29. Gauß'scher Algorithmus

Der Algorithmus von GAUSS ist das universelle Verfahren zur Lösung beliebiger linearer Gleichungssysteme. Mit ihm ist die Lösung von Systemen mit quadratischer Koeffizientenmatrix ebenso möglich wie die Bestimmung der Lösungsmenge von Systemen, bei denen die Anzahl der Gleichungen nicht mit der der Unbekannten übereinstimmt. Im Verlaufe des Prozesses ist erkennbar, ob das Gleichungssystem eine eindeutige, keine oder unendlich viele Lösungen besitzt.
Das GAUSS-Verfahren ist vom Prinzip her nichts anderes als das Additionsverfahren zweireihiger Gleichungssysteme. Der Algorithmus von GAUSS besteht grundsätzlich aus zwei Phasen. Das Ziel der Eliminationsphase besteht darin, die Anzahl der Unbekannten in den Gleichungen schrittweise so weit zu reduzieren, bis eine Gleichung mit nur einer Variablen entsteht. Die Lösung des Gleichungssystems wird durch Rückwärtseinsetzen ermittelt. Dabei wird zuerst die letzte Gleichung mit einer Variablen gelöst. Durch Einsetzen der schon berechneten Werte in die jeweils vorhergehende Gleichung können nacheinander auch die weiteren Variablen ermittelt werden. Das Rückwärtseinsetzen kann auch durch eine weitere Berechnung mittels Gauß'schem Algorithmus ersetzt werden, wie es die GTR machen.

29.1. Lineare Gleichungen

Der Gauß Algorithmus wird bei der Lösung von Gleichungen verwendet, die man auch lineare unabhängige Gleichungssysteme nennt. Das bedeutet eine bestimmte Anzahl von zusammengehörigen Gleichungen mit einer bestimmten Anzahl von Variablen (Unbekannten).
Die dabei verwendeten Gleichungen sind im Grunde immer Summen. Links vom Gleichheitszeichen stehen die Summanden. Jeder Summand besteht aus einem x-Wert (Variable) und einem dazugehörigen Faktor (Zahl), der auch Koeffizient heißt. Bei den linearen Gleichungen haben die x-Werte die Potenz 1 und es dürfen keine Produkte von verschiedenen Variablen auftreten.
Dadurch, dass ein Summand auch negativ sein kann, kann in der Summe auch eine Subtraktion auftreten, das bedeutet aber letztlich auch nur eine Summe mit negativen Zahlen.
Rechts vom Gleichheitszeichen steht immer ein Wert, der der gesamten Summe entspricht.
Beispiel:

x-Wert Koeffizient

$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4$$

Index

Damit man die x-Werte, die verschieden sind, unterscheiden kann, haben sie eine Fußnote, die man Index (Mehrzahl: Indices, sprich: indizees) nennt. Eine lineare Gleichung kann beliebig viele Summanden haben.

29.2. Lineare Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem besteht aus mehreren linearen Gleichungen. Dabei muss man beachten, dass die x-Werte mit demselben Index in allen Gleichungen gleich groß sind. Man kann also sagen, dass die x-Werte mit demselben Index dieselben Summanden darstellen. Allerdings kann ein Summand zwar denselben Index, aber verschiedene Koeffizienten haben. Das bedeutet, derselbe Summand hat verschiedene Faktoren.

Auch die rechten Seiten bei einem Gleichungssystem haben verschiedene Werte. Alles in allem geht es ja immer darum, dass durch mehrere verschiedene Gleichungen ein und dieselben x-Werte ermittelt werden können. Man kann sich jede Gleichung als eine andere Summe mit anderen Vielfachen derselben x-Werte vorstellen.
Das Verfahren arbeitet mit sogenannten Äquivalenzumformungen, das sind solche Umformungen, die die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändern.

Zu Äquivalenzumformungen, die die Lösungsmenge nicht beeinflussen, gehören folgende Rechenoperationen:

1. Das Vertauschen zweier Zeilen
2. Das Vertauschen zweier Spalten
3. Addition von zwei Gleichungen / Zeilen des Gleichungssystems und Ersetzen einer Gleichung / Zeile durch die Summe der beiden Gleichungen / Zeilen.
4. Multiplikation einer Gleichung / Zeile der Matrix mit einer Zahl ungleich Null.

