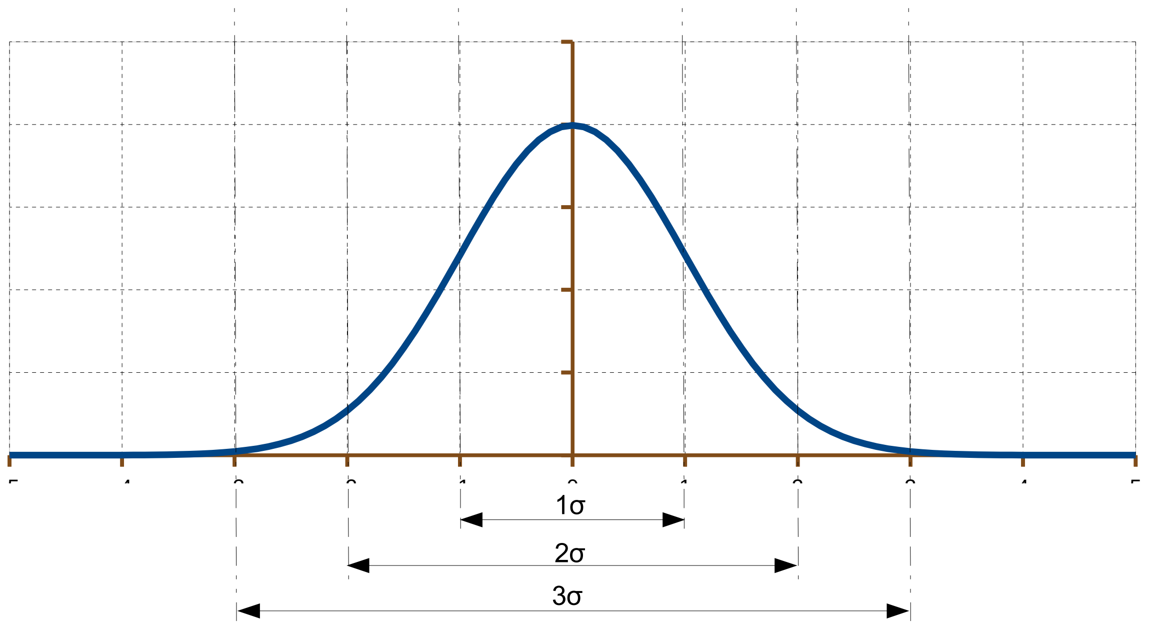
Anders formuliert:

> Wie groß muß das k sein, damit die summierte Wahrscheinlichkeit von 0 bis k gleich 0.95 beträgt.

Andere Fragestellung:

> Wie groß muß mein k sein. damit die Wahrscheinlichkeit für alle Ereignisse, die größer als diese k sind höchsten 5% beträgt.

Hier sind die summierten Wahrscheinlichkeiten gegeben und es sind die er Bereiche gesucht, die diesen Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Genau das machen die Hypothesentests.
Was man hier braucht sind die sogenannten α Quantile. Der Begriff kommt aus der Statistik (nicht Wahrscheinlichkeit) und gibt die Bereiche an, deren Häufigkeit des Auftretens größer oder kleiner dem angegebenen α entsprechen.
Unter Verwendung der σ- Regel liegt ein bestimmter Anteil der Ereignisse innerhalb eines Vielfachen des σ Bereichs. Für jede Sicherheitswahrscheinlichkeit kann man einen Faktor für das σ finden, so dass ein Bereich gekennzeichnet wird, in dem die geforderte Anzahl von Ereignissen liegt



$$P(\mu - c\sigma ; \mu + c\sigma) = 1 - \alpha = \beta$$

Dabei stellt β die **Sicherheitswahrscheinlichkeit** und α die **Irrtumswahrscheinlichkeit** dar.
Das eigentliche Problem stellt die Frage dar, wie groß muss denn das σ Intervall sein, damit die Ergebnisse mit β Sicherheit in dem Intervall liegen. Da die Wahrscheinlichkeitskurven sich doch unterscheiden und damit die σ Intervalle unterschiedliche Breite annehmen können, bezieht man sich zunächst auf die Standardnormalverteilung. Bei der der Mittelwert fest bei $\mu = 0$ und die Streuung bei $\sigma = 1$ liegen.

