30. Wachstum

Bei einem Wachstum kann man die Änderung des Bestandes zwischen den Zeitpunkten t und t+Δt auf zwei verschiedene Weise beschreiben:

(1) Man berechnet man die Differenz der Werte zwischen den Zeitpunkten t und t + Δt : B(t+Δt) = B(t) + ΔB, wobei **ΔB** die **Absolute Differenz oder Bestandsänderung** ist, die Änderung des Bestandes innerhalb eines Zeitabschnittes.

(2) Man gibt die **relative** oder **prozentuale Änderung p** an. Diese wird durch den Quotienten

$$\frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)} = p \quad \text{bestimmt.}$$

Der Wachstumsfaktor q bestimmt sich aus: $\frac{B(t+1)}{B(t)}$

oder aus q = 1 + p.

(3) Jedes Wachstum beginnt mit einem **Anfangsbestand B(0)**. Dieser Anfangsbestand muß von 0 verschieden sein, weil von 0 nichts wachsen kann.

(4) Der Anfangsbestand B(0) ist der Bestand zu einem Zeitpunkt, den man als t=0 bezeichnet, ansetzt. Es ist deshalb nicht korrekt, die Verlaufskurve nach links, in Richtung eines früheren Zeitpunktes, zu erweitern, da über diese Zeitpunkte nichts bekannt ist.
(In einer Nährlösung kann man mit 10 Bakterien begonnen haben und wartet ein Jahr, bis es 1000 sind. Erst ab diesem Zeitpunkt gilt der angegebene Wachstumsprozess, solange es weniger sind könnten andere Regeln gelten.
ODER:
Jemand kippt ein Gefäß mit 1000 Bakterien in die Nährlösung, die z.B aus verschiedenen Labors zusammengekauft wurden)

(5) B(t) ist der **Anfangsbestand zum Zeitpunkt t**.

(6) Ändert sich der Bestand B(t) in einem Zeitintervall Δt um die Bestandsänderung ΔB, so bezeichnet man den Quotienten ΔB/Δt als **Änderungsrate** R.

$$R = \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t}$$

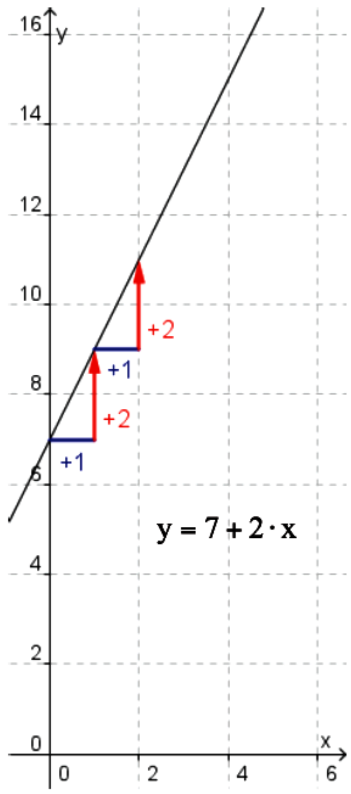
Verkleinert man das Intervall t immer mehr kommt man zur 1. Ableitung der Funktion B(t) und kann sagen: Die Änderungsrate ist der Tangentenanstieg der Funktion B(t) im Punkt t. Änderungsraten sind auf ein bestimmtes Zeitintervall festgelegt, man kann sie beim Verdoppeln oder Halbieren des Zeitintervalls nicht ebenfalls verdoppeln.

30.1. Lineares Wachstum

Das **lineare Wachstum** ist gleichbleibend.

- Die Wachstumsrate pro Zeiteinheit ändert sich nicht.
- In **gleichen Zeitabständen** ist **konstante Differenz** der Messgrößen vorhanden.
- Der Zuwachs (Änderungsrate) ist konstant und unabhängig vom Bestand und von der Zeit.

Um bei einer Datenreihe zu prüfen, ob lineares Wachstum/ Abnahme vorliegt bildet man die Differenzen aufeinanderfolgender Werte. Erhält man immer die selbe Differenz handelt es sich um lineares Wachstum/Abnahme.



30.1.1. Rechnen mit linearem Wachstum:

Um mit dem linearen Wachstum zu rechnen, braucht man zuerst einen **Anfangsbestand** und eine Zahl für den **Zuwachs**. Der Zuwachs bleibt immer gleich (konstant), während der Bestand sich ändert. Als nächstes wird der Anfangsbestand mit dem Zuwachs addiert. Dadurch wird ein neuer Wert (Bestand (**B neu**)) ermittelt. Der Anfangsbestand wird dadurch zum alten Bestand (**B alt**). Nun wird B neu wieder mit dem Zuwachs addiert und wieder wird ein neuer Wert ermittelt. Also wird B neu zu B alt. Diese Rechnung kann man beliebig fortsetzen.

(a) Zum Anfangswert B(0) kommt pro konstanter Einheit t der **konstante** Zuwachs k hinzu. Der Zuwachs **ΔB = k** bleibt immer gleich (konstant). Für $k > 0$ handelt es sich um lineares Wachstum und für $k < 0$ um lineare Abnahme.

(b) Als nächstes wird der Anfangsbestand mit dem Zuwachs addiert:
B(t) = B(0) + k (k Änderungsrate)
Dadurch entsteht ein neuer Bestand B(t).

(c) Für den folgenden Zeitraum wird der neue Bestand B(t) zum Anfangsbestand für den Zeitraum t+1. Nun wird zu B(t) wieder der Zuwachs addiert und ein neuer Wert ermittelt: **B(t+1) = B(t) + k**.

(d) Diese Rechnung kann man beliebig fortsetzen und erhält so die **Rekursionsgleichung**:

$$\boxed{B(t + 1) = B(t) + k}$$

Der neue Bestand ist gleich
dem alten Bestand + konstantem Zuwachs

(e) Die Änderungsrate ist hier konstant, somit ergibt sich:

$$\boxed{R = k}$$

(f) Setzt man für B(t) die Formeln mit B(t-1), B(t-2),.. ein erhält man die **Funktionsgleichung**:

$$\boxed{B(t) = k \cdot t + B(0)}$$

die den aktuellen Bestand aus dem Anfangsbestand B(0) bestimmt.

(g) Häufig werden Wachstumsprozesse mit Differentialgleichungen beschrieben, weil sie kürzer und aussagefähiger sind. Für eine lineare Funktion würde diese Aussage lauten: Der Anstieg (=1. Ableitung) ist an jeder Stelle der Kurve konstant:
Differenzialgleichung

$$\boxed{B'(t) = k \qquad k \text{ Änderungsrate}}$$

Der Zuwachs ist konstant

für k > 0 handelt es sich um Wachstum
für k< 0 handelt es sich um Abnahme

*(Es wird hier generell darauf verzichtet, Wachstum oder Abnahme durch Änderung des **Rechenzeichens in der Formel** darzustellen. Wachstum oder Abnahme wird durch das **Vorzeichen der Wachstumskonstante** entschieden)*

Für lineares Wachstum braucht man
- einen Anfangsbestand B(0)
- eine konstante Änderungsrate k

Ein erstes und wichtiges Merkmal ist, dass der Koeffizient k eine Maßeinheit haben muss und diese Maßeinheit ein Maß pro Zeiteinheit darstellt. Meter pro Stunde, Liter pro Minute, m^3 pro 2 Tage.

30.1.2. Lösung der Differenzialgleichung

$$B'(t) = k \qquad k \text{ Änderungsrate}$$

Diese Differenzialgleichung hat die Form: $y' = k$.
Aus der Differenzialrechnung ist bekannt, dass die erste Ableitung von $y = kx$ die obige Gleichung erfüllt. Außerdem ist bekannt, dass bei jeder Integration eine unbestimmte Konstante zu addieren ist. Also ist die Lösung der Differenzialgleichung:

$$B(t) = k\,t + C$$

Da der Wert von k aus der Differenzialgleichung bekannt ist, ist der Wert für die Konstante C noch zu bestimmen. In diesem Zusammenhang spricht man bei Differenzialgleichungen von einem „Anfangswertproblem“. Es muss zu einem festen Zeitpunkt t (meist t=0) gegeben werden, welchen Funktionswert die ermittelte Funktion haben muss. Aus dieser Bedingung wird die Konstante C bestimmt.

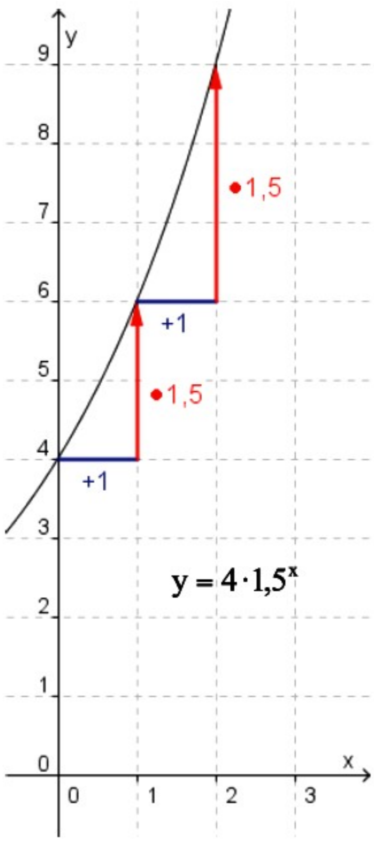
Für Wachstumsaufgaben ist es üblicherweise der bestand zum Beginn des Versuchs, also der Wert von B(0), was dann zur endgültige Gleichung führt:

$$B(t) = k\,t + B(0)$$

Lineares Wachstum wird hier nicht weiter behandelt. Lineare und proportionale Funktionen sind Bestandteil der 7. und 8. Klasse und wurde hier nur der Vollständigkeit halber und der Erkenntnis des Entwicklungsweges des Wachstums mit angegeben. Es sollten an bekannten Zusammenhängen neue Begriffe erläutert werden.

30.2. Exponentielles Wachstum

(Exponentielles Wachstum ist das in Abiturprüfungen am häufigsten auftretende Wachstum. In seltenen Fällen tritt noch beschränktes Wachstum (nächstes Kapitel) auf)



Das **exponentiellen Wachstum** tritt auf, wenn es **eine Rückkopplung** des Wachstumsfortschritts auf das weitere Wachstum gibt. Dabei ist hier die Rückkopplung in 'Wachstumsrichtung' gerichtet.

- Hier ändert sich also die Wachstumsrate pro Zeiteinheit, indem sie mit dem vorhandenem Bestand multipliziert wird.
- In **gleichen Zeitabständen** ist **konstanter Quotient** der Messgröße.
- Der Zuwachs (Änderungsrate) ist proportional zum Bestand

Da manche Wachstumsvorgänge in der Natur so verlaufen, nennt man das exponentielle Wachstum auch natürliches Wachstum. Man kann damit aber nicht nur das Wachstum von Bakterien, Viren oder Tierarten ermitteln, sondern es dient z.B. auch zur Rechnung mit Zinseszinsen.

Beispiel 1: Wachstum von Bakterienkulturen in übergroßen Petrischalen: Je mehr B. sich schon entwickelt haben, desto mehr entstehen neu.

Beispiel 2: Radioaktiver Zerfall als Beispiel negativen Wachstums:
Je weniger Atome noch vorhanden sind, desto weniger zerfallen auch.
Anders formuliert: Je mehr bereits zerfallen sind, desto weniger zerfallen noch (pro Zeiteinheit.)

Um zu prüfen, ob es sich bei einer Datenreihe um exponentielles Wachstum/zerfall handelt, bildet man die Quotienten benachbarter Datenwerte. Konstante Quotienten bedeuten exponentielles Wachstum/Zerfall

30.2.1. Rechnen mit exponentiellem Wachstum:

(a) Beim exponentiellen Wachstum braucht man zunächst einmal einen **Anfangsbestand B(0)** und einen **Faktor q**.