Zu beachten ist nur folgendes: Das Vertauschen zweier Spalten ändert nicht die Lösungsmenge, die Variablen stehen aber an anderen Stellen, als in dem ursprünglichen Gleichungssystem. Da die Reihenfolge, in der die Variablen stehen können, beliebig ist, hat das keine Auswirkung auf die Lösungsmenge.

29.3. Zeilenstufenform

Das Ziel des Gauß'schen Algorithmus besteht darin, eine Zeilenstufenform, oder eine dreieckige Gestalt des Gleichungssystem zu erreichen. Was ist darunter zu verstehen ?

- Die erste Zeile des Gleichungssystems wird unverändert erhalten.
- Die zweite Zeile des Gleichungssystems soll so umgeformt werden, dass der Koeffizient der ersten Variablen 0 wird.
- Die dritte Zeile des Gleichungssystems soll so umgewandelt werden, dass der Koeffizient der ersten und zweiten Variablen 0 wird, usw.

Das Ergebnis einen solchen Prozesses ist, dass aus dem Gleichungssystem eine dreieckige Form entsteht, bei dem in der letzten Zeile nur noch eine Variable steht, die man dann sehr einfach durch Division mit dem Koeffizienten berechnen kann.

x_1	x_2	x_3	x_4	rechte Seite	
X	X	X	X	R	1. Zeile
0	X	X	X	R	2. Zeile
0	**0**	X	X	R	3. Zeile
0	**0**	**0**	X	R	4. Zeile

Aus der formalen Darstellung kann man leicht erkennen, das es in der 4. Zeile problemlos möglich ist, den Wert für die 4.Variable zu berechnen. Es wird sich später zeigen, dass es nicht möglich ist, für alle Gleichungssysteme diesen Idealfall zu erreichen.

- Zu Beginn wird geprüft, ob im Gleichungssystem schon Zeilen existieren, die diese Stufenform besitzen, also eine Zeile existiert, die bei den ersten Variablen als Koeffizienten nur 0-en hat, bzw. bei der die ersten Variablen **nicht** auftreten, denn dann ist der Koeffizient gleich 0.
- Vor der Durchführung - und theoretisch auch während - darf und soll man Zeilen vertauschen, wenn es von Vorteil ist. Aber es dürfen nur die Zeilen vertauscht werden, die noch in Bearbeitung sind, niemals die Zeilen, die unverändert bleiben müssen.
- Für jede Zeile i, startend mit der obersten Zeile mit i = 1 bis zur vorletzten Zeile tue folgendes:
  - für jede Zeile j, wobei j > i
    – Die Zeile j liegt somit immer unter der Zeile i –
    addiere oder subtrahiere ein Vielfaches der Zeile i von j, so dass die Variable $a_{j\,i}$
    – i gibt die Spaltennummer an –
    0 wird.

29.3.1 Grundgedanke des Algorithmus

Beim Gauß Algorithmus werden schrittweise zwei Rechenschritte mehrfach ausgeführt.

a) Eine Gleichung wird mit einem Faktor multipliziert, es wird also ein Vielfaches der Gleichung gebildet.
b) Das Vielfache der Gleichung wird zu einer anderen Gleichung (oder zu mehreren Gleichungen) addiert.

Diese Schritte sollen an einem einfachen Gleichungssystem dargestellt werden.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ x_1 + + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Man beginnt grundsätzlich mit der Gleichung in der ersten Zeile. Es kann durchaus sinnvoll sein, dass man die Zeilen vertauscht, damit der manuelle Rechenaufwand klein bleibt. Für maschinelles Rechnen hat das keine Bedeutung.
Die Idee der Vervielfachung ist folgende:
Wenn man alle Glieder der Gleichung, also alle Summanden und auch die rechte Seite mit ein und demselben Faktor multipliziert, dann ändert sich der Gesamtwert der Gleichung nicht.

Wird die erste Gleichung aus dem Beispiel mit (-3) multipliziert, ändert sich zwar die Form der Summanden und die Summe, aber nicht der Gesamtwert der Gleichung.

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -6x_1 - 6x_2 + 12x_3 = -15$$

Dieses Verfahren ist bereits vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit 2 Variablen bekannt. Zur Anwendung des Additionsverfahrens oder auch für das Gleichsetzungsverfahren ist es oftmals notwendig die gesamte Gleichung zu multiplizieren.

