27. Integralrechnung

27.1. Einführung

Die Integralrechnung beinhaltet zunächst zwei getrennte Themengebiete. Das erste Gebiet ist die Umkehrung der Differenzialrechnung. Die Aufgabenstellung sieht etwa so aus: Gegeben ist ein Funktion f(x), diese Funktion ist die erste Ableitung einer anderen Funktion, diese Funktion ist gesucht. Dieser Bereich der Integralrechnung ist das "Bestimmen der Stammfunktion" oder "Das unbestimmte Integral".
Der zweite Teil der Integralrechnung beschäftigt sich mit der Berechnung von Flächen unter einer Kurve. Wie die Differenzialrechnung den Tangentenanstieg an einer Kurve bestimmt, bestimmt das Integral den Flächeninhalt unter einer Kurve. Dieses Flächenberechnung hat zunächst nichts mit der Integralrechnung zu tun. Auch hier gibt es eine Analogie zur Differenzialrechnung. Bei der Differenzialrechnung wird auf der Kurve ein Sekantenabschnitt bestimmt und dann wird das x-Intervall für diesen Abschnitt immer kleiner gewählt und im Grenzfall erhält man die erste Ableitung. Für die Berechnung der Fläche unter einer Kurven wird die Fläche zunächst in Rechtecke zerlegt. Von diesen Rechtecken kann man den Flächeninhalt relativ einfach berechnen. Jetzt wählt man die Breite in x-Richtung dieser Rechtecke immer schmaler und nähert sich so der tatsächlichen Fläche an. Bis zu diesem Zeitpunkt hat die Flächenberechnung nichts mit Integralrechnung zu tun.
Die Verbindung zwischen beiden schafft der Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Dieser besagt etwa (siehe später): Wenn man den Flächeninhalt unter einer Kurven bestimmen möchte, dann kann man auch die Stammfunktion der angegebenen Funktion benutzen und den Funktionswert an der oberen Grenze von dem Funktionswert an der unteren Grenze subtrahieren.
Würde es diesen Zusammenhang nicht geben, hätte die Integralrechnung niemals etwas mit Flächenberechnung zu tun und würde sich auf das Bestimmen der Stammfunktion reduzieren. Diesen Teil der Integralrechnung bezeichnet man als "Das bestimmte Integral" oder "Flächenberechnung mittels Integralrechnung".
Dieser Zusammenhang zwischen Flächen von Rechtecken und dem bestimmten Integral wird z.B. von den GTR ausgenutzt. Dort wird keine Stammfunktion gebildet, sondern tatsächlich der Flächeninhalt von Rechtecken benutzt, die immer schmaler werden, bis die Flächendifferenz zu vorherigen Rechnung unter eine bestimmen kleinen Zahl beleibt. Das Berechnen von Stammfunktionen setzt analytisches Denken voraus und ist nur schwer auf Rechnern zu realisieren.

27.2. Die Stammfunktion – Das unbestimmte Integral

Bei der Integralrechnung gibt es den ersten entscheidenden Einschnitt in der Mathematik. Während man bei der Differenzialrechnung noch von jeder Funktion eine erste Ableitung (von Hand) berechnen kann, kann man das bei der Integralrechnung nicht mehr. Dabei ist aber folgende Regel klar und eindeutig zu zu unterscheiden:

> Es gibt zu jeder Funktion eine Stammfunktion,
> **aber**
> man kann diese Funktion nicht immer als einen geschlossenen Funktionsausdruck angeben.

Die Bemerkung, dass eine Funktion keine Stammfunktion hat ist falsch, aber man kann diese nicht immer berechnen. Eine klassische Funktion dafür ist die Funktion

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$

Diese Funktion besitzt eine Stammfunktion, aber es gibt keine Integrationsmethode diese Funktion als geschlossenen Funktionsausdruck anzugeben. Solche Funktionen lassen sich nur als unendliche Potenzreihen von Funktionen integrieren und sind nicht Bestandteil der Schulausbildung.
Was aus diesen Sätzen mitgenommen werden soll ist, es gibt Funktionen, die lassen sich nicht einfach integrieren und diese Funktionen können relativ einfach aussehen. Aus diesem Grund gibt es in der Mathematik ein ganzes Arsenal, möglichst viele Integrale doch als ganzes lösen zu können. Das drückt sich auch dadurch aus, dass es Unmengen von Formelsammlungen gibt, bei denen die Lösungen **ganz spezieller Integrale** aufgelistet sind. Von dieser Menge sind für die Schulausbildung nur einige Grundintegrale notwendig.