(b) Man benutzt hier verschiedene Größen, die genau auseinanderzuhalten sind. Zunächst kennt man die Größe Wachstumsrate p, die die Vermehrung des bisherigen Bestandes darstellt und nur die Änderung zwischen den einzelnen Zeitpunkten darstellt.

(c) Anders als beim linearen Wachstum ändert sich hier der Zuwachs proportional zum aktuell vorhandenen Bestand B(t) und nicht unabhängig vom Bestand:
$B(t+1)=B(t) + k\,B(t)$.
Dabei ist k der prozentuale Wert der Wachstumsrate p: $k = p/100$, der aus der

Prozentzahl eine Dezimalzahl macht. Aus der vorherigen Gleichung folgt durch Umformung:

$$\begin{aligned} B(t+1) &= B(t) + k\,B(t) \\ &= B(t) + p/100\ \ B(t) \\ &= (1 + p/100)\,B(t) \end{aligned}$$

Das prozentuale Wachstum ist somit ein Spezialfall des exponentiellen Wachstums, indem der Wert q nicht über Datenreihen ermittelt werden muss, sondern sich aus dem Prozentsatz ergibt, mit dem z.B. Geld angelegt wurde. Der in diesem Fall benutzte Faktor ergibt sich aus 1+ Prozentsatz. Alle Verzinsungsaufgaben sind Aufgaben des Exponentiellem Wachstums.

Somit erhält man als **Rekursionsgleichung**:

$$\boxed{B(t+1) = q \cdot B(t)}$$

Der neue Bestand ist gleich
bestandsabhängigem Zuwachs ● altem Bestand

(d) Damit ergibt sich die **Änderungsrate** als:

$$\boxed{R = p \cdot B(t)}$$

(e) Dabei ist der **Wachstumskoeffizienten q**, die nächste verwendete Größe, die sich aus q = p% + 1 ergibt und zum neuen Gesamtbestand führt.

(f) Setzt man in die Rekursionsgleichung wieder Rückwärts die Formeln für B(t–1); B(t–2);.. ein, ergibt sich:

$$B(1) = q \cdot B(0)$$
$$B(2) = q \cdot B(1) = q^2 \cdot B(0)$$
$$B(3) = q \cdot B(2) = q^3 \cdot B(0)$$

und erhält die **Funktionsgleichung**:

$$\boxed{B(t) = q^t \cdot B(0)}$$

Ein solches Wachstum kann man auch mit Hilfe einer e Funktion beschreiben. Es gilt bekanntermaßen: $a = e^{\ln(a)}$ woraus folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} B(t) &= q^t \cdot B(0) && (1) \\ &= e^{t \cdot \ln(q)} \cdot B(0) = e^{t \cdot k} \cdot B(0) && (2) \end{aligned}}$$

(g) Der Sachverhalt, dass sich die Änderungsrate proportional zum Bestand verhält ergibt als **Differenzialgleichung**

$$\boxed{B'(t) = \ln(q)\,B(t)}$$

Der Zuwachs ist gleich
Konstante ● altem Bestand

Beim exponentiellen Wachstum stellt sich die Frage, welche der beiden Formeln sollte man benutzen, prinzipiell führen beide zum Ziel.

- Für alle Aufgaben, die mit Zinsberechnung zu tun haben ist die Formel (1) zu empfehlen, da die dort auftretende Größe q dem Wert 1 ± p entspricht, wobei p der Prozentsatz der Verzinsung ist. Der Parameter t entspricht den Jahren der Verzinsung. Diese Formel macht eben nur Sinn, wenn der Zinssatz über die Jahre konstant bleibt.

- Das gleiche gilt für alle Wachstums und Zerfallsprozesse, die mit Prozentangaben versehen sind. Der Wert q heißt dann
  für $q > 1$ Wachstums**faktor**
  und für $0 < q < 1$ Zerfalls**faktor**

für $q > 1$ handelt es sich um Wachstum
für $0 < q < 1$ handelt es sich um Zerfall

- Für alle anderen Wachstumsanwendungen ist die Formel (2) zu empfehlen, da der dort auftretende Faktor k selten mit dem Beispiel interpretiert werden kann und „sich eben ergibt“. Die Benutzung der e- Funktion ist dann insbesondere bei der Berechnung von Zeiten t sinnvoll, da sofort mit dem ln-Funktion gearbeitet werden kann und das Dividieren von zwei Logarithmenwerten, wegen der notwendigen Basistransformation entfällt.
  da der Wert für k sich aus ln(q) bestimmt ist $k > 0$ für $q > 1$ und $k < 0$ für $0 < q < 1$, negative q-Werte kann es nicht geben.

für $k > 0$ handelt es sich um Wachstum
für $k < 0$ handelt es sich um Zerfall

dann ist k die Wachstums**konstante** oder die Zerfalls**konstante**

Für exponentielles Wachstum braucht man
- einen Anfangsbestand B(0)
- eine konstante Änderungsrate k

Die erste Ableitung von B(t) heißt
- momentane Wachstumsgeschwindigkeit oder
- momentane Änderungsrate

Sehr oft spielen bei diesen Aufgaben eine Verdopplungszeit (Bakterienwachstum) oder eine Halbwertszeit (Radioaktiver Zerfall) eine Rolle. Die Verdopplungszeit berechnet sich

$$\mathbf{T_V = \ln(2) / k}$$

die Halbwertszeit berechnet sich

$$\mathbf{T_H = -\ln(2) / k}$$

30.2.2. Lösung der Differenzialgleichung

$$B'(t) = \ln(q)\, B(t)$$

Diese Gleichung läßt sich durch B(t) dividieren: $\frac{B'(t)}{B(t)} = \ln(q)$

Diese Gleichung ist nach t zu integrieren.

$$\int \frac{B'(t)}{B(t)}\,dt \quad = \int \ln(q)\,dt$$

$$\ln|B(t)| \quad = t\ln(q) + C$$

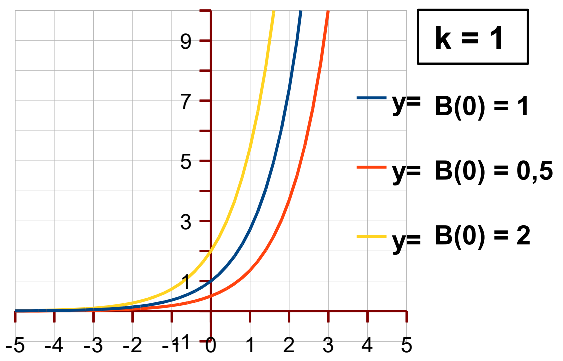
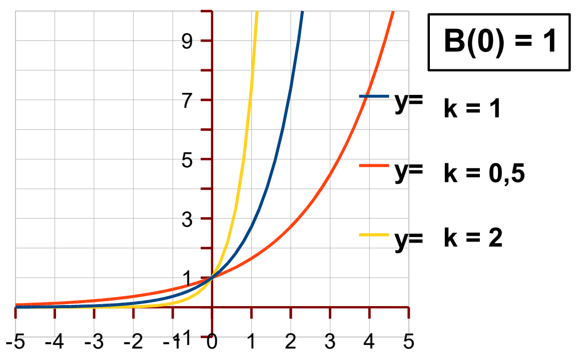
Durch Exponenzieren folgt eine Auflösung nach B(t):

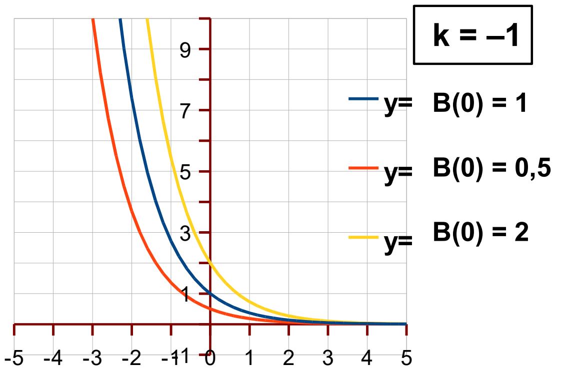
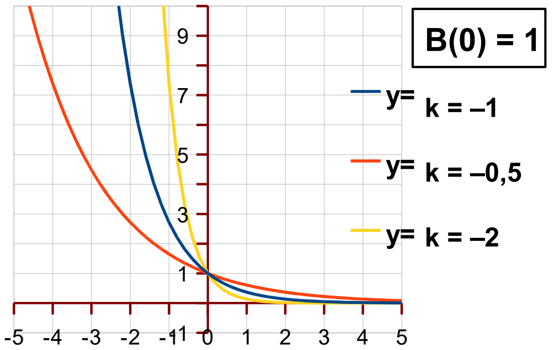
$$B(t) = e^{t \cdot \ln(q)} \cdot e^{C} \;=\; q \cdot e^{t} \cdot B(0)$$

Die Lösung des Anfangswertproblems (s. Lineares Wachstum) führt dazu, dass die Konstante e^C identisch mit dem Bestand zum Zeitpunkt 0 ist, da zum Zeitpunkt t= 0 die e – Funktion den Wert 1 liefert.

30.2.3. Kurvenverlauf einer exponentiellen Wachstumsfunktion

Der Kurvenverlauf einer Funktion $B(t) = B(0)\,e^{kt}$ wird von sowohl von B(0) als auch von k beeinflußt. Für Wachstumsprozesse kann man davon ausgehen, dass B(0) > 0 ist, da ein negativer Anfangsbestand beim Wachstum keinen Sinn macht.

Aussehen von exponentiellem Wachstum k > 0	
	Bei feststehenden Exponenten k verändert der Faktor B(0) den Schnittpunkt mit der y-Achse. Für größere Werte von B(0) werden die Funktionswerte größer
	Bei feststehenden Anfangswert B(0) verändert der Faktor k den Anstieg der Funktion. Je größer k, desto steiler ist die Funktion. da für Wachstumsfunktionen nur k>0 möglich ist, werden die Kurven für $k \to 0$ immer flacher.

<table>
<tr><th colspan="2">Aussehen von exponentiellem Zerfall k < 0</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Bei feststehenden Exponenten k verändert der Faktor B(0) den Schnittpunkt mit der y-Achse. Für größere Werte von B(0) liegen die Funktionswerte höher über der x-Achse und nähern sich damit langsamer der Asymptote x-Achse.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Bei feststehenden Anfangswert B(0) verändert der Faktor k den Anstieg der Funktion. Je größer k, desto steiler ist die Funktion. Damit nähert sich die Funktion schneller der x-Achse an. Je mehr sich k an 0 nähert, desto flacher werden die Kurven.</td></tr>
</table>

Diese Kurven kann man auch interpretieren als beschränkten Zerfall mit der unteren Grenze 0.

30.2.4. Berechnen einzelner Größen der Gleichung

In den wenigsten Fällen ist die Gleichung gegeben, sondern man muss aus verschiedenen Angaben die Komponenten zusammenbauen, die für die Gleichung benötigt werden. Dabei gilt nach wie vor der Grundsatz, mit einer Gleichung kann man nur eine Variable berechnen. Dazu müssen dann mehrere Werte für t und die zugehörigen Werte B(t) gegeben sein, oder Aussagen über den Zuwachs gemacht werden, damit mit der ersten Ableitung die notwendigen Gleichungen zusammengetragen werden können. In den einzelnen Beispielen, die in einer gesonderten Datei vorliegen wird im einzelnen auf die Arten der Berechnung zu dem spezifischen Beispiel eingegangen. Hier sollen einige allgemeine Grundsätze dargelegt werden.