29.3.2 Mit welchem Faktor muss multipliziert werden

Nun führt nicht jede Multiplikation mit einem beliebigen Faktor zu dem gewünschten Erfolg. Es bleibt also die Frage: Mit welchem Faktor muss man denn multiplizieren ? Dazu gilt folgender Grundsatz: Die erste Zeile bleibt so stehen, wie sie ist. Man muss von Gleichung1 oder einer darunterliegenden Gleichung dasjenige Vielfache bilden, das zu den anderen Gleichungen addiert einen kompletten Summanden (auf der linken Seite) verschwinden lässt (eliminiert). Bei Benutzung der Gleichung 1 muss es der Summand mit der Variablen x_1 sein, der in allen darunterliegenden Zeilen verschwindet. Kompletter Summand heißt: x-Wert und Koeffizient.

29.3.3 Umwandlung der Koeffizienten der ersten Variablen

Im Beispiel führt das negative 2-fache der Gleichung 2, addiert zur Gleichung 1 zum Erfolg. Damit wird der Koeffizient von x_1 in der Gleichung 2 gleich 0 und fällt damit weg.

Gleichung 2: $x_1 + \quad + 2x_3 = 0 \quad | * -2$

ergibt: $-2x_1 \quad - 4x_3 = 0$

Gleichung 1: $+ \quad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$

neue Gleichung 2: $+ 3x_2 - 8x_3 = 5$

Damit entstehen für die ersten beiden Gleichungen folgende neue Gleichungen:

$$\begin{aligned} +2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ + 3x_2 - 8x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Das gleiche wird jetzt mit der dritten Zeile durchgeführt. Für die dritte Zeile ist eine Multiplikation überflüssig, da das einfache Addieren der beiden Zeilen dazu führt, dass der Koeffizient vor dem x_1 zu Null wird.

I: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$

III: $-2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1$

neue Gleichung III: $-x_2 - x_3 = 4$

Damit ist die erste Umformung beendet und man erhält folgendes neues Gleichungs-system:

$$\begin{aligned} +2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ + 3x_2 - 8x_3 &= 5 \\ - x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Aus diesem ersten Schritt wird schon folgendes klar: Es wird spaltenweise gearbeitet. Als erstes werden die Koeffizienten für die erste Spalte, in der die Variable x_1 steht verändert, dass unterhalb der ersten Zeile nur Koeffizienten von 0 stehen.

29.3.4 Umformung weiterer Spalten

Als nächstes macht man die gleiche Umformung für die Koeffizienten von x_2. Dabei ist folgendes zu berücksichtigen: Die Zeile 1 ist ab jetzt völlig tabu. Sie darf weder mit einer späteren Zeile vertauscht werden, noch ist diese Zeile bei weiteren Berechnungen mit einzubeziehen. Spaltenvertauschungen wären noch möglich, dann sind auch die Spalten der ersten Zeile mit zu vertauschen.
Zeilenvertauschungen sind ab jetzt nur noch ab Zeile 2 erlaubt. Es soll auf Zeilenvertauschungen verzichtet werden und und der Koeffizient der 3. Zeile vor der Variablen x_2 so umgeformt werden, dass eine 0 entsteht. Dazu gilt jetzt die Zeile 2 aus Ausgangspunkt. Die Zeile 2 bleibt ebenfalls unverändert, wird aber in die Berechnung mit der darunterliegenden Zeile einbezogen.
Es ist klar zu erkennen, wenn man die dritte Zeile mit 3 multipliziert und dann zur 2. Zeile addiert, wird der Koeffizient vor der Variablen x_2 zu 0.

$$+ 3x_2 - 8x_3 = 5$$
$$- 3x_2 - 3x_3 = 18$$

Damit entsteht folgende Änderung:

Gleichung II. : $+ 3x_2 - 8x_3 = 5$
Gleichung III. : $- 3x_2 - 3x_3 = 18$

neue Gleichung III. $- 11x_3 = 13$

Jetzt ist die Umformung des Gaußschen Algorithmus beendet:

- Alle x_1 Koeffizienten unterhalb der 1. Zeile sind gleich 0.
- Alle x_2 Komponenten unterhalb der 2. Zeile sind gleich 0.