27.2.1. Grundintegrale

Grundintegrale sind das Gegenstück zu den Grundfunktionen der Ableitungsregeln. Das, was bei den Ableitungsfunktionen als 1. Ableitung erscheint, erscheint hier als Funktion zum Integrieren.

$$\int x^n \, dx = \frac{n}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x)$$

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x)$$

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x|$$

Mit diesem vergleichsweise bescheidenen Formelapparat kommt man aus. Dabei ist insbesondere auf die letzte Formel hinzuweisen: Alle Potenzen von x, die integriert werden, führen wieder zu Potenzen von x (1.Formel). Eine Ausnahme bildet dabei die Potenz – 1 , die führt beim Integrieren zum natürlichen Logarithmus, wobei ausdrücklich auf die Betragsstriche verwiesen werden muss.
Alles andere läßt sich mit schulischen Mitteln nicht integrieren.

27.2.2. Integrationsregeln

Zu jeder Differenziationsregel gibt es eine entsprechende Integrationsregel. Hier ist nur die Regel für die Addition von Funktionen interessant:

> Besteht die Funktion hinter dem Integralzeichen aus einer Summe von Funktionen, kann jeder Summand einzeln integriert werden.

eine Funktion der Art

$$\int \left(x^3+\cos(x)\right)dx=\frac{1}{4}x^4+\sin(x)$$

kann integriert werden, indem man als erstes die Stammfunktion des ersten Summanden bildet und dann die Stammfunktion des zweiten Summanden.

Diese Regel besagt aber auch: Hände weg, von Produkten und Quotienten. Eine Funktion der Art $\int x\cdot\cos(x)\,dx=?$ läßt sich so einfach nicht integrieren. Eine solche Funktion läßt sich mit den hier bekannten Mitteln nicht integrieren und kann nur als bestimmtes Integral über den GTR berechnet werden. Ähnlich sieht es mit einer Funktion der folgenden Art aus: $\int (x+1)\cdot\left(2x^2+3x\right)dx=?$
Diese Funktion läßt sich integrieren, aber zuerst muss das Produkt der Klammern aufgelöst werden, damit eine Summe von Potenzen entsteht;

$$\int (x+1)\cdot\left(2x^2+3x\right)dx=\int \left(2x^3+5x^2+3x\right)dx$$

Diese Funktion besteht jetzt aus einer Summe einzelner Potenzen. Diese Summe läßt sich gliedweise integrieren.

27.2.3. Substitutionsregel

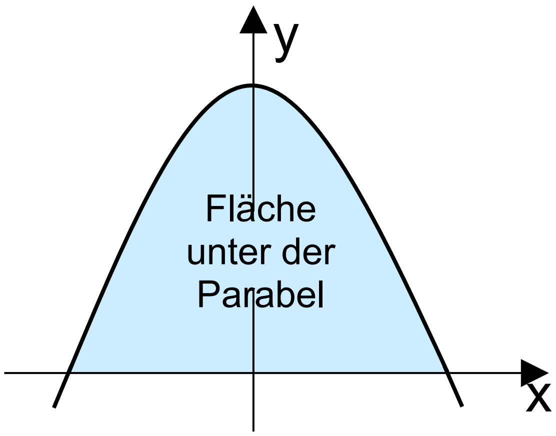
Die Substitutionsregel ist das Gegenstück zur Ketteregel der Differenzialrechnung. Generell sind Substitutionen ein schwerwiegendes Werkzeug zur Berechnung von Integralen. Der größte Teil der berechenbaren Integrale lassen sich über Substitutionen lösen. Für den schulischen Bereich ist nur die einfachste Form davon von Interesse, wenn sich bei einer verketteten Funktion die innere Funktion als lineare Funktion darstellt. Aber selbst diese einfache Regle wird nicht sauber erklärt, sondern nur eine Ergebnisformel angegeben.