30.2.4.1. Berechnung des Anfangswertes B(0)

$$B(t) = q^{t}\,\mathbf{B(0)}$$

1. Die erste Möglichkeit ist, dass der Bestand zum Zeitpunkt t = 0 explizit gegeben ist, was durchaus vorkommt, z.B. bei allen Berechnungen mit Zinsen, bei denen die erste Einzahlungssumme gegeben wird, die dann im Laufe der Jahre verzinst wird.
2. Es ist ein späterer Bestand gegeben. Das setzt voraus, dass sowohl die Zeit t gegeben sein muss, wie aus der zu diesem Zeitpunkt vorhandene Bestand B(t) und die Wachstumsrate q. Bei Zinsrechnung wäre das z.B das Kapital B(t) dass nach t Jahren bei einer Verzinsung von p% angelaufen ist, der Bakterien Bestand B(t), der sich nach t Wochen/Tagen/Monaten mit einem Wachstumskoeffizienten q gebildet hat, oder der Bestand an Atomen, der nach t Jahren bei einer Zerfallsrate von q noch vorhanden ist.

Die Berechnung ist relativ einfach, das nur durch den Wert q^{t} dividiert werden muss. Der Anfangsbestand kann auch nur aus der Bestandsgleichung B(t) bestimmt werden und nicht aus Zuwachsgleichung B'(t).

30.2.4.2. Berechnung des Wachstumsfaktors q

$$B(t) = \mathbf{q}^{t}\,B(0)$$
$$B'(t) = \ln(\mathbf{q})\,B(t)$$

Der Wachstumsfaktor kann sowohl über die Bestandsfunktion, wie auch über die Differenzialgleichung bestimmt werden.

1. Die Berechnung über die Bestandsfunktion setzt voraus, dass der Anfangsbestand, die Zeit t und der zu diesem Zeitpunkt vorhandene Bestand bekannt sein müssen. Die Berechnung von q erfolgt dann über die Wurzelfunktion, in dem der Wurzelexponent genau der Wert t ist. Falls der GTR keine beliebigen Wurzelexponenten zulässt ist mit der Funktion $y^{1/x}$ der Wert zu berechnen, wobei für x der Wert für t zu benutzen ist und der Wert für y = B(t)/B(0).
2. Ist außer q oder an Stelle von q der Prozentsatz des Wachstums p gefragt ist nach der Formel q = 1±p der Wert für p zu berechnen.
3. Ist der Wachstumsfaktor über die Wachstumsfunktion, also die 1. Ableitung, zu

berechnen, ist zu ein und demselben Zeitpunkt sowohl der Bestand als auch die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt notwendig.

Wird eine Bestandsfunktion durch die Funktionen

$$B(t) = B(0)\, e^{kt}$$
$$B'(t) = k\, B(t) = B(0)\, k\, e^{kt}$$

beschrieben und ist die prozentuale Zunahme/Abnahme durch p gegeben, dann berechnet sich der Wert für k durch: $k = \ln(1 \pm p/100)$

30.2.4.3. Berechnen der Zeiten

$$B(t) = q^{t}\, B(0)$$

Die Berechnung der Zeiten kann nur über die Bestandsfunktion erfolgen. Dazu muss aber der Anfangswert B(0), der Wachstumsfaktor und der Bestand zu einem Zeitpunkt t bekannt sein. Die Lösung erfolgt über den Logarithmus, da von einem Potenzausdruck hier nach dem Exponenten gefragt wird. Die Auflösung nach einem Exponenten liefert der Logarithmus.

30.2.4.4. Berechnen von zwei Werten B(0) und k

Aufgaben sind meist so gestaltet, dass zur Bestimmung der Wachstumsfunktion mehrere Größen nicht bekannt sind. Üblich ist dabei, dass die Werte für B(0) und k fehlen. Da es sich hier um **zwei Unbekannte** handelt, kann das Problem nur gelöst werden, wenn dafür **zwei Gleichungen** gebildet werden können. Diese Gleichungen entstehen meist dadurch, dass der Bestand B(t) zu zwei verschiedenen Zeitpunkten angegeben wird. Damit entstehen zwei Bestandsgleichungen

$$B(t_1) = B(0)\ e^{kt1}$$
und $$B(t_2) = B(0)\ e^{kt2}$$

In diesem Fall handelt es sich um ein nichtlineares Gleichungssystem für das es keine allgemeinen Lösungswege gibt. Man muss versuchen über die spezielle Struktur eines solchen Gleichungssystem zu einer Lösung zu gelangen. Das Ziel zum Lösen von Gleichungssystem bleibt aber bestehen: nach der Umformung muss eine Gleichung mit einer Variablen vorhanden sein. Also muss nach der Umformung entweder die Variable B(0) oder k verschwunden sein. In diesem Fall bietet sich an, die beiden Gleichungen zu dividieren, oder jede Gleichung nach B(0) aufzulösen und gleichzusetzen.

1. Dividieren

$$\frac{B(t_1)}{B(t_2)} = \frac{e^{kt1}}{e^{kt2}} \qquad B(t_1)/B(t_2) = e^{k(t1-t2)} \qquad \frac{\ln(B(t_1)) - \ln(B(t_2))}{t_1 - t_2} = k$$

2. Auflösen nach B(0)

$$B(0) = B(t_1)\ e^{-kt1} \qquad B(t_2)\, e^{-kt2} = B(t_1)\, e^{-kt1}$$
$$B(0) = B(t_2)\ e^{-kt2}$$

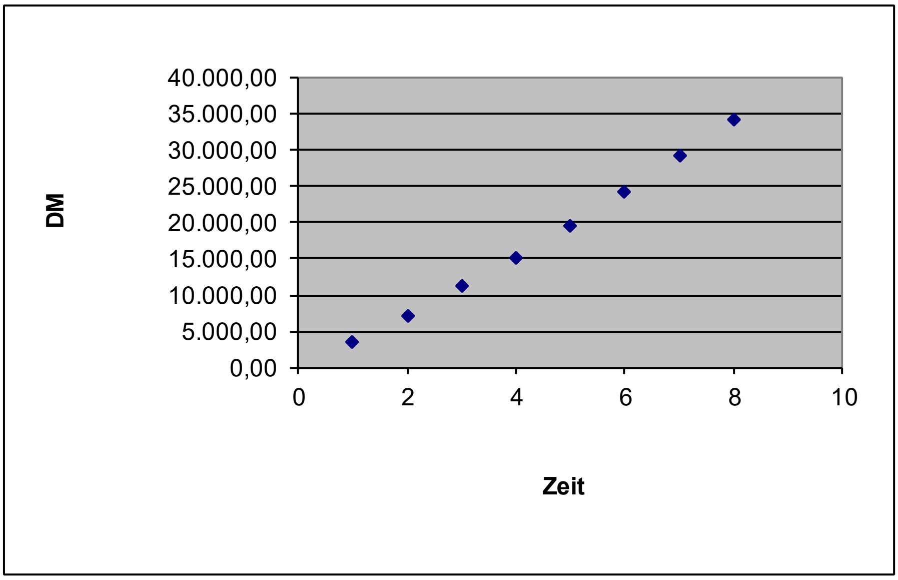
Auch der zweite Weg führt zur selben Gleichung wie der erste Weg.

30.2.5. Musterbeispiele

Bei exponentiellem Wachstum und Zerfall werden zwei Werte gebraucht : **B(0) und q bzw k**
Im folgenden sind einige Beispielaufgaben angegeben, es wird darauf verzichtet die Aufgaben komplett durchzurechnen, weil das meist keine Probleme bereitet. Es wird nur der Ansatz für die Funktionsgleichung durchgeführt. Die Lösungen sind nicht überprüft, deshalb sind Fehler möglich.

1. Ratenzahlung
Jährlich werden 3500 € als Sparrate eingezahlt. Das Guthaben wird gleichbleibend mit 5,75 % jährlich verzinst.
Übersicht

Jahr	Kapital	Kapital
1	3.500 €	3.500,00 EUR
2	3500€ * 1,0575 + 3500€	7.201,25 EUR
3	7201,25€ * 1,0575 + 3500€	11.115,32 EUR
4	11115,32€ * 1,0575 + 3500€	15.254,45 EUR
5	usw.	19.631,58 EUR
6	usw.	24.260,40 EUR
7	usw.	29.155,37 EUR
8	usw.	34.331,81 EUR



1. Ein Kapital von 1000 € wird mit 8% Zinsen angelegt.
   a. In welcher Zeit verdoppelt sich das Kapital?
   b. Zeige, dass die Verdopplungszeit nicht davon abhängt, wie groß das Anfangskapital ist!

B(0) = 1000; p = 0,08 → **q** = 1,08 **B(t) = 1000 1,08** ^{t}

Lösung a) 9 Jahre

2. Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 1000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich jede Stunde.
   a. Stelle die Anzahl der Bakterien nach t Stunden als Funktion der Zeit dar.
   b. Wieviele Bakterien sind nach 2,5 Stunden vorhanden?
   c. Wann wird sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht haben?
   d. Das Wachstum der Bakterien lässt sich durch die Formel

B(0) = 1000 nicht bekannt q aber $B(1) = 2000 \rightarrow \quad 2000 = 1000\ e^{k \cdot 1}$
durch Logarithmieren läßt sich k bestimmen

Lösung a) $B(t) = 1000\ 2^{t}$
b) 5657
c) nach 3,3 Stunden
d) 0,6931/h

3. Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1,5%. Derzeit beträgt sie 12 Millionen.
   a. Wie groß wird die Bevölkerung in 10 Jahren sein?
   b. Wann wird das Land 15 Millionen Einwohner haben?
   c. Der Bevölkerungszuwachs lässt sich durch die Formel

B(0) = 12 Mio; p = 0,015 → **q** = 1,08 **B(t) = 1000 1,0015** ^{t}

Lösung: a) 13,9 Mio
b) 15 Jahre
c) 0,0149/Jahr

4. Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel $B(t) = B(0) \cdot e^{\lambda t}$
   1960 gab es ca. 3 Mrd. Menschen, 1995 ca. 5,6 Mrd.
   a. Bestimme die Konstante λ!
   b. Wieviel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
   c. Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben, wenn die Bevölkerung im selben Tempo weiterwächst?

B(0) = B(1960) = 3 Mrd; q nicht bekannt, aber B(35) = 5,6 Mrd $\rightarrow 5{,}6 = 3\ e^{35\lambda}$
durch Logarithmieren läßt sich λ bestimmen

Lösung: a) 0,0178/Jahr
b) 1,8%
c) ca. 2050

5. Ein Lichtstrahl, der ins Wasser fällt, wird pro Meter Wassertiefe um 10% schwächer.
   a. Stelle die Lichtstärke L(x) als Funktion der Wassertiefe dar (Tiefe in Metern = x, Lichtstärke an der Oberfläche = L_0).
   b. Wie stark ist das Licht in 10 m Tiefe?
   c. In welcher Tiefe beträgt die Lichtstärke nur mehr ein Zehntel des ursprünglichen Wertes?

B(0) = L_0 $B(t) = L_0\ e^{0,9x}$

Lösung: a) $L(x) = L_0 \cdot 0{,}9^x$
b) ca. 35% des ursprünglichen Werts
c) ca. 22 m

6. Der radioaktive Zerfall eines Elements lässt sich durch die Formel $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ beschreiben (N_0 = Anfangswert). Die Zeit τ, in der von einer vorhandenen Stoffmenge die Hälfte zerfällt, heißt Halbwertszeit. Für Radium beträgt sie z.B. 1620 Jahre.
   a. Berechne die Zerfallskonstante λ!
   b. Wieviel war von dem ersten Gramm Radium, das Marie Curie 1898 herstellte, nach 100 Jahren noch übrig?
   c. Wann wird nur noch 0,1 g vorhanden sein?