Die Weiterführung dieses Algorithmus führt dann zu den Aussagen:

- Alle x_3 Koeffizienten unterhalb der 3. Zeile sind gleich 0.
- Alle x_4 Komponenten unterhalb der 4. Zeile sind gleich 0.
- usw.

Auch, wenn das an dem kleinen Gleichungssystem nicht gezeigt werden kann, ist das der Weg des Gaußschen Algorithmus.

29.3.5 Allgemeines Berechnungsschema

Erster Durchlauf i = 1:

Aktuelles i →	X	X	X	X
Aktuelles j →	0	X	X	X
	X	X	X	X
	X	X	X	X

Aktuelles i →	X	X	X	X
	0	X	X	X
Aktuelles j →	0	X	X	X
	X	X	X	X

Aktuelles i →	X	X	X	X
	0	X	X	X
	0	X	X	X
Aktuelles j →	0	X	X	X

- Beim ersten Durchlauf werden alle Zeilen unterhalb der Zeile 1 bearbeitet.
- Vor dieser Berechnung können noch alle Zeilen vertauscht werden.
- Nach dem Ende der Berechnung sind unterhalb der ersten Zeile – in der ersten Spalte – alle Koeffizienten gleich 0
- Am Ende dieses Durchlaufs entsteht ein neues Gleichungssystem, bei dem in der ersten Spalte Nullen stehen.

Zweiter Durchlauf i = 2:

	X	X	X	X
Aktuelles i →	0	X	X	X
Aktuelles j →	0	0	X	X
	0	X	X	X

	X	X	X	X
Aktuelles i →	0	X	X	X
	0	0	X	X
Aktuelles j →	0	0	X	X

Dritter Durchlauf i = 3:

	X	X	X	X
	0	X	X	X
Aktuelles i →	0	0	X	X
Aktuelles j →	0	0	0	X

- Beim zweiten Durchlauf werden alle Zeilen unterhalb der Zeile 2 bearbeitet.
- Vor dieser Berechnung können noch alle Zeilen ab der 2. Zeile vertauscht werden.
- Nach dem Ende der Berechnung sind unterhalb der zweiten Zeile – in der zweiten Spalte – alle Koeffizienten gleich 0.
- Am Ende entsteht ein Gleichungssystem, bei dem in der zweiten Spalte Nullen stehen.
- Beim dritten Durchlauf werden alle Zeilen unterhalb der Zeile 3 bearbeitet.
- . . . .

Dieser Idealfall, bei dem eine Dreiecksform entsteht, bei der man mit der Berechnung der letzten Variablen einfach beginnen kann und dann die bereits berechneten Variablen in der Zeile darüber einsetzt, erreicht man nur bei einem Gleichungssystem, das genau so viele Gleichungen hat, wie Unbekannte (und noch nicht einmal da immer).

Außerdem ist zu erkennen, dass die Bezeichner der Variablen keine Rolle spielen, sondern nur die Koeffizienten vor diesen Variablen. Ob das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ x_1 + \quad\;\; + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 2t + 3u - 4v &= 5 \\ t + \quad\;\; + 2v &= 0 \\ -2t - 4u + 3v &= -1 \end{aligned}$$

heißt , hat auf die Lösungen keinen Einfluss, sondern nur auf die Bezeichnung der Variablen, denen man die jeweilige Lösung zuweist.

29.4. Die Matrix

Die eben erwähnte Tatsache macht man sich zu Nutze, dass man die Gleichungssysteme nicht löst, indem man ständig die Variablen mitschreibt, sondern man schreibt nur die Koeffizienten in einer entsprechenden Form und merkt sich oder markiert die Spalten, welche Variable zu welcher Spalte gehört:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & +3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & +2 & 0 \\ -2 & -4 & +3 & -1 \end{array}$$