27.3. Die Flächenberechnung

In diesem Abschnitt soll es zunächst um die Probleme bei der Berechnung eines Flächeninhalts unter einer krummlinig begrenzten Kurve gehen.

27.3.1. Historischer Einstieg

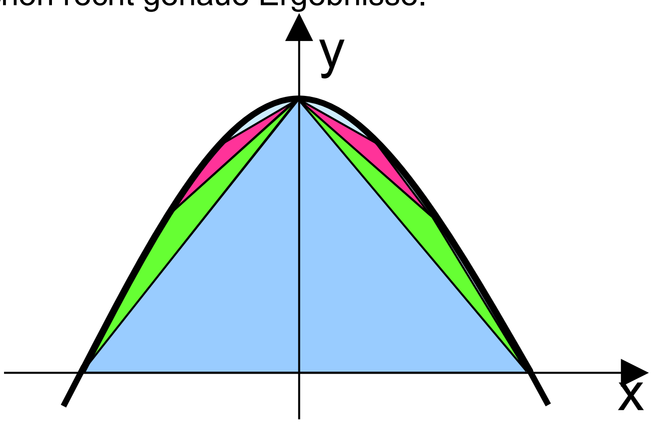
Das Problem solcher Flächenberechnung ist schon sehr alt und wurde bereits von ARCHIMEDES (287 - 212 v.u.Z.) untersucht. ARCHIMEDES hat z.B. berechnet, wie groß der Flächeninhalt unter einer Parabel ist. Das ist umso erstaunlicher, als es zu seiner Zeit überhaupt keine praktische Verwendung für diese Rechnungen gab.



Eine grundlegende Idee für diese Flächenberechnung ist folgende: Man versucht, eine „Kurvenfläche“ mit solchen Flächen auszufüllen, die man leicht berechnen kann. Das sind vor allem Rechteck- und Dreieckflächen. Dann summiert man diese Teilflächen und erhält die Gesamtfläche.

ARCHIMEDES hat die Parabelfläche ausgefüllt mit gleichschenkligen Dreiecken. Die noch freigebliebene Fläche wird immer kleiner und wird mit einem immer kleineren Dreieck ausgefüllt.

Theoretisch kann man mit allerkleinsten Dreiecken die Parabelfläche ganz ausfüllen. Allerdings nur, wenn man das unendlich fortsetzt, denn es zeigt sich, dass immer noch Platz frei bleibt, so klein das Dreieck auch wird. Man bekommt mit dieser Methode doch schon recht genaue Ergebnisse.



Weil die Fläche sozusagen ausgeschöpft wird, nennt man diese Methode auch „Ausschöpfungs-Methode“ (mit Fremdwort: Exhaustions-Methode).

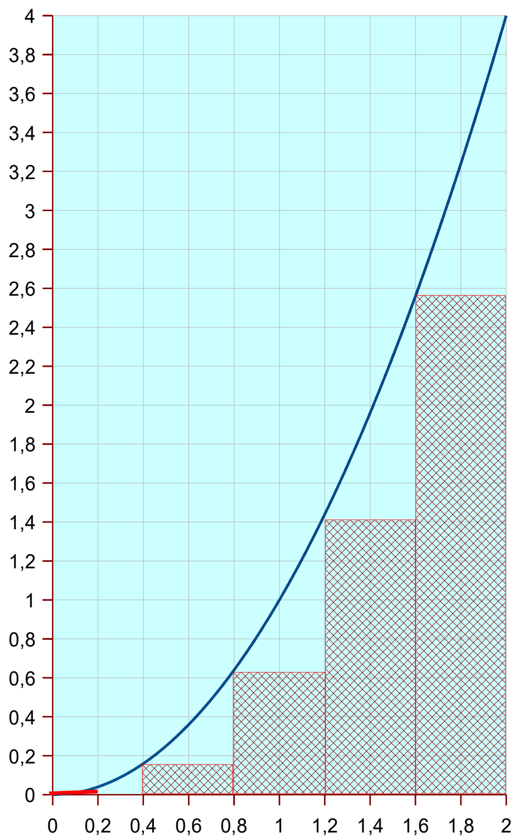
Man sieht, dass statt der Dreiecke auch Rechtecke oder Trapeze oder Kombinationen solcher Figuren genommen werden können. Die Flächen lassen sich leicht berechnen und müssen nur summiert werden. Das Ergebnis ist aber immer nur hinreichend genau.
Die Ausschöpfungs-Methode ist aber keine eigentliche Integralrechnung, denn die Integralrechnung beruht auf einer völlig anderen Methode.