   Weder N_0 noch ein anderer Wert zu einem beliebigen Zeitpunkt ist bekannt. Die Aufgabenstellung gibt dafür an, zu welchem Zeitpunkt nur die Hälfte vorhanden ist, damit entsteht eine Formel der Art
   $\frac{1}{2} N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda 1620}$. Aus einer solchen Formel kürzt sich N_0 heraus, so dass nur noch eine Variable übrig bleibt und die Gleichung damit lösbar wird. Zur Bestimmung von λ ist die Zeit einzutragen nach der nur noch die Hälfte vorhanden ist, so dass wieder zu einem Wert für λ ein Mengenwert vorhanden ist, wenn auch relativ.

   Lösung: a) 0,000428/Jahr
   b) 0,958 g
   c) nach 5382 Jahren (im Jahr 7280)

7. Vor 10 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 7000 m³. Ohne Einschlag ist er inzwischen auf 9880 m³ angewachsen. Man darf annehmen, dass das Holzwachstum ein exponentieller Vorgang ist.
   a) Zeige, dass die jährliche Wachstumsrate ca. 3,5% beträgt.
   b) Berechne die Zeitspanne, innerhalb der sich der Holzbestand verdoppelt bzw. verdreifacht.
   c) Man hat vor, in 3 Jahren 3000 m³ Holz zu schlagen. Wann wird dieser Wald den heutigen Holzbestand wieder erreichen?

   $B(0) = 7000$ m³ q nicht bekannt, aber $B(10) = 9880$ m³ $\rightarrow 9880 = 7000\, e^{10k}$
   durch Logarithmieren läßt sich t bestimmen
   $1{,}4114 = e^{10k}$ woraus folgt $\ln(1{,}4114) = 10\,k$ oder $k = 0{,}0344$, damit ergibt sich der Wert q zu $q = e^{0{,}0344} = 1{,}035$ woraus schließlich p = 3,5 % entsteht.

   Verdoppelung des Holzbestandes:
   $14\,000 = 7\,000\, e^{t \cdot 0{,}0344} \Rightarrow \ln(2) / 0{,}0344 = t = 20{,}15$

   Bestand in 3 Jahren B(13) = 7000 e13k = 7000 e13•0,0344 = 10 947

   In diesem Jahr sollen 3000 m³ geschlagen werden. Damit bleibt ein Bestand von 7 947 m³ bestehen. Die Wachstumsfunktion erhält dann folgendes Aussehen:

   $9880 = 7947\, e^{t \cdot 0{,}0344} \Rightarrow 0{,}2177 / 0{,}0344 = t = 6{,}34$

Der Wald hat den heutigen Bestand wieder 6,34 Jahre nach dem Holzeinschlag. Das entspricht 9,34 Jahre nach dem heutigen Zeitpunkt.

8. Das Kohlenstoffisotop ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren. Mit seiner Hilfe lässt sich das Alter von Fossilien bestimmen.
   a. Berechne die Zerfallskonstante λ!
   b. In einem Fossil wurde ein ^{14}C-Gehalt von 7,5% der ursprünglichen Menge gemessen. Berechne das Alter des Fossils (runde auf 1000 Jahre).
   c. Bis zu welchem Alter lässt sich die ^{14}C-Methode anwenden, wenn man noch 0,1% des ursprünglichen ^{14}C-Gehalts mit hinreichender Genauigkeit messen kann?

   Das gleiche Vorgehen, wie in der Aufgabe 7. Die Gleichung wird relativ aufgestellt: $\frac{1}{2} N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda 5730}$
   Wenn von einem Fossil noch 7,5 % der ursprünglichen menge gemessen werden, dann gilt die Beziehung $0{,}075\ N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ nach dem Kürzen von N_0 und dem eben berechneten Wert von λ läßt sich der Wert t bestimmen. Aufgabe c löst sich in analoger Weise.

   Lösung:
   a) 0,000121/Jahr
   b) ca. 21000 Jahre
   c) ca. 57000 Jahre

9. Vervollständige die folgende Tabelle:

Element	Halbwertszeit	λ	Abnahme pro Zeiteinheit in %	Wann ist noch 1% übrig?
Radium	1620 Jahre			
Caesium 137		0,0231 / Jahr		
Phosphor 32		0,0485 / Tag		
Jod 131	8 Tage			
Polonium 218			20% / Minute	

Radium	1620 J.	0,000428/Jahr	0,04%	nach 10763 J.
Caesium 137	30 J.	0,0231/Jahr	2,28%	nach 199 J.
Phosphor 32	14,3 T.	0,0485/Tag	4,73%	nach 95 T.
Jod 131	8 T.	0,08664/Tag	8,30%	nach 53 T.
Polonium 218	3,1 Min.	0,2231/min	20,00%	nach 20,6 Min.

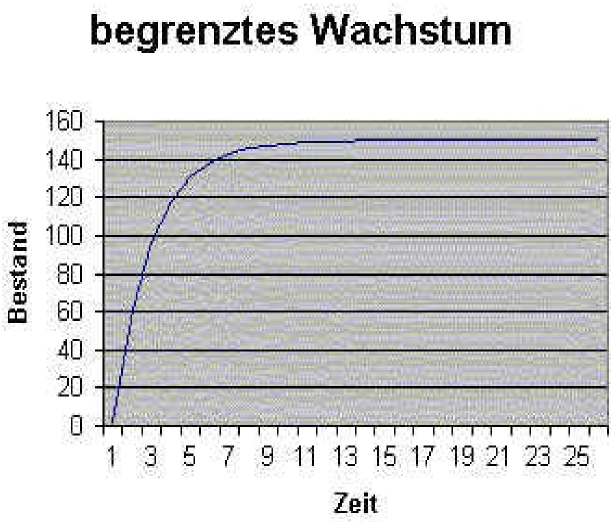
10. Eine Tierpopulation hat sich in 5 Jahren von 200 auf 250 Tiere vergrößert. Wir nehmen zunächst an, dass die Vermehrung exponentiell erfolgt.
    a. Berechne die Konstante λ!
    b. Wieviel Prozent beträgt die jährliche Vermehrung?
    c. Wann hat sich die Population verdoppelt bzw. vervierfacht?

$B(0) = 200$; $B(5) = 250 \rightarrow 250 = 200\ e^{k \cdot 5}$
Für die doppelte oder vierfache Population ist anzusetzen: $400 = 200\ e^{k \cdot t}$ bzw $800 = 200\ e^{k \cdot t}$
da der Wert von k bekannt ist, lassen sich damit die Zeiten berechnen.

Lösung:
a) 0,0446/Jahr
b) 4,56%
c) 15,5 Jahre bzw. 31 Jahre

30.3. Begrenztes Wachstum

Das **begrenzte Wachstum** erfolgt proportional zu einem Restbestand (dies ist die Differenz zwischen einem Zielwert (Grenze) und dem vorhandenem Bestand und wird auch „Sättigungsmanko“ genannt).



- Die Bestandsänderung **B'(t)** ist proportional zur Differenz zwischen Schranke G und dem momentanen Bestand B(t), also **[G – B(t)]**. Hier kann ein bestimmter Bestand nicht überschritten werden und es gibt eine Grenze , die der Graph der Funktion nicht übersteigen kann (Horizontale Asymptote).
- Man sagt auch: Die Änderungsrate B'(t) ist proportional zum Sättigungsmanko G - B(t) : $B'(t) = k * (G - B(t))$ mit $k > 0$
- Ein Wachstum mit **konstanter Wachstumsdifferenz** heißt beschränktes Wachstum.

Die Änderungsrate sinkt je weiter wir uns der Grenze nähern. Dieses Wachstum braucht man zum Beispiel, um den Verlauf bei Erwärmungs- oder Abkühlungsvorgängen nachzuvollziehen, da man eine bestimmte Temperatur nicht überschreiten kann.

Beispiel: Ein eingefrorener Gegenstand wird aus dem Kühlschrank (6,5°C) in eine wärmere Umgebung (24°C) gebracht. Er wird zunächst schneller wärmer, d.h. der Zuwachs der Temperatur ist am Anfang größer als später. In jeder Minute ist der Zuwachs 18% der Differenz zwischen 24 und der Temperatur, die der Gegenstand zu Beginn der Minute hat.

30.3.1. Rechnen mit begrenztem Wachstum:

Die Grenze wird durch den Prozess selbst bestimmt und kann, mathematisch gesehen, jeden beliebigen Wert annehmen. Um den Zuwachs zu ermitteln, bildet man zuerst die Differenz zwischen der Grenze und dem vorhandenem Bestand B(t) und multipliziert dann mit dem Faktor k. B(t+1) ist die Summe aus B(t) und dem Zuwachs.

Rekursionsgleichung

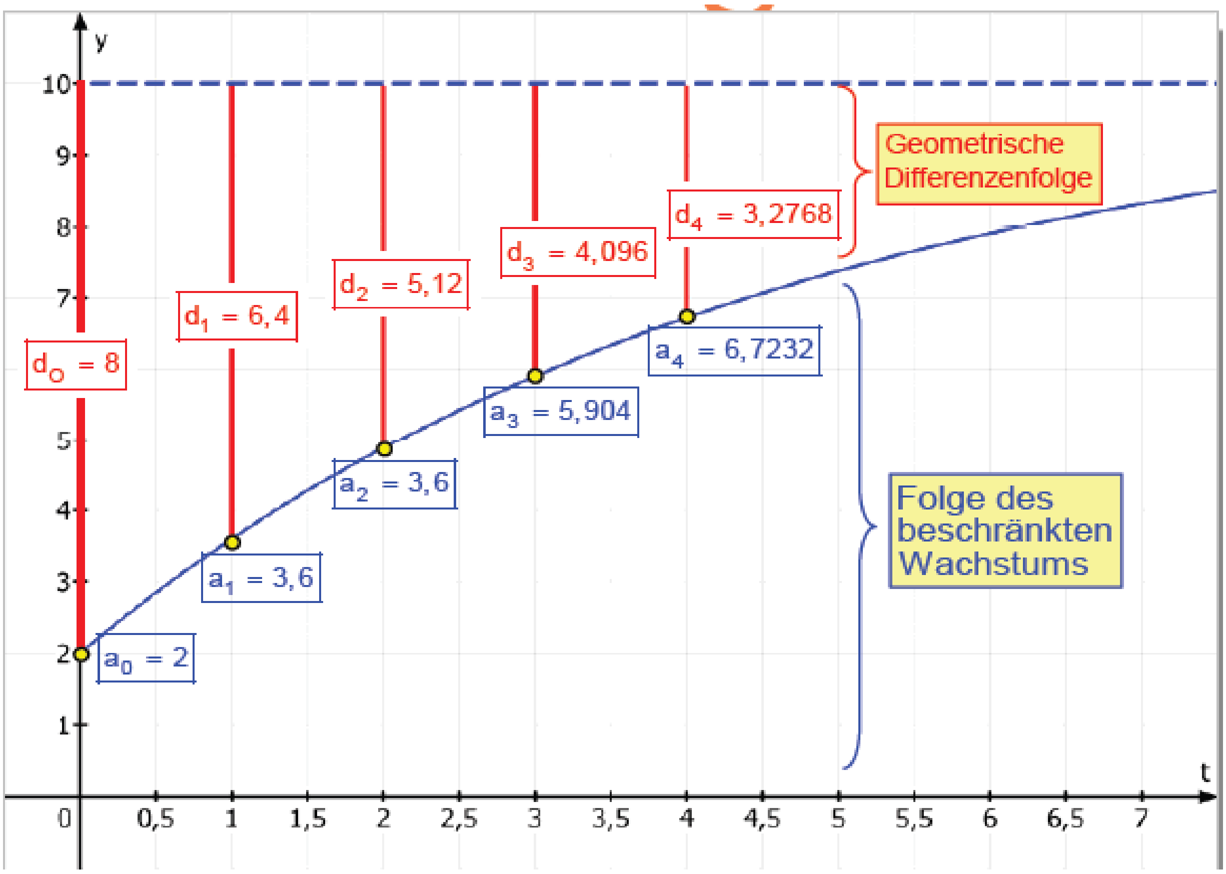
$$\boxed{B(t+1) = B(t) + k \cdot (G - B(t)) = (1 - k) \cdot B(t) + k \cdot G}$$

Der neue Bestand ist gleich
alter Bestand + Konstante • bestandsabhängigem Sättigungsmanko

Mit der Gegengröße d(t) = G – B(t), der Differenz zur Grenze, entsteht ein exponentielles Wachstum.

$$d(t) = G - B(t) \quad \Leftrightarrow B(t) = G - d(t)$$
$$d(t+1) = G - B(t+1) = G - (1\text{-}k) \bullet B(t) - k \bullet G = (1-k)\,(G - B(t))$$
oder
$$d(t) = (1-k) \;\bullet d(t\text{-}1)$$
$$= (1-k)^2 \bullet d(t-2)$$
. . . .
$$d(t) = (1\text{-}k)^t \;\bullet d(0)$$

Damit zeigt die Differenzfunktion d(t) exponentielles Verhalten (*Der neue Wert entsteht aus einem Faktor mit einem Exponenten und einem Grundwert*).