In diesem Gebilde wir die Zeile nicht mehr als eine Gleichung angesehen, sondern als Zahlentupel, bei dem jede Zahl einer Variablen zugeordnet ist. Ein Gebilde dieser Art nennt man **Matrix**. Mit dieser Matrix lassen sich die gleichen Operationen durchführen, wie mit einem Gleichungssystem, mit dem Unterschied, dass der Schreibaufwand geringer ist. Es sollte streng darauf geachtet werden, dass die Zahlen, die als Koeffizienten der gleichen variablen zugeordnet sind, untereinander stehen. Treten in einzelnen Zeilen Variable gar nicht auf, wir an dieser Stelle die Zahl „0“ eingesetzt. Nach einem senkrechten Strich, den man unbedingt setzen sollte, auch wenn er mathematisch nicht vorgeschrieben ist, schreibt man die Zahlen der rechten Seite des Gleichungssystems. Eine solche Matrix ist als ganzes in runde Klammern zu setzen, damit es für jeden, der sich mit der Materie auskennen, sofort als Matrix zu erkennen ist.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & +3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & +2 & 0 \\ -2 & -4 & +3 & -1 \end{array}\right)$$

Diese runden Klammern sind Pflicht und dürfen nicht weggelassen werden. Es ist auch nicht erlaubt eckige oder geschweifte Klammern zu setzen. Die runden Klammern gehören zu mathematischen Symbol.
Für die Benutzung von Matrizen für Gleichungssysteme muss man unbedingt folgende zwei Matrizen unterscheiden:

1. **Die Koeffizientenmatix**. Unter dieser Bezeichnung sind nur die Zahlen zusammengefasst, die im Gleichungssystem den Zahlen vor den Variablen entsprechen, eben die Koeffizienten. Bei dieser Bezeichnung sind damit die Werte der rechten Seite nicht mit gemeint.
2. **Die erweiterte Koeffizientenmatrix**. Das ist die gerade erwähnte Koeffizientenmatrix, die um die Werte der rechten Seite des Gleichungssystems erweitert wurde.

Bei den weiteren Untersuchungen eines Gleichungssystem werden diese beiden Bezeichnung intensiv benutzt. Sie sind allgemeine mathematisch gängige Bezeichnungen.
In Zusammenhang mit der Lösung von Gleichungssystemen ist ein weiterer für Matrizen wichtiger Begriff von Bedeutung.

Definition:
Unter dem **Rang einer Matrix** versteht man die Anzahl linear unabhängiger Zeilen und Spalten in einer Matrix.

Wer bereits Vektorrechnung kennt, sollte mit dem Begriff der Linearen Unabhängigkeit vertraut sein. Für alle anderen soll hier die anschauliche Interpretation des Begriffes reichen: Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten ist die Anzahl der Zeilen, die nach dem Gaußschen Algorithmus verschieden von Null sind. Entstehen Zeilen, die vollständig zu 0 werden, dann gibt es linear abhängige Zeilen und Spalten. Ohne näheren Beweis soll hier als Information angegeben werden: Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spalten. Damit hat jede Matrix nur einen Rang für Zeilen und Spalten. Deshalb spricht man nicht von einem Zeilenrang und einem Spaltenrang, sondern nur von einem Rang. Der Begriff des Ranges bzw. die Anzahl von Null verschiedener Zeilen hat entscheidenden Einfluss auf die Lösbarkeit eines Gleichungssystems.
Der Rang einer vergrößerten Matrix (hier: erweiterte Matrix) kann höchsten größer sein, als der Rang der kleineren Matrix (hier: Koeffizientenmatrix), aber niemals kleiner ! Damit ist der Rang der Koeffizientenmatrix der kleinste möglich Rang.

Im folgenden werden die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten dargestellt.

29.5. Eindeutig lösbares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= -3 \\
-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\
x_1 \qquad + 4x_3 - x_4 &= 4
\end{aligned}$$

Zunächst wird das gegebene Gleichungssystem in das GAUSS-Schema übertragen. Dabei werden die Koeffizienten jeder Gleichung in eine Zeile und die zu gleichen Variablen gehörigen in eine Spalte eingetragen. Tritt eine der Variablen in einer Gleichung nicht auf, so wird an die Stelle ihres Koeffizienten eine Null geschrieben. Variable, die im System ohne Koeffizienten erscheinen, erhalten im Schema die Eins als Koeffizient. Somit ergibt sich die nachfolgende Tabelle:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{rrrr|r}
2 & -3 & 4 & 1 & -3 \\
-1 & 2 & 2 & -3 & 7 \\
3 & 1 & -2 & 4 & 0 \\
1 & 0 & 4 & -1 & 4
\end{array}\right)
\end{array}$$