27.3.2. Flächenberechnung über Ober – und Untersummen.

Eingangs des Kapitels zur Integralrechnung wurde bereits darauf hingewiesen, dass die zu berechnenden Flächen in rechteckige Streifen zerlegt werden, von denen die Flächeninhalte bestimmt werden. Indem man die Streifen immer schmaler macht, kommt man dem tatsächlichen Flächeninhalt immer näher. Jetzt soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie das gemeint ist. Dazu soll die einfache Funktion $y = x^2$ betrachtet werden und der Flächeninhalt unter der Funktion von x=0 bis x=2 berechnet werden.

27.3.2.1. Untersummen

Unterteilung des Intervalls von x = 0 bis x = 2 in 5 gleiche Teile



Teilt man das Intervall in 5 gleichlange Teile (x-Achse), dann ist jeder teil 0,2 Einheiten lang. Damit hat man die Breite der Rechtecke bestimmt. Als Höhe der Rechtecke werden die in diesem Bereich niedrigsten Funktionswerte benutzt. Für diese quadratische Funktion ist das nicht schwer, es sind jeweils die Funktionswerte am linken Rand des Rechtecks. Der Bereich, der durch diese Rechtecke abgedeckt wird ist der kleinst mögliche, wenn man als Höhe die Funktionswerte der Funktion ansieht. Deshalb wird die Summe dieser Rechtecke als **Untersumme** bezeichnet, die kleinstmögliche Fläche unter der Funktion. Der tatsächliche Flächeninhalt ist auf alle Fälle größer als die Summe der Flächen der Rechtecke.
Berechnung:
Es sind 5 Rechtecke zu summieren, deren Breite jeweils 2/5 ist und deren Höhe gleich dem Quadrat des x-Wertes ihrer linken Seite ist:

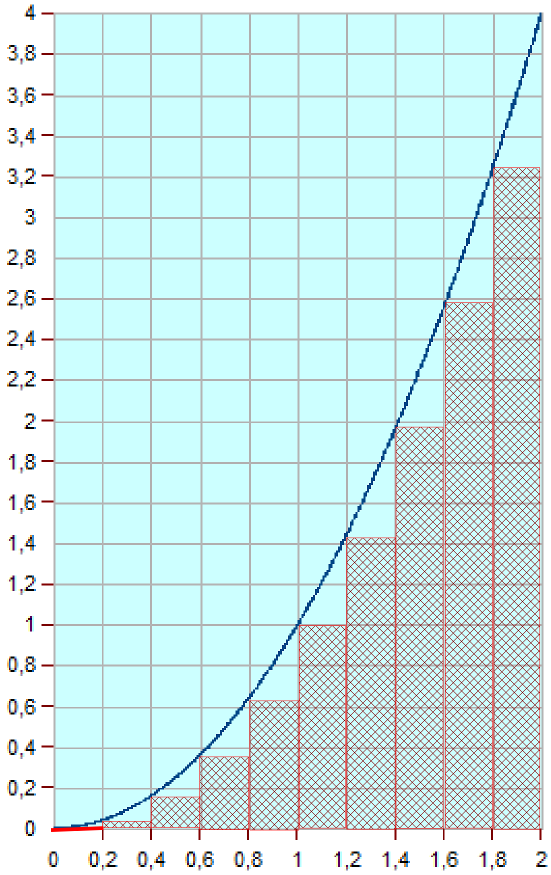
$$\frac{2}{5} \cdot 0^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{8}{5}\right)^2$$