Die **Änderungsrate** R bestimmt sich damit aus:

$$\boxed{\mathbf{R = k \bullet (G - B(t))}}$$

Unter Benutzung der Differenzfunktion und des dort erzeugten Exponentialausdrucks erhält man für die Bestandsentwicklung

$$B(t) = G - d(t)$$
$$= G - \;(1\text{-}k)t \bullet d(0)$$
$$= G - (1\text{-}k)t \bullet (G - B(0)\,)$$

Das führt damit zu folgender **Funktionsgleichung**:

$$\boxed{\mathbf{B(t) = G - (1-k)^t \bullet (G - B(0)) = G - (G - B(0)) \bullet e^{t \bullet \ln(1-k)}}}$$

Die **Differenzialgleichung** erhält man aus der Feststellung, dass die Zuwachsrate zum Zeitpunkt t proportional zur Differenz von der Grenze zum aktuellen Bestand ist.

$$\boxed{B'(t) = -\ln(1-k) \cdot (G - B(t))}$$

Der Zuwachs ist gleich
Konstante ● bestandsabhängigem Sättigungsmanko

Bei Wachstum nähert sich die Kurven von unten der Grenze an, bei Zerfall von oben. Der Wert von k ist immer größer 0, aber kleiner als 1. Damit ist ln(1–k) immer kleiner als Null und – ln(1–k) größer als Null. Ein beschränktes Wachstum hat aber eine positive 1. Ableitung (s. Funktionsbild) und eine beschränkte Abnahme eine negative 1. Ableitung, damit entscheidet das Vorzeichen von G – B(0), ob es sich um Wachstum oder Abnahme handelt.

für G – B(0) > 0 handelt es sich um Wachstum
für G – B(0) < 0 handelt es sich um Zerfall

In der Formel für beschränktes Wachstum treten drei Größen auf:

- ein Anfangsbestand B(0)
- ein Faktor k
- und eine Grenze G.

Gemäß den üblichen mathematischen Regeln, dass man mit einer Gleichung nur eine Variable bestimmen kann, müssen zwei Variable bekannt sich, um die dritte zu berechnen. Eventuell muss man zwei Gleichungen aufstellen, um zwei Variable berechnen zu können. Dann handelt es sich um ein nichtlineares Gleichungssystem, für das es keine allgemeinen Algorithmen gibt. Es sind dann speziell auf das Gleichungssystem zugeschnittenen Lösungswege zu finden.

30.3.2. Bestimmung des Koeffizienten k

Der Koeffizient k, der Wert von B(0) und die Grenze G sind normalerweise durch das fachliche Problem begründet und nicht über mathematische Mittel zu bestimmen. Trotzdem tauchen in Schulbüchern Aufgaben auf, bei denen aus dem Bestand zu einem Zeitpunkt t1 (meist wird dazu der Zeitpunkt t=0 benutzt) und einem Zeitpunkt t2 (meist der Zeitpunkt t=1) der Wert des Parameters k zu berechnen ist. Dazu ist dann die Rekursionsformel

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot (G - B(t))$$

zu benutzen.

In der oben angegebenen Variante der Differenzialgleichung ist das k bei der Rekursionsformel das gleiche, wie bei der Differenzialgleichung. In vielen Büchern findet man die Differenzialgleichung auch in der Form:

$$B'(t) = k \cdot (G - B(t))$$

was zu Irritationen führen kann. Diese beiden k sind nicht identisch.

Bezeichnet man an dieser Stelle die Konstante der Differenzialgleichung sauber mit k': B'(t) = k' •(G – B(t)) so kann man den Zusammenhang

$$k' = -\ln(1-k)$$

herstellen. Andererseits kann man über eine Wertetabelle einfach zeigen, dass für kleine k die Werte für k und k' sich kaum unterscheiden. Für k'=0,04 beträgt die Differenz 0,0008 und für 0,09 noch 0,004, also ganze Zehnerpotenzen kleiner als der tatsächliche Wert.

Fazit: Die Schreibweise $B'(t) = k \cdot (G - B(t))$ ist nicht korrekt, allerdings weichen die Werte für kleine k sehr wenig voneinander ab.

30.3.3. Lösung der Differenzialgleichung

$$B'(t) = -\ln(1-k) \cdot (G - B(t))$$

Eine relativ einleuchtende Methode diese Differenzialgleichung zu lösen, ist die Einführung einer neuen Funktion $h(t) = G - B(t)$, bei der für die erste Ableitung $h'(t) = -B'(t)$ entsteht, so dass aus der obigen Differenzialgleichung:

$$-h'(t) = -\ln(1-k) \cdot h(t)$$

wird. Die Lösung der Differenzialgleichung erfolgt wie bei der Lösung exponentiellen Wachstums über getrennte Variable.

$$\ln|h(t)| = t\ln(1-k) + C$$

Das Auflösen dieser Gleichung nach h(t) führt zu:

$$h(t) = e^{t\ln(1-k)}\ e^C$$

Jetzt erfolgt eine Rücksubstitution der Funktion h(t):

$$G - B(t) = (1-k)^t \cdot e^C$$

Das Anfangswertproblem für t = 0 führt auf der linken Seite zu G – B(0) und damit auf der rechten Seite zu $e^C = G - B(0)$. Beachtet man das Minuszeichen auf der rechten Seite folgt aus der obigen Funktion

$$B(t) = G - (1-k)^t \cdot (G - B(0))$$

30.3.4. Auflösen der Funktionsgleichung nach den einzelnen Bestandteilen

Während das Auflösen der Funktionsgleichung nach den einzelnen Bestandteilen beim exponentiellen Wachstum noch relativ einfach machbar ist, ist es bei der Formel des beschränkten Wachstums schon etwas aufwendiger. Deshalb sollen hier die nach den einzelnen Bestandteilen aufgelösten Formeln angegeben werden. Dabei ist insbesondere auf negative Vorzeichen im Exponenten zu achten.

$$\mathbf{B(0) = \frac{B(t) - G}{(1-k)^t} + G = (B(t) - G)\, e^{-t\cdot\ln(1-k)} + G}$$

$$\mathbf{k = 1 - \sqrt[t]{\frac{G - B(t)}{G - B(0)}}}$$

$$\mathbf{t = \frac{\lg\left(\frac{G - B(t)}{G - B(0)}\right)}{\lg(1-k)} = \frac{\lg(G - B(t)) - \lg(G - B(0))}{\lg(1-k)}}$$

Zum Berechnen benutzt man den Logarithmus zur Basis 10(Basisumrechnung), oder den natürlichen Logarithmus.

$$\mathbf{t = \frac{\ln\left(\frac{G - B(t)}{G - B(0)}\right)}{\ln(1-k)} = \frac{\ln(G - B(t)) - \ln(G - B(0))}{\ln(1-k)}}$$

$$G = \frac{B(t) - (1-k)^t\, B(0)}{1 - (1-k)^t} = \frac{B(t) - B(0) \cdot e^{t \cdot \ln(1-k)}}{1 - e^{t \cdot \ln(1-k)}}$$

30.3.5. Musterbeispiel

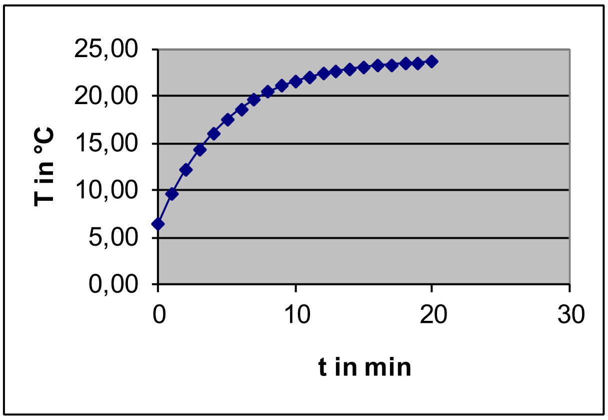
Ein eingefrorener Gegenstand wird aus dem Kühlschrank (6,5°C) in eine wärmere Umgebung (24°C) gebracht. Er wird zunächst schneller wärmer, d.h. der Zuwachs der Temperatur ist am Anfang größer als später.
In jeder Minute ist der Zuwachs 18% der Differenz zwischen 24 und der Temperatur, die der Gegenstand zu Beginn der Minute hat.

Herleitung
Z sei Zuwachs der Temperatur in Grad, T_n sei die Temperatur des Gegenstandes
$Z = (24 - T_n)* 18 / 100$ oder $Z = 0,18 * (24 - T_n)$
Für die neue Temperatur T_{n+1} gilt:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + Z \\ &= T_n + 0,18 * (24 - T_n) \\ &= T_n + 4,32 - 0,18\ T_n \\ &= T_n * 0,82 + 4,32 \end{aligned}$$

Dies ist Überlagerung eines exponentiellen ($T_n * 0,82$) und eines linearen Wachstums (4,32).

Zeit in Minuten	Temperatur in °C
0	6,50
1	9,65
2	12,23
3	14,35
4	16,09
5	17,51
6	18,68
7	19,64
8	20,42
9	21,07
10	21,59
11	22,03
12	22,38
13	22,67
14	22,91
15	23,11
16	23,27
17	23,40
18	23,51
19	23,6
20	23,67

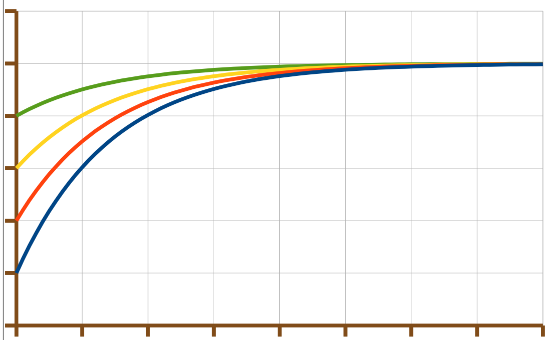
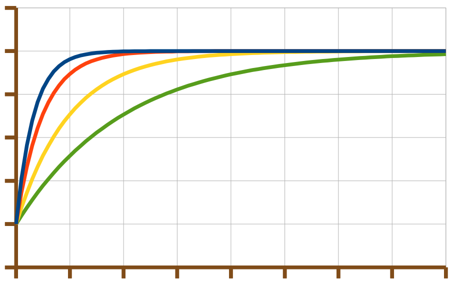


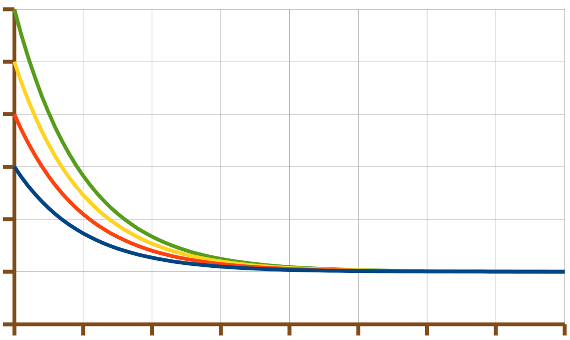
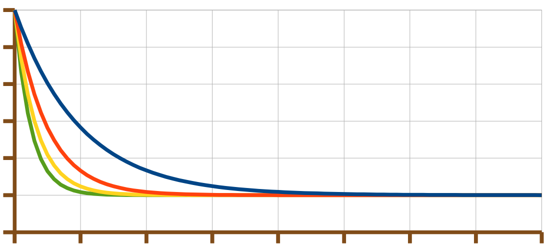
Definition:
Begrenztes Wachstum: der Zuwachs Z ist ein echter Bruchteil der Differenz zwischen der Grenze GR und der momentanen Größe G : Z = Q * (GR – Z) mit Q < 1.