Nun kann mit der Elimination begonnen werden. Zunächst werden die erste und zweite Zeile vertauscht, um die nachfolgende Rechnung zu erleichtern. Steht nämlich in der Zeile, deren Vielfaches zu den weiteren addiert wird, in der ersten Position eine 1 oder −1, so braucht nur diese mit einem Faktor multipliziert zu werden. Dann werden die Zeilen (Gleichungen) einschließlich der rechten Seite so kombiniert, dass sich in der ersten Spalte ab Zeile 2 Nullen ergeben. Im zweiten Eliminationsschritt werden dann in der zweiten Spalte unterhalb der Zeile 2 Nullen erzeugt. Nach dem dritten Schritt ist die gewünschte Dreiecksform erzeugt. Die verwendeten Koeffizienten werden wieder rechts neben dem Schema angegeben.

x_1	x_2	x_3	x_4	b			
−1	2	2	−3	7	| · 2	| · 3	| · 1
2	−3	4	1	−3	| · 1		
3	1	−2	4	0		| · 1	
1	0	4	−1	4			| · 1

					1. Eliminationsschritt	
−1	**2**	**2**	**−3**	**7**	**Übernehmen 1. Zeile**	**unantastbar**
0	1	8	−5	11	| · (−7) | · (−2)	
0	7	4	−5	21	| · 1	
0	2	6	−4	11	| · 1	

					2. Eliminationsschritt	
−1	**2**	**2**	**−3**	**7**	**Übernehmen 1. Zeile**	**unantastbar**
0	**1**	**8**	**−5**	**11**	**Übernehmen 2. Zeile**	
0	0	−52	30	−56	(3) : (2)	
0	0	−10	6	−11		

−1	2	2	−3	7	
0	1	8	−5	11	
0	0	−26	15	−28	| · 5
0	0	−10	6	−11	| · (−13)

					3. Eliminationsschritt	
−1	**2**	**2**	**−3**	**7**	**Übernehmen 1. Zeile**	**unantastbar**
0	**1**	**8**	**−5**	**11**	**Übernehmen 2. Zeile**	
0	**0**	**−26**	**15**	**−28**	**Übernehmen 3. Zeile**	
0	0	0	−3	3	(4)	

- Die Koeffizientenmatrix hat eine Dreiecksform
- Alle Zeilen der Koeffizientenmatrix sind verschieden von 0.
- Alle Zeilen der Koeffizientenmatrix sind linear unabhängig.
- Der **Rang der Koeffizientenmatrix** ***ist gleich*** dem **Rang der erweiterten Matrix**.
- Der **Rang** der beiden Matrizen ***ist gleich*** der **Anzahl der Variablen**. Das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung

=> Das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung.

Durch Rückwärtseinsetzen der bereits berechneten Variablen kann in einer Zeile höher die nächste Variable bestimmt werden und damit schrittweise alle Variablen.

29.6. Nicht lösbares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 7y & + & 3z & = & 8 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 9 \\ -3x & + & 5y & - & 13z & = & 10 \end{array}$$

Die Elimination der Koeffizienten und der rechten Seite führt das Gleichungssystem in eine Matrix über. Daraus entsteht mittels Gaußschem Algorithmus folgende Rechnung

x_1	x_2	x_3	b		
5	−7	3	8	| · (−2)	| · 3
2	−3	4	9	| · 5	
−3	5	−13	10		| · 5
5	−7	3	8		
0	−1	14	29	| · 4	
0	4	−56	74	| · 1	
5	−7	3	8		
0	−1	14	29		
0	**0**	**0**	**190**		

Die Koeffizientenmatrix hat eine Zeile, die komplett aus Nullen besteht, betrachtet man allerdings die erweiterte Matrix, dann besteht die letzte Zeile nicht aus Nullen.

- Die Koeffizientenmatrix hat **keine** Dreiecksform
- In der Koeffizientenmatrix gibt es Zeilen, die nur aus Nullen bestehen
- Die Zeilen der Koeffizientenmatrix sind linear abhäbgig
- In der erweiterten Matrix gibt es keine Zeilen, die nur aus Nullen bestehen.
- Der **Rang der Koeffizientenmatrix** ***ist kleiner*** als der **Rang der erweiterten Matrix**.