Aus diesen Werten lässt sich der Faktor c berechnen. Der Vorteil ist man braucht nur die Sicherheitswahrscheinlichkeit ß und kann den Wert für c berechnen. Das erledigt die im Taschenrechner implementierte Funktion **InvNorm ()** , bei der die Werte für μ und σ auf 0 und 1 bleiben müssen. Das Ergebnis ist der gesuchte Faktor c für die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit.
Die Standard-Normalverteilung wird in der Literatur häufig mit Φ bezeichnet und damit die Inverse der Standard-Normalverteilung mit Φ^{-1} . Der einzige Übergabeparameter für diese Funktion ist der Wert von ß.
Das Ergebnis (der zurückgelieferte Funktionswert) ist der Multiplikator für Sigma. um die gewünschte Sicherheitswahrscheinlichkeit zu bekommen. Die Fläche unter der Standard - Normalverteilung hat den Wert 1. Die Grenzen für das Integral laufen von $-\infty$ bis $+\infty$. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es für Werte kleiner als -4 und größer als +4 kaum noch nennenswerte Flächeninhalte gibt.
Mit dem Flächeninhalt von 1 ist auch der Flächeninhalt bis x = 0 eindeutig mit ½ gegeben. Geht man von x = 0 beidseitig (oder auch einseitig) nach außen, kann man für jeden x Wert die Fläche um den Erwartungswert bestimmen. Für jeden gewählten Flächeninhalt lässt sich eindeutig ein zugehöriges x bestimmen, das sich links und rechts vom Mittelwert befindet und den gegebenen Flächeninhalt einschließt. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden diese x Werte nicht mit ihren absoluten Werten angegeben, sondern als Vielfache der Streuung. Genau dieser Vervielfachungsfaktor ist der Wert c, der oben angegeben wurde und das Ergebnis der Inversen Standard Normalverteilung ist.

Ein großer Teil dieser c Werte ist auch in der Literatur unter der Bezeichnung „Quantile der Standard Normalverteilung“ zu finden.

$$\Phi^{-1}(\beta) = c$$

oder $$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) = \beta$$

$$\Phi(\mu + c\sigma) - \Phi(\mu - c\sigma) = \beta$$

in diesem Fall liegt das Ereignis X zwischen den Werten $\mu - c\sigma$ und $\mu + c\sigma$.

Für die vorgegebenen σ Bereiche ergeben sich folgende Faktoren:

1σ-Bereich:	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$	≈ 68,3 %
2σ-Bereich:	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$	≈ 95,4 %
3σ-Bereich:	$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$	≈ 99,7 %

In umgekehrter Weise erhält man für vorgegebene Prozentzahlen:

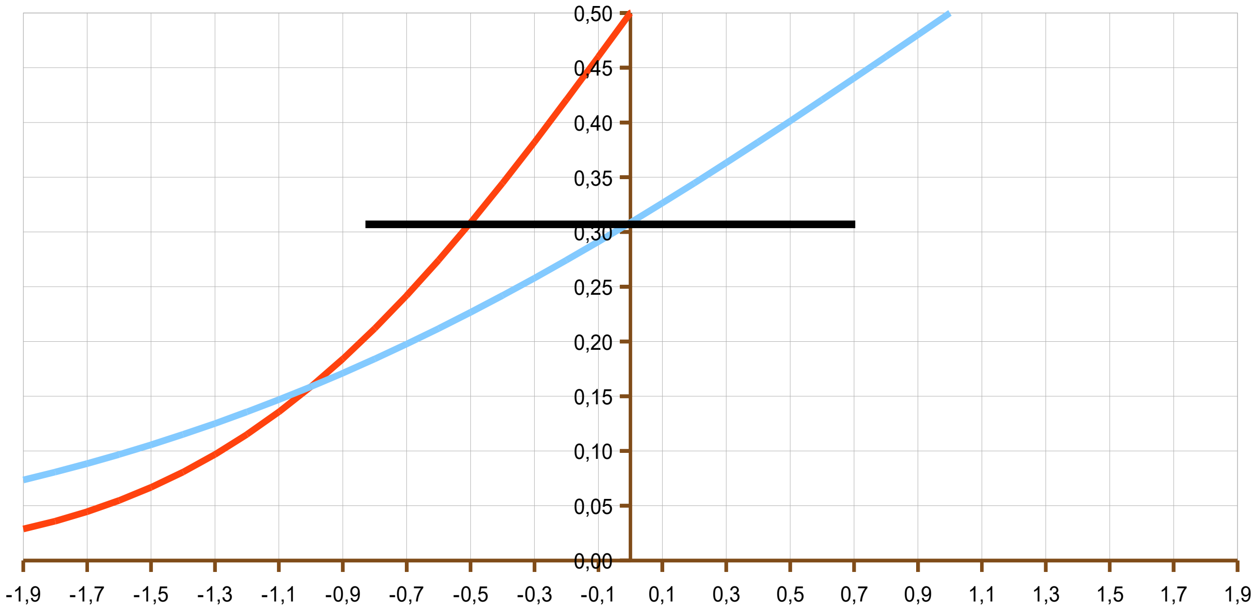
$P(\mu - 0{,}67\sigma \leq X \leq \mu + 0{,}67\sigma)$	≈	50 %	$P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma)$	≈	90 %
$P(\mu - 0{,}84\sigma \leq X \leq \mu + 0{,}84\sigma)$	≈	60 %	$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma)$	≈	95 %
$P(\mu - 1{,}04\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}04\sigma)$	≈	70 %	$P(\mu - 2{,}33\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}33\sigma)$	≈	98 %
$P(\mu - 1{,}15\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}15\sigma)$	≈	75 %	$P(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma)$	≈	99 %
$P(\mu - 1{,}28\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}28\sigma)$	≈	80 %	$P(\mu - 3{,}29\sigma \leq X \leq \mu + 3{,}29\sigma)$	≈	99,9 %