$G_{n+1} = G_n + Z$
$G_{n+1} = = G_n + Q * (GR - G_n)$
$G_{n+1} = G_n (1\text{-}Q)+ Q*GR$
Der Wachstumsfaktor ist W = 1 – Q und der konstante Zuwachs ist Q * GR .

30.3.6. Kurvenverlauf einer beschränkten Wachstumsfunktion

$B(t) = G - (G - B(0)) \cdot e\ t \cdot \ln(1-k)$

Kurvenverlauf beschränktes Wachstum	
	Für eine feste Grenze G und feste Werte von k verlaufen Kurven mit einem höheren Anfangsbestand schneller an die Grenze, als Kurven mit einer größeren Differenz zu Grenze. Der Wert für die Differenz G – B(0) ist in allen Fällen positiv. Je näher B(0) an der Grenze, desto schneller die Annäherung
	Bei festem B(0) und fester Grenze verlaufen die Kurven mit kleinerem k wegen ln(1-k) langsamer an die Grenze (grüne Kurve), als Funktionen mit größerem k (blaue Kurve). Je größer k desto schneller die Annäherung.

Kurvenverlauf beschränkte Abnahme	
	Für eine feste Grenze G und feste Werte von k verlaufen Kurven mit einem niedrigeren Anfangsbestand schneller an die Grenze, als Kurven mit einer größeren Differenz zu Grenze. Die Wert für die Differenz G – B(0) ist in allen Fällen negativ, k ist positiv. Je näher B(0) an der Grenze, desto schneller die Annäherung
	Bei festem B(0) und fester Grenze G verlaufen die Kurven mit kleinerem k wegen ln(1-k) langsamer an die Grenze (blaue Kurve), als Funktionen mit größerem k (grüne Kurve). Je größer k desto schneller die Annäherung.

30.3.7. Überlagerung von exponentieller Abnahme und linearen Wachstum: Zunahme gleich B(0)

Diese Verbindung macht nur Sinn bei einer exponentielle Abnahme im Zusammenhang mit einer linearen Zunahme. Die Konstellation tritt sehr häufig bei ***Medikamentenaufgaben*** auf. Vom Körper wird ein bestimmter Prozentsatz des Medikaments abgebaut (exponentielle Abnahme wegen des Prozentsatzes) und durch Neueinnahme des Medikaments wird wieder Die Menge im Körper aufgebaut. In diesem Zusammenhang ist auch immer davon auszugehen, dass **B(0) gleich der konstanten Zunahme ist**, da das B(0) irgendwann mit 0 angefangen hat und der erste zählbare Wert der konstante Zuwachs ist.

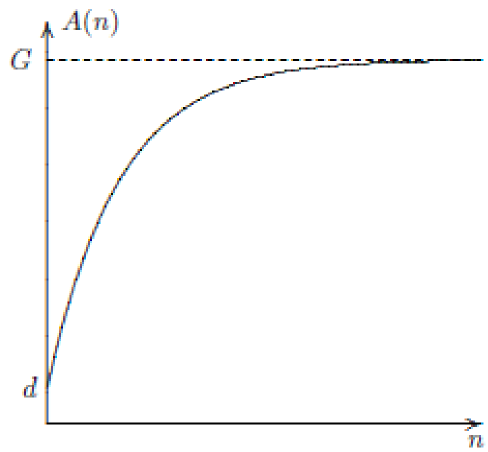
$B(t+1) = B(t) - \frac{p}{100} \cdot B(t) + B(0)$, $\quad B(0) = d$

Für die Grenze G gilt:

$G = B(t+1) = B(t) \quad \Rightarrow \quad B(0) = \frac{p}{100} \cdot G$

$\Rightarrow \quad G = B(0) / k$

mit $k = \frac{p}{100}$



Im Fall einer exponentiellen Abnahme und einem konstanten Zuwachs liegt ein begrenztes Wachstum vor, da der Ausdruck q < 1:

$$
\begin{aligned}
B(0) &= B(0);\\
B(1) &= B(0) \cdot q + B(0) = B(0) \cdot (1 + q)\\
B(2) &= B(1) \cdot q + B(0) = (B(0) \cdot q + B(0))\, q + B(0)\\
&= B(0) \cdot (1 + q + q^2)\\
B(3) &= B(2) \cdot q + B(0) = (B(0) \cdot (1 + q + q^2) \cdot q + B(0)\\
&= B(0) \cdot (1 + q + q^2 + q^3)
\end{aligned}
$$

Es entsteht eine geometrische Reihe, mit deren Summenformel man auf folgende Gleichung kommt:

$$B(t) = B(0) \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

oder als Rekursionsformel (s. oben):

$$B(t+1) = q \cdot B(t) + B(0)$$

Für q < 1 konvergiert eine geometrische Reihe für $n \to \infty$ und die Summe der Reihe ist dann

$$G = B(0) \cdot \frac{1}{1 - q}$$

was mit q = 1 – p wieder zu der oben angegebenen Formel führt: G = B(0) / p wobei p hier als Dezimalzahl und nicht als Prozentzahl verstanden werden muss.

30.3.8. Musterbeispiel

1) Überlagerung einer linearen Zunahme mit einer exponentiellen Zunahme

Ratensparen mit einer zusätzlichen jährlichen festen Einzahlung entsprechen dem Modell einer linearen mit einer exponentiellen Zunahme. Als Kurve kommt eine stärker wachsende Exponentialfunktion heraus, die nach oben keine Grenze hat.

2) Überlagerung einer linearen Zunahme mit einer exponentiellen Abnahme

Beispiel 1

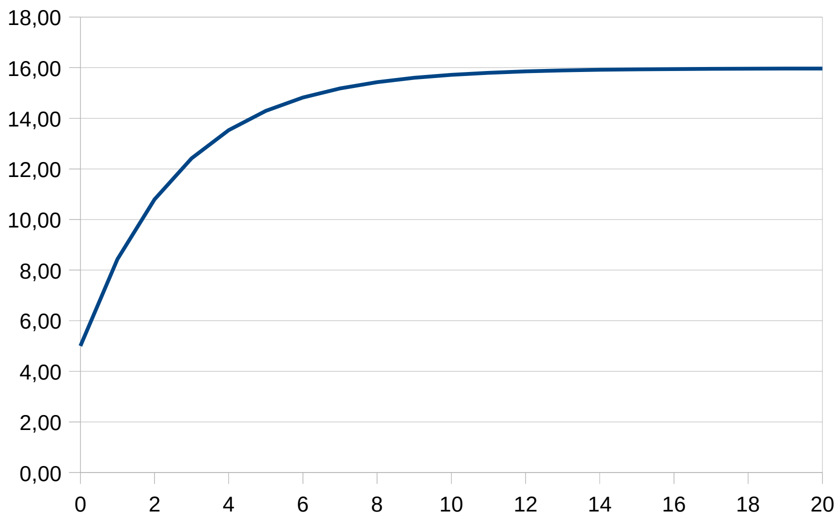
Eine Forschungsanstalt führt einen Versuch auf einem Feld aus. Auf den Acker werden wöchentlich 5 kg eines Unkrautvertilgungsmittel ausgestreut. Der Bestand nimmt wöchentlich um 31,3 % ab.
Nach wieviel Wochen gibt es 15 kg des Unkrautvertilgungsmittel auf diesem Feld ?

Teil 1 Geometrische Abnahme: $B_1(t_1) = q^t\ B_1(t_0)$
mit $q = 1 – p\% = 0{,}687$
Teil 2 Lineares Wachstum: $B_2(t) = k\ t$
mit $k = 5$kg/Woche

B(0) = 5 kg
B(1) = 0,687 * 5kg + 5 kg = 8,435
B(2) = 0,687 * 8,435 kg + 5 kg = 10,79 kg
B(3) = 0,687 * 10,79 kg + 5 kg = 12,41 kg
B(4) = 0,687 * 12,41 kg + 5 kg = 13,53 kg
B(5) = 0,687 * 13,53 kg + 5 kg = 14,29 kg
B(6) = 0,687 * 14,29 kg + 5 kg = 14,82 kg
B(7) = 0,687 * 14,82 kg + 5 kg = 15,18 kg
B(8) = 0,687 * 15,18 kg + 5 kg = 15,43 kg
B(9) = 0,687 * 15,43 kg + 5 kg = 15,60 kg

$$B(9) = 5 \bullet \frac{1 - 0{,}687^{10}}{1 - 0{,}687} = 5\ \text{kg} \bullet \frac{0{,}97658}{0{,}313} = 5 \bullet 3{,}1200 = 15{,}60$$

Als Grenze ergibt sich in diesem Fall: G = 5 / 0,313 = 15,9744 kg. Bei t = 19 ist der Wert 15,97 schon erreicht.



30.3.9. Überlagerung von exponentieller Abnahme und linearem Wachstum: Zunahme ungleich B(0)

Ein zweiter möglicher Aufgabentyp in dieser Kategorie ist die Frage nach einem **Bevölkerungsschwund**. Grundtyp dieser Aufgabenstellung ist folgender: Die Bevölkerung eines Landes hat einen Anfangsbestand B(0) an Einwohnern. Jedes Jahr sterben - **aber pro 1000 Einwohner** - mehr Einwohner, als Kinder geboren werden. Das führt grundsätzlich zu einer exponentiellen Abnahme, da die Abnahme keine konstante Zahl, sondern relativ auf 1000 Einwohner bezogen. Gleichzeitig gibt es eine **konstante Zuwanderungsrate pro Jahr**. Eine konstante Wachstumsrate ist ein lineares Wachstum. (Mitunter wird die Zuwanderungsrate verschleiert, indem eine konstante Zahl an Auswanderern und eine konstante Zahl an Zuwanderern angegeben wird. Die Zuwanderung muss aber überwiegen, sonst wird der Bevölkerungsschwund verstärkt, und dem nicht entgegengearbeitet.)
Der zunächst erkennbare Unterschied besteht darin, dass der konstante Zuwachs nicht mehr B(0) ist, sondern Z.

$$B(t+1) = B(t) - \frac{p}{100} \cdot B(t) + Z\,,$$

Für die Grenze G gilt:

$$G = B(t+1) = B(t) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{p}{100} \cdot G$$

$$\Rightarrow \quad G = Z / k$$

mit $k = \frac{p}{100}$

$$\begin{aligned}
B(0) &= B(0);\\
B(1) &= Z + B(0) \cdot q = Z + B(0) \cdot q\\
B(2) &= Z + B(1) \cdot q = Z + (Z + B(0) \cdot q) \cdot q =\\
&= Z \cdot (1+q) + B(0) \cdot q^2\\
B(3) &= Z + B(2) \cdot q = Z + (Z \cdot (1+q) + B(0) \cdot q^2) \cdot q\\
&= Z \cdot (1 + q + q^2) + B(0) \cdot q^3
\end{aligned}$$

Es entsteht eine geometrische Reihe, mit deren Summenformel man auf folgende Gleichung kommt:

$$\boxed{B(n) = Z \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} + B(0) \cdot q^n}$$

oder als Rekursionsformel (s. oben):

$$\boxed{B(t+1) = q \cdot B(t) + Z}$$

Für q < 1 konvergiert eine geometrische Reihe für $n \to \infty$ und die Summe der Reihe ist dann

$$\boxed{G = Z \cdot \frac{1}{1 - q}}$$

Eine solche Rekursionsformel stellt eine nach unten beschränkte Abnahme dar. Um das zeigen zu können geht man von der Formel des beschränkten Wachstums aus.