=> das Gleichungssystem besitzt keine Lösung

Die letzte Zeile zeigt einen Widerspruch an:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 190.$$

Diese Gleichung kann niemals erfüllt werden. Das Gleichungssystem hat somit keine Lösung. Dabei können durchaus auch komplette Nullzeilen in Koeffizientenmatrix und erweiterter Matrix auftreten. Existiert auch nur eine Zeile, bei der im Koeffizienten-bereich nur Nullen auftreten, aber auf der rechten Seite keine 0 steht, ist das Gleichungssystem unlösbar.

29.7. Gleichungssysteme mit Parameterlösung

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 14 \\ 5x - 4y - 2z &= 10 \\ 11x - 9y - 7z &= 16 \end{aligned}$$

Das umgeformte Gleichungssystem führt mittel Gaußschem Algorithmus zu folgendem Ergebnis:

4	−3	1	14	| · (−5)	| · (−11)
5	−4	−2	10	| · 4	
11	−9	−7	16		| · 4
4	−3	1	14		
0	−1	−13	−30	| · (−3)	
0	−3	−39	−90	| · 1	
4	−3	1	14	(1)	
0	−1	−13	−30	(2)	
0	**0**	**0**	**0**	(3)	

Beim Versuch, die letzte Zeile so umzuformen, dass der Koeffizient vor y zu null wird, ergibt sich eine vollständige Nullzeile. Offenbar sind nach dem ersten Eliminationsschritt die zweite und die dritte Gleichung Vielfache voneinander. Damit sind nur zwei linear unabhängige Gleichungen vorhanden, sodass die Lösung nicht eindeutig bestimmt werden kann.

- Die Koeffizientenmatrix hat **keine** Dreiecksform
- In der Koeffizientenmatrix gibt es Zeilen, die nur aus Nullen bestehen
- Die Zeilen der Koeffizientenmatrix sind linear abhäbgig
- In der erweiterten Matrix gibt es **genau so viele** Nullzeilen, wie in der Koeffizientenmatrix
- Die Zeilen der erweiterten Matrix sind auch linear abhängig
- Der **Rang der Koeffizientenmatrix** ***ist gleich*** dem **Rang der erweiterten Matrix**. Das Gleichungssystem ist lösbar
- Der **Rang** der beiden Matrizen ***ist kleiner*** der **Anzahl der Variablen**. Das Gleichungssystem besitzt eine Parameterlösung

Im Lösungsschema zeigt sich dies so, dass die Koeffizientenmatrix nicht in eine „echte“ Dreiecksform umgewandelt werden kann. Vielmehr entsteht nach Beendigung der Eliminationsphase eine Trapezgestalt der Zeilen (1) und (2). Da sich in Gleichung (3) auch auf der rechten Seite eine Null ergibt, tritt kein Widerspruch auf, das System kann also gelöst werden. Die verbliebene Systemmatrix besitzt zwei Zeilen, während die Anzahl der Unbekannten drei ist.
Zunächst ergibt sich, dass die letzte Zeile immer lösbar ist. Diese Zeile liefert keine Einschränkung der Lösungsmenge mehr.

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$$

Aber man kann trotzdem nicht alle beliebigen Kombinationen von x, y z als Lösung des Gleichungssystems ansehen, da die Zeilen 2 und 1 Einschränkungen der Lösungs-menge bringen. Aus der Gleichung II ist zu schlußfolgern: Wenn y oder z einen

beliebigen Wert annimmt, dann ist der andere Wert z oder y eindeutig bestimmt. Aber diesen ersten Wert y oder z kann man beliebig wählen und es gibt **genau einen** entsprechenden anderen Wert z oder y der die zweite Gleichung löst.
Da man hier nur einen Parameter beliebig setzen kann, muss die Lösungsmenge ein eindimensionales lineares Gebilde sein. Ein solches Gebilde ist eine Gerade. Ein zweidimensionale Gebilde wäre eine Ebene.