33.3.7 Normalverteilung und Standard - Normalverteilung

Um von einer beliebigen Normalverteilung auf die Standard-Normalverteilung zu kommen muß man folgende Formel benutzen:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

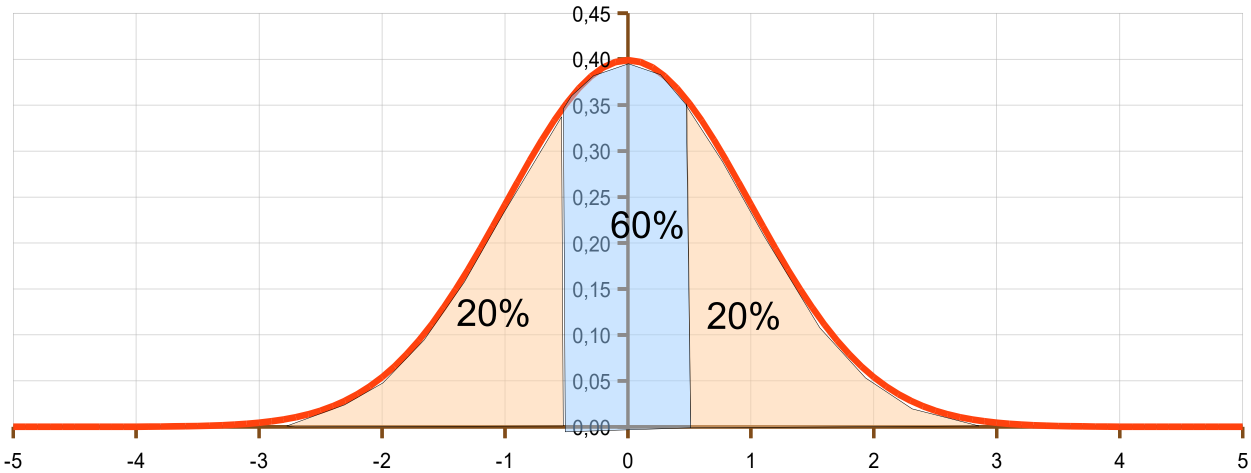
Wie ist mit dieser Umrechnung zu arbeiten. Zunächst muss festgehalten werden, dass jeder x Wert einzeln umgerechnet werden muss, dh. man kann hat keine umgerechnete Funktionsgleichung, sondern muss alles punktweise berechnen. Dazu soll folgendes Beispiel betrachtet werden:
Gesucht ist der Wert von p, für eine Normalverteilung mit μ = 1 und σ = 2 und dem Punkt x = 0.
Nach der Umrechnung auf die Standard-Normalverteilung erhält man für z = ½ . Dazu sollen jetzt die beiden unterschiedlichen Verteilungsfunktionen betrachtet werden.