Beschränktes Wachstum: $B(t+1) = B(t) + k \cdot (G - B(t))$

Exponentielle Abnahme mit linearer Zunahme: $B(t + 1) = q \cdot B(t) + Z$

Wandelt man die Formel des beschränkten Wachstums so um, dass alle Glieder mit B(t) zusammengefasst werden, erhält man folgende Gleichung:

$$B(t+1) = (1 - k)\, B(t) + k \cdot G$$

Aus dieser Gleichung erhält man die Beziehung: $q = 1 - k$ und $Z = k \cdot G$, oder die Beziehung

$$\boxed{G = Z/k}$$

was es ermöglicht aus der linearen Zunahme den Grenzwert zu bestimmen.

Andererseits kann man die Gleichung der exponentiellen Abnahme mit linearer Zunahme so umformen, dass die Gleichung des beschränkten Wachstums entsteht:

$$\begin{aligned}
B(t + 1) &= q \cdot B(t) + Z \\
B(t + 1) &= B(t) + (q - 1)\, B(t) + Z \\
B(t + 1) &= B(t) - (1 - q)\, B(t) + Z \\
B(t + 1) &= B(t) + (1 - q)\, (Z /(1-q) - B(t)) \\
B(t + 1) &= B(t) + k\, (G - B(t))
\end{aligned}$$

Mit der Beziehung $G = Z / (1 - q)$ oder $G = Z / k$ mit $k = 1 - q$. Damit kann man die Formel für die exponentielle Abnahme mit gleichzeitiger linearer Zunahme aufschreiben in der Form einer Gleichung mit beschränkter Abnahme:

$$\boxed{B(t+1) = B(t) + (1-q) \cdot \left(\frac{Z}{1 - q} - B(t)\right)}$$

Aus dieser Rekursionsgleichung lässt sich über die Differenzialgleichung auch die stetige Form der Funktion herleiten. Bringt man den ersten Ausdruck B(t) auf die linke Seite erhält man folgenden Ausdruck:

$B(t+1) - B(t) = -(1- q)\ (B(t) + Z/(1-q))$ oder geschrieben als Differenzialgleichung

$$\boxed{\mathbf{B'(t) = -\ln(q)\ (B(t) + Z/(1-q))}}$$

Zur Lösung der Differenzialgleichung muss man die Klammer mit dem Ausdruck von B(t) durch Division auf die linke Seite bringen. (Die Begründung liegt in im Lösungsalgorithmus von Differenzialgleichungen und wird hier nicht erläutert). Das führt zu folgendem Ausdruck:

$$\frac{B'(t)}{(B(t) - Z/(1-q))} = -\ln(q)$$

was nach dem Integrieren und dem Auflösen nach B(t) zu der Gleichung

$$B(t) = \frac{Z}{1 - q} + C \cdot e^{-\ln(q)\, t}$$

Die Konstante C resultiert aus der Integration, da bei der Berechnung der Stammfunktion eine additive Konstante hinzuzufügen ist. Aus dieser additiven Konstanten wird durch die Umwandlung des Logarithmus auf der linken Seite und der damit entstehenden e – Funktion auf der echten Seite eine multiplikative Konstante.
Die Aufgabe, die noch bleibt, ist den Wert dieser Konstanten zu berechnen. Dazu gibt es nur einen Anhaltspunkt: Zum Zeitpunkt t = 0 muss aus der Berechnung der rechten Seite der Wert B(0) als Ergebnis erscheinen. Der Wert der e – Funktion selbst ist dann gleich 1, da alle Potenzen mit dem Exponenten 0 den Wert 1 ergeben. Das führt zu folgender Gleichung:

$$B(0) - \frac{Z}{1-q} = C$$

Mit dieser so bestimmten Konstanten ergibt sich die Funktionsgleichung:

$$\boxed{\mathbf{B(t) = \frac{Z}{1-q} + \left(B(0) - \frac{Z}{1-q} \right) e^{-\ln(q)\,t}}}$$

mit den bereits oben hergeleiteten Zusammenhängen :

$$G = Z / (1 - q) \quad \text{und} \quad 1 - q = k$$

erhält man die Form eines beschränkten Wachstums. In der Formel existiert kein Unterschied, ob es sich um beschränktes Wachstum oder beschränkte Abnahme handelt. Der Unterschied wird erst deutlich durch die Werte von Grenze G und Anfangsbestand B(0). Dabei handelt es sich bei **B(0) > G um beschränktes Fallen** und bei **B(0) < G um beschränktes Wachstum**. Aus der Formel sieht man, dass in dem einen Fall zur Grenze etwas addiert wird (beschränkte Abnahme) und im anderen Fall von der Grenze etwas subtrahiert wird (beschränktes Wachstum).

30.3.10. Musterbeispiele

Beispiel 1
Ein Land, das im Jahr 2000 noch 40 Millionen Einwohner hatte, würde einen jährlichen Bevölkerungsschwund von 3% verzeichnen, wenn es nicht jährlich 120000 Einwanderer aufnehmen würde.

B(0) = 40 Millionen
p = 0,03 => q = 1 – p = 0,97
Z = 120 000

Bei der Berechnung werden die Werte in 1000 Einwohner angegeben. Das führt dazu, dass man bei den Bevölkerungszahlen drei 0 weglassen kann

Rekursionsformel:

$$B(t+1) = B(t) + (1-q)\ \left(Z/(1-q) - B(t) \right) = B(t) + 0{,}03\ (120/0{,}03 - B(t))$$
$$= B(t) + 0{,}03\ (4\,000 - B(t))$$

Damit hat man den Wert für die Grenze: 4 000 TEinwohner oder 4 Mio.

Es soll jetzt die Liste für die ersten fünf Jahre aus der rekursiven Gleichung angegeben werden:

B(0) = 40 000
B(1) = 40 000 + 0,03 (4 000 – 40 000) = 38 920
B(2) = 38 920 + 0,03 (4 000 – 38 920) = 37 872
B(3) = 37 872 + 0,03 (4 000 – 37 872) = 36 856
B(4) = 36 856 + 0,03 (4 000 – 36 856) = 35 870
B(5) = 35 870 + 0,03 (4 000 – 35 870) = 34 914

Funktionsgleichung:

$B(t) = Z/ (1\text{-}q) + (B(0) – Z/(1\text{-}q)) \, e^{–\ln(q)\, t}$

$B(t) = 4000 + (40\,000 – 4\,000)\, e^{–0{,}03\, t}$
$B(t) = 4000 + (36\,000)\, e^{–0{,}03\, t}$

Die Werte der ersten fünf Jahre unter Benutzung der stetigen Gleichung:
B(0) = 40 000
B(1) = 38 936
B(2) = 37 903
B(3) = 36 901
B(4) = 35 929
B(5) = 34 985

Beispiel 2

In einem Land mit 80 Millionen Einwohnern kommen jährlich auf 1000 Einwohner 8 Geburten und 11 Todesfälle im Jahr. Die Statistik gibt ferner an, dass im Durchschnitt jährlich 50.000 Personen auswandern und 200.000 Personen einwandern.

a) Berechne die Einwohnerzahl B(t) nach t = 1,2 und 3 Jahren
b) Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und gib die Sättigungsgrenze S sowie den Änderungsfaktor k an.
c) Berechne die Einwohnerzahl nach 20 Jahren.

B(0) = 80 Millionen
p = 0,003 => q = 1 – p = 0,997
Z = 150 000

Rekursionsformel:

B(t+1) = B(t) + (1 – q) (Z/(1-q) – B(t)) = B(t) + 0,003 (150/0,003 – B(t))
= B(t) + 0,003 (50 000 – B(t))

Damit hat man den Wert für die Grenze: 50 000 TEinwohner oder 50 Mio.

Es soll jetzt die Liste für die ersten fünf Jahre angegeben werden:
B(0) = 80 000
B(1) = 80 000 + 0,003 (50 000 – 80 000) = 79 910
B(2) = 79 910 + 0,003 (50 000 – 79 910) = 79 820,27
B(3) = 79 820,27 + 0,003 (50 000 – 79 829,27) = 79 730,81
B(4) = 79 730,81 + 0,003 (50 000 – 79 730,81) = 79 641,62

B(5) = 79 641,62 + 0,003 (50 000 – 79 641,62) = 79 552,69
Zur Berechnung des Jahres 20 muss die Reihe bis t = 20 fortgesetzt werden.

B(6) =	79464,03
B(7) =	79375,64
B(8) =	79287,51
B(9) =	79199,65
B(10) =	79112,05
B(11) =	79024,72
B(12) =	78937,64
B(13) =	78850,83
B(14) =	78764,28
B(15) =	78677,98
B(16) =	78591,95
B(17) =	78506,17
B(18) =	78420,66
B(19) =	78335,39
B(20) =	78250,39

Funktionsgleichung:

$B(t) = Z/(1\text{-}q) + (B(0) - Z/(1\text{-}q))\, e^{-(1-q)t}$

$B(t) = 50\,000 + (80\,000 - 50\,000)\, e^{-0{,}003\,t}$
$B(t) = 50\,000 + (30\,000)\, e^{-0{,}003\,t}$

B(0) = 80 000
B(1) = 79 910,13
B(2) = 79 820,54
B(3) = 79 731,21
B(4) = 79 642,15
B(5) = 79 553,36

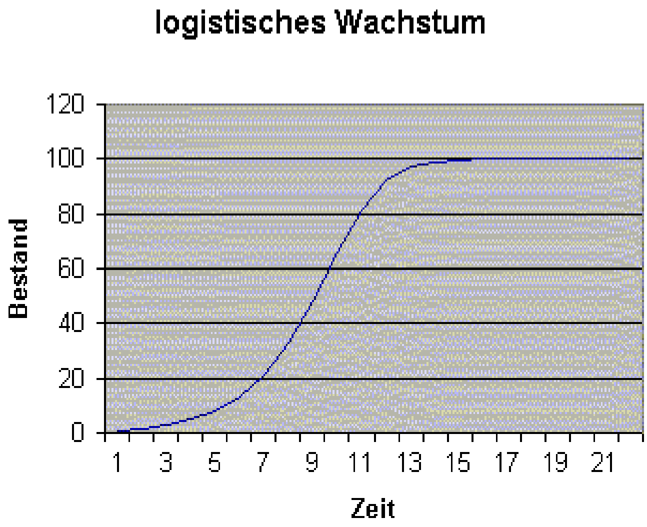
B(20) = 78 253

30.4. Logistisches Wachstum

(Logistisches Wachstum wird ebenfalls als Schulstoff behandelt. Auf grund der doch komplizierten Formellage wurde es aber bisher noch nicht in Abituraufgaben eingebaut)

Im Gegensatz zum beschränkten Wachstum gibt es Vorgänge, die erst langsam anlaufen, sich zunehmend steigern und dann an Grenzen stoßen. Das **logistische Wachstum** erfolgt

1. proportional zu einem **Restbestand** (dies ist die Differenz zwischen einem Zielwert (Grenze) **und** dem **vorhandenem Bestand**: „Sättigungsmanko“)
   und
2. proportional zum Ist-Bestand (B alt),



- Ein Wachstum heißt logistisches Wachstum mit der Grenze G, wenn sich der Bestand B (t) nach t Zeitschritten im nächsten Zeitschritt um **k · B (t) · [G - B(t)]** ändert, wenn also die Änderungsrate zum **Produkt aus Bestand und Sättigungsmanko** proportional ist.