Es muss somit ein Parameter in die Lösungsdarstellung eingeführt werden. Setzt man z = t, so können durch Rückwärtseinsetzen auch x und y in Abhängigkeit vom Parameter t angegeben werden:

(3) $z = t$
(2) $-y - 13t = -30 \quad \Rightarrow \quad -y = 13t - 30 \quad \Rightarrow \quad y = 30 - 13t$
(1) $4x - 3(30 - 13t) + t = 14 \quad \Rightarrow \quad 4x = 104 - 40t \quad \Rightarrow \quad x = 26 - 10t.$

Fasst man die erhaltene Lösung so zusammen, dass alle Teile von x,y,z , die kein t besitzen in einen Vektor schreibt und alle Teile, die ein t besitzen in einen anderen Vektor schreibt, erhält man als Lösung dieses Gleichungssystems eine Gerade in Vektordarstellung:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 - 10t \\ 30 - 13t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

Damit ergibt sich folgende Schlußfolgerung:

1. Alle Ergebnisteile, die keinen Parameter t enthalten, sind Bestandteile des Aufpunktes der Geraden.
2. Alle Ergebnisteile, die einen Parameter t enthalten sind Bestandteile des Richtungsvektors.

Je größer das Gleichungssystem, desto mehr Nullzeilen können auftreten.

Wenn nach dem Gaus'schen Algorithmus komplette Nullzeilen auftreten, dann sind für jede Nullzeile eine Variable beliebig wählbar, das müssen nicht unbedingt die in den letzten Spalten stehenden Variablen sein.

29.8. Der vollständige Gauß' sche Algorithmus

Mit der Umwandlung des Gleichungssystems in eine Dreiecksgestalt muss man nicht notwendig aufhören. Man kann einen Gauß'schen Algorithmus nach der Dreiecksgestalt auch weiter rechen. Dazu beginnt man mit der letzten Zeile und rechnet von da aus nach oben, so dass in der letzten Spalte Nullen entstehen – oberhalb der letzten Zeile. Dazu soll folgendes Beispiel betrachtet werden:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -3 & \\ & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 11 & -7 & -10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ 11 \\ -10 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right)$$

Die unterste Matrix ist jetzt in Stufenform. Jetzt kann man schrittweise nach den Variablen auflösen:

Aus (III) $-51\,x_3 = -153$ folgt: $x_3 = 3$

eingesetzt in (II) ergibt : $10x_2 - 33 = -23$; daraus folgt: $x_2 = 1$

eingesetzt in (I) ergibt : $3x_1 + 4 - 6 = 4$; daraus folgt $x_1 = 2$

Der Algorithmus läßt sich aber auch fortsetzen, um von einer Dreiecksmatrix zu einer Diagonalmatrix zu kommen. Diesen Weg beschreitet der GTR, wenn er das Ergebnis eines Gleichungssystem angibt. Das Ergebnis der Dreiecksmatrix war folgendes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right) \quad \begin{array}{cc} & 51 \\ 51 & \\ -11 & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 153 & 204 & 0 & 510 \\ 0 & 510 & 0 & 510 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right)$$

Um die Zahlen zu verkleinern, werden alle Zeilen dividiert, so dass aber noch ganze Zahlen stehen bleiben.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 51 & 68 & 0 & 170 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} -1 \\ 68 \\ \\ \end{array}$$

Erzeuge von der vorletzten Zeile in den darüber liegenden Zeilen in der vorletzten Spalte Koeffizienten, deren Wert gleich Null ist.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-51} & 0 & 0 & -102 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-17} & -51 \end{array}\right)$$

Damit ist eine Diagonalmatrix entstanden, dh. eine Matrix, die nur noch in der Hauptdiagonale Zahlen besitzt und alle anderen Einträge sind 0. Jetzt ist jede Zeile durch den Wert, der in der Hauptdiagonale steht zu dividieren und man erhält auf der rechten Seite die Werte der einzelnen Variablen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

Schreibt man die Form der Diagonalmatrix wieder in die Form des Gleichungssystem um, erhält man daraus folgende Zeilen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -51\,x_1 & & & & & = & -102 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ & & & & -17x_3 & = & -51 \end{array}$$

Durch Division mit den Koeffizienten entstehen die Lösungen.

Genau diese Rechnung vollzieht der GTR. Man kann diese Rechnung auch von Hand durchführen, sie ist nur manchmal etwas rechenaufwendig. Wenn das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist, reagieren TI und CASIO unterschiedlich. Während der TI die Trapezgestalt anzeigt, bis zu der er rechnen kann, meldet der CASIO, dass das Gleichungssystem unlösbar ist. Dann müsste man den gesamten Gaußschen Algorithmus von Hand nachvollziehen.