Die blaue Funktionskurve ist die Kurve für: μ = 1 und σ = 2. Für den Wert x = 0 kann man den Funktionswert 0,3 ablesen. Der genaue wert beträgt 0,3085.
Die rote Kurve ist die Standard-Normalverteilung für μ = 0 und σ = 1. Die Frage, die jetzt steht ist, bei welchem x-Wert der roten Kurve wir der Funktionswert 0,3 erreicht. Wenn man an der Position y = 0,3 nach links auf die rote Kurven geht bekommt man den Wert 0,5. Das entspricht der Umrechnung: Für den Wert x = 0,5 erhält man in der Standard-Normalverteilung den gleichen Wert wie bei der Verteilung μ = 1 und σ = 2 und x = 0.

33.3.8 Konfidenzintervalle zum Erwartungswert

Mit Hilfe der Sigmaintervalle sind die Konfidenzintervalle oder Vertrauensintervalle zu bestimmen. Dabei geht es um die Frage: In welchem Bereich liegen die Messwerte, wenn sie mit 60% iger Sicherheit (Wahrscheinlichkeit) in der Umgebung des Mittelwertes liegen sollen. Das bedeutet 30% vom Mittelwert nach oben und 30% vom Mittelwert nach unten. Da der Mittelwert bei einer Wahrscheinlichkeit von 50 % liegt, heißt das, die Werte müssen in einem Bereich von 20% bis 80% liegen, oder im Bereich von 0,2 bis 0,8
Damit ist die mathematische Fragestellung: Gesucht sind die x -Grenzen der Fläche um den Mittelwert, so dass der Flächeninhalt unter der Kurve 0,6 beträgt.
Dazu muss wieder die Dichtefunktion und der Mittelwert betrachtet werden.



Wenn man dazu die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ betrachtet lässt sich die Frage lösen, indem man den x-Wert für $\Phi(x) = 0{,}8$ berechnet und den x – Wert für $\Phi(x) = 0{,}2$ subtrahiert, in diesem Fall addiert, da der Wert im negativen Bereich liegt. Aus der Quantiltabelle ergibt sich $0{,}8416 - (-0{,}8416) = 1{,}6832$.
Der Bereich, in dem die Messwerte um den Mittelwert liegen beträgt 1,68, wobei 0,84 in positive und negative Richtung zu rechnen sind. Die Ursache dafür liegt in der Symmetrie der Funktion zum Mittelwert.
Die rechte Begrenzung der Fläche liegt also bei einem Wert $\Phi(x) = 0{,}8$ für den der zugehörige x Wert zu bestimmen ist. Auf der linken Seite ist genau die Fläche zu subtrahieren, die auf der rechten Seite noch übrig bleibt. Da die Gesamtgröße der Fläche unter der Kurve gleich 1 ist, ist also $\Phi(x) - (1 - \Phi(x))$ zu berechnen. Damit ergibt sich für die Berechnung der x- Wertes für ein Konfidenzintervall:

$$\boxed{\mathbf{p = 2\,\Phi(x) - 1}}$$

Für den oben angegebenen Wert von p = 0,6 ist die Formel umzustellen nach $\Phi(x)$;

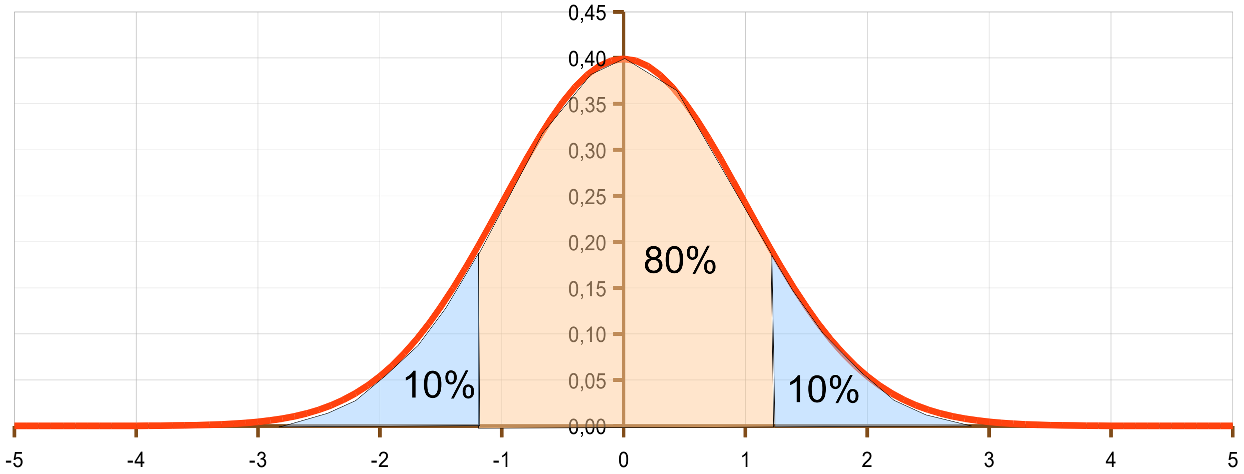
$$\Phi(x) = (1 + p) / 2 = 1{,}6 / 2 = 0{,}8$$