Damit hat man zuerst näherungsweise ein exponentielles Wachstum, dann aber verlangsamt sich das Wachstum und kommt langsam zum Erliegen. Die meisten Wachstumsvorgänge in der Natur verlaufen so, dass zwar erst der Artenbestand wie beim exponentiellen Wachstum wächst, dann aber irgendwann nicht weiter wachsen kann, da es nicht genug Platz oder Futter gibt. Dieses Modell kommt der Realität also sehr nah, da es mehr Faktoren als das lineare, beschränkte oder exponentielle Wachstum berücksichtigt.

Eine geeignete Modellierung geht dabei in der Anfangsphase von exponentiellem Wachstum, in der Endphase von beschränktem Wachstum aus:

Ein Wachstum heißt *logistisches* Wachstum mit der Grenze G, wenn sich der Bestand B (t) nach t Zeitschritten im nächsten Zeitschritt um **k · B (t) · [G - B(t)]** ändert, wenn also die Änderungsrate zum Produkt aus Bestand und Sättigungsmanko proportional ist.

30.4.1. Rechnen mit logistischem Wachstum:

Um mit dem logistischen Wachstum rechnen zu können, braucht man einen **Anfangsbestand**, eine Zahl für den **Faktor** und die **Grenze**. Der (Anfangs-) Bestand (**B alt**) ändert sich nach jeder Rechnung. Um den neuen Bestand (**B neu**) zu errechnen, addiert man B alt mit dem Zuwachs. Da der Zuwachs sich aber bei jeder Rechnung ändert, muss man für ihn eine Formel aufstellen. Um den Zuwachs zu ermitteln, multipliziert man zuerst den Faktor mit dem vorhandenen Bestand (Anfangsbestand oder B alt). Dieses Produkt wird dann mit der Differenz von der Grenze und B alt multipliziert.

Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} B(t+1) &= B(t) + \frac{p}{100} \cdot B(t) \cdot \left(1 - \frac{B(t)}{G}\right) \\ &= B(t) + \frac{p}{100} \cdot B(t) \cdot \frac{G - B(t)}{G} \\ &= B(t) + \frac{p}{100 \cdot G} \cdot B(t) \cdot (G - B(t)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B(t+1) &= B(t) + k \cdot B(t) \cdot (G - B(t)) \\ B(t+1) &= (1 + k \cdot G) \cdot B(t) - k \cdot B(t)^2 \end{aligned}}$$

Der neue Bestand ist gleich
dem alten Bestand + Konstante ● Bestand ● bestandsabhängigem Sättigungsmanko

Die **Änderungsrate** R berechnet sich aus:

$$\boxed{R = k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))}$$

Das führt dann zur **Funktionsgleichung**

$$B(t) = \frac{G}{1 - \frac{G}{B(0) - 1} * e^{-kGt}}$$

bzw. ohne Doppelbruch:

$$B(t) = \frac{B(0) * G}{B(0) + (G - B(0)) * e^{-kGt}}$$

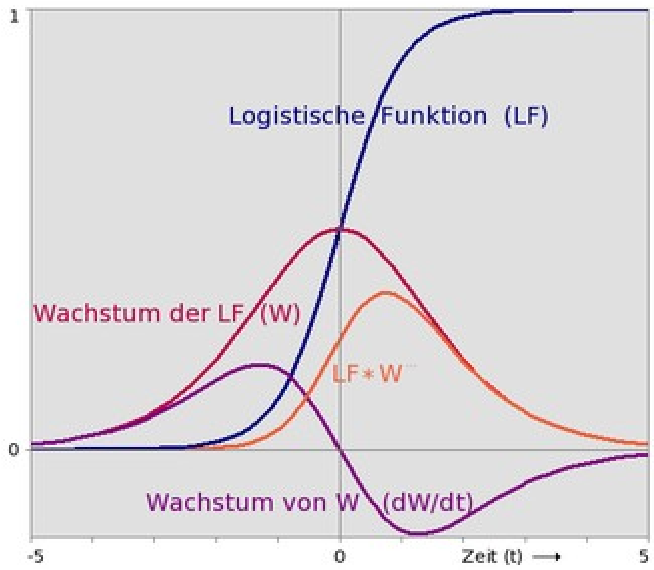
und zur Differenzialgleichung

$$\boxed{B'(t) = k * B(t) * (G - B(t)) \quad \text{mit } k > 0}$$

Der Zuwachs ist gleich
Konstante ● Bestand ● bestandsabhängigem Sättigungsmanko

Die Differenzbildung von G und *B*(*t*) zeigt, dass G die gleiche Dimension hat wie *B*(*t*).

Die Schranke *S* ist also keine Wachstumsgrenze, sondern eine Bestandsgrenze. Daraus ergibt sich, dass das Wachstum (W) *nicht* dem Verlauf der logistischen Funktion (LF) folgt, sondern der ***Bestand*** folgt der logistischen Funktion.
Das logistische Wachstum dagegen folgt dem Verlauf der ersten Ableitung der logistischen Funktion. Das ist eine Glockenkurve (die wiederum nicht mit einer Gauss-Kurve verwechselt werden sollte).



Neben der Ableitung W selbst ist auch das Produkt aus W und LF interessant (orange Kurve in der Grafik). Dieses Produkt ist das mit der logistischen Funktion gewichtete Wachstum. Beschreibt die logistische Funktion beispielsweise einen Markt als „Bestand“, so bewirkt ein Wachstum im Sättigungsbereich (oberer Teil der logistischen Funktion) absolut einen größeren Umsatz als das gleiche Wachstum im Bereich der Emergenz des Marktes (unterer Teil der logistischen Funktion). Der Verlauf dieses gewichteten Wachstums ist aber bei zunehmender Marktsättigung genauso einem Rückgang unterworfen, wie das Wachstum des Marktes selbst.

Eine andere Praxis der Gewichtung des Wachstums erklärt die Unterschiede der Wahrnehmung von Wachstum einerseits aus wirtschaftlicher und andererseits aus physikalischer Sicht. Eine in der Natur der logistischen Funktion begründete Eigenschaft dieser Funktion ist, dass man dem glockenförmigen Wachstum mit einer zeitabhängigen Normierung wieder den Verlauf einer logistischen Funktion geben kann. Normiert wird das Wachstum **W = dB(t)/dt** hierbei mit dem Sättigungsmanko **G – B(t)**. „Sättigungsmanko“ steht dabei für den Bereich, in dem sich noch Bestand verändern kann. Das Resultat ist das mit dem sich immer weiter verkleinernden Sättigungsmanko gewichtete Wachstum **W / [G – B(t)]**. Dieses gewichtete Wachstum hat wieder den Verlauf einer logistischen Funktion. Die Operation einer derartigen zeitabhängigen Normierung kann in einem System geschehen, in dem nur Geld als Kommunikationsmedium dient und in dem das gesamte zur Kommunikation zur Verfügung stehende Geld den Wert des Sättigungsmankos **G – B(t)** zeitabhängig repräsentiert. In dieser Weise wird in Wirtschaftssystemen Wachstum von Wert kommuniziert, das sich aus zunehmender Knappheit ergibt. Denn tatsächlich wächst wegen des kleiner werdenden Sättigungsmankos (also wegen der zunehmenden Sättigung) in der physikalischen Umwelt des Wirtschaftssystems die Knappheit in dieser Umwelt, die das Wirtschaftssystem nicht direkt wahrnimmt, aber mit der sie doch über strukturelle Kopplung verbunden ist.

30.4.2. Bestimmung des Koeffizienten k

Zur Bestimmung des Koeffizienten k gilt das gleiche, was unter dem Kapitel „Beschränktes Wachstum“ steht.
Wegen der nichttrivialen Funktionsgleichung für das logistische Wachstum wird im schulischen Bereich mit der Rekursionsformel gerechnet.

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$$

womit sich Berechnung von k oder G auf die Formeln reduziert:

$$k = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t) \cdot (G - B(t))}$$

$$G = B(t) + \frac{B(t+1) - B(t)}{k \cdot B(t)}$$

Soll die Funktionsgleichung nach ihren einzelnen Variablen aufgelöst werden, so ist das nicht ohne weiteres möglich. Da die Grenze G im Exponenten der e-Funktion und im normalen Bruch auftaucht, kann dieser Wert nicht berechnet werden. (Mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln) Für die anderen Werte k und B(0) ergeben sich folgende aufgelöste Formeln:

$$k = -\frac{1}{G * t} \ln\left(\frac{B(0)}{G - B(0)} \frac{G - B(t)}{B(t)} \right)$$

$$= -\frac{1}{G * t} \ln\left(\frac{B(0)}{B(t)} \frac{G - B(t)}{G - B(0)} \right)$$

$$B(0) = \frac{G\,B(t) * e^{-kGt}}{B(t)\,(e^{-kGt} - 1) + G}$$

Es existieren besonders fiese Varianten von Aufgaben, bei denen k und G gesucht sind. Nach dem mathematischen Grundsatz, dass mit einer Gleichung nur eine Variable zu bestimmen ist, werden in diesem Fall zwei Gleichungen benötigt, was bedeutet, es müssen entweder

- 3 zusammenhängende B(t): B(t), B(t+1) und B(t+2) oder
- 4, wobei jeweils zwei sich nur um eine Zeiteinheit unterscheiden dürfen: $B(t_1)$,$B(t_1+1)$ und $B(t_2)$, $B(t_2+1)$

damit entsteht ein lineares Gleichungssystem von zwei Variablen: k und G.
Es wäre auch noch möglich grundsätzlich 2 Zeiteinheiten zu nehmen, aber es müssen in beiden Gleichungen die gleichen Zeiteinheiten sein.

Beliebt ist auch folgende Aufgabenkombination: Es ist nur der Anfangswert B(0) bekannt, man geht davon aus, dass sich zu Beginn ein exponentielles Wachstum einstellt (was dem Kurvenverlauf entspricht) und gibt einen Wert k an, der einem exponentiellen Wachstum entspricht. Damit erreicht man einen Wert B(1). Dann ist unter Berücksichtigung einer Grenze ein neuer Wert k für ein logistisches Wachstum zu berechnen.

30.4.3. Lösung der Differenzialgleichung

$$B'(t) = k * B(t) * (G - B(t))$$

Das notwendige mathematische Handwerkszeug zum Lösen dieser Differenzialgleichung wird in der Schule nicht behandelt – Partialbruchzerlegung beim Integrieren. Deshalb wird hier auf die Darstellung des Lösungsweges verzichtet.

Definition: Logistisches Wachstum: Der Zuwachs Z pro Zeittrakt ist proportional zu der (wachsenden) Größe G und zugleich zu der Differenz zwischen der Sättigungsgrenze SG und der Größe G :
$Z = Q * G * (SG – G)$ mit $Q < 1 / SG$
Hierbei muss der Wachstumsfaktor (Proportionalitätsfaktor) $Q < 1 / SG$ sein.

$G_{n+1} = G_n + Z$
$G_{n+1} = G_n + Q * G_n * (SG – G_n)$
$G_{n+1} = G_n + Q * G_n * SG – Q * G_n^2$
$G_{n+1} = G_n (1 + Q * SG) – Q * G_n^2$ Vergleiche den Term mit dem von a) .

Eine Algenart hat zu Beginn ihrer ‚Ausbreitung 1 m² eines Sees bedeckt. Die Sättigungsgrenze des Algenwachstums liegt bei 300 m² (Seegröße). Das logistische Wachstum hat den Wachstumsfaktor Q = 0,00333.

Zeit in Monaten	m² Algenbewuchs
0	1
1	1,99567
2	3,976081943
3	7,895543076
4	15,57559974
5	30,32776819
6	57,56236277
7	104,0334559
8	171,9224217
9	245,2470485
10	289,9622877
11	299,6544459
12	299,9992568