Gesucht ist die Position von x, so dass die Verteilungsfunktion $\Phi(x) = 0{,}8$ ist. Wie bereits gezeigt, erhält man für x den Wert 0,8416, was für einen Mittelwert von 0 bedeutet:

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% liegen die Messwerte im Bereich von – 0,8416 bis + 0,8416.

33.3.9 Meßwerte außerhalb des Konfidenzintervalls

Eine analoge Fragestellung ist, wo liegen die Grenzen des Bereiches, in dem die Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % außerhalb einer Umgebung des Mittelwertes liegen. Das bedeutet, dass die Werte jeweils bis zu 10% von der oberen und unteren Grenze entfernt liegen (blaue Flächen) und entspricht der gegenteiligen Fragestellung: Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen die Werte mit 80 % Wahrscheinlichkeit in der Umgebung des Mittelwertes (orange Fläche).



Da die Gesamtfläche gleich 1 ist, ist der Anteil, der außerhalb eines Bereichs um den Mittelwert liegt 1 – Φ(x) im oberen Bereich und im unteren Bereich Φ(–x) = 1 – Φ(x), da die Funktion achsensymmetrisch ist und die Flächen gleich sind. Also gilt in diesem Fall

$$\boxed{p = 2 - 2\,\Phi(x)}$$

da die beiden Flächenteile addiert werden müssen oder umgestellt nach Φ(x):
Φ(x) = (2 – p)/2 (wegen der Division mit – 2 drehen sich die Vorzeichen um).
Messwerte, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% außerhalb eines Bereiches um den Mittelwert liegen beginnen ab Φ(x) = (2 – 0,2) / 2 = 0,9 => x = 1,286

Für die Gegenrechnung: Alle Messwerte liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% in der Umgebung des Mittelwertes gilt: Φ(x) = (1 + p) / 2 = = (1 + 0,8) / 2 = 0,9 was dann wieder zu den gleichen x-Werten führt.

33.3.10 Die Dichtefunktion φ(x) der Standardnormalverteilung

Wie in allen ordentlichen Dokumenten zur Normalverteilung gehört es zu guten Ton die Tabellen für die Normalverteilung aufzuführen. So ist es auch hier.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,10	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,20	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,30	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,40	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,50	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,60	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,70	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,80	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,90	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,00	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,10	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,20	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,30	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,40	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,50	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,60	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,70	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,80	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,90	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,00	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,10	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,20	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,30	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,40	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,50	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,60	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,70	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,80	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,90	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,00	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,10	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,20	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,30	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,40	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,50	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,60	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,70	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,80	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,90	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,00	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y – Achse, deshalb ist der Funktionswert von x = - 2,4 identisch mit dem Funktionswert von x = + 2,4.

33.3.11 Die Verteilungsfunktion Φ(x) der Standardnormalverteilung

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,50	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,60	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,70	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,80	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,90	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Der Wert der Verteilungsfunktion für x = 0 beträgt 0,5. Links und rechts des Erwartungswertes ist die Wahrscheinlichkeit gleich 0,5. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt P(0 | 0,5).

Das bedeutet für die Funktion gilt die folgende Formel, wenn der Punkt, zu dem die Symmetrie besteht P(x0 | y0) ist. $\frac{1}{2}\,[\, f(x_0 + h) + f(x_0 - h)\,] = y_0$

oder $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$