Der erste Summand liefert 0 und aus allen anderen Summanden läßt sich einmal die breite des Streifens ausklammern (2/5) und einmal eine Zweierpotenz von 2 im Zähler und von 5 im Nenner:

$$\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2 (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

(Wegen der 0 im ersten Summanden kann man das auf den ersten Summanden mit ausdehnen.) Damit erhält man ein grobes Maß für den Flächeninhalt.
Jetzt kommt es darauf an, diese Unterteilung immer feiner zu machen, damit die Rechtecke immer schmaler werden.

Unterteilung des Intervalls von x = 0 bis x = 2 in 10 gleiche Teile



Wenn man das Intervall von 0 bis 2 in 10 gleiche Teile teilt, ist jeder Teil 2/10 breit, weil 10 * 2/10 = 2 ist. Damit ist die Bereite des Streifens definiert. (es wird bewußt die Breite nicht mit 1/5 angegeben: es sind 10 Teile mit Gesamtlänge 2)
Die Höhe des Streifens entspricht (bei Untersummen) dem Funktionswert an der linken Seite. Die entstehenden 10 Streifen ergeben dann folgende Summe:

$$\frac{2}{10} \cdot 0^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{6}{10}\right)^2 +$$

$$\frac{2}{10}\left(\frac{8}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{10}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{12}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{14}{10}\right)^2 +$$

$$\frac{2}{10}\left(\frac{16}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{18}{10}\right)^2$$

Aus dieser Summe lassen sich wieder die Breite des Streifens und 2^2 im Zähler, sowie 10^2 im Nenner ausklammern.

$$\frac{2}{10}\left(\frac{2}{10}\right)^2 (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2)$$

Wie man aus den beiden Fällen sehen kann läuft die Lösung der Aufgabe immer auf die Quadratsumme der natürlichen Zahlen hinaus. Die Quadratsumme entsteht deshalb, weil die Funktion $y=x^2$ betrachtet wird. In entsprechenden Formelsammlungen findet man für die Quadratsumme eine geeignete Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Die Summenformel läuft für den Zählindex von 1 bis 10, in der oben entstandenen Summe läuft aber die Addition von 0 bis 9, es sind auch 10 Zahlen zu addieren, aber von 0 bis 9. Damit ist die rechte Seite der Summenformel abzuändern, aus jedem n wird ein n–1, da nur bis 9 zu addieren ist. Damit ist für das obige Beispiel folgende Summenformel anzuwenden:

$$\frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6}$$

Mit Hilfe des GTR läßt sich die Summe der ersten neun Quadratzahlen auch direkt ausrechnen. Man erhält für diese Summe 285.
Setzt man n=10 in die geänderte Summenformel ein, erhält man das gleiche Ergebnis. Da soll nur beweisen, dass die Änderung der Formel korrekt das Additionsergebnis liefert, da die Formeln weiter benutzt werden muss.

Unterteilung des Intervalls von x = 0 bis x = 2 in n gleiche Teile

Wenn man das Intervall von 0 bis 2 in n gleiche Teile teilt, ist jeder Teil 2/n breit, weil n * 2/n = 2 ist. Damit ist die Bereite des Streifens definiert.
Die Höhe des Streifens entspricht (bei Untersummen) dem Funktionswert an der linken Seite. Die entstehenden n Streifen ergeben dann folgende Summe:

$$\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 \quad (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2)$$

unter Benutzung der oben geänderten Summenformel erhält man für die Summe in der Klammer:

$$\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 \quad \frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6} = \frac{8}{n^3} \quad \frac{(n^2-n)\,(2n-2+1)}{6} = \frac{8}{n^3} \quad \frac{2n^3-3n^2+n}{6}$$

$$= \frac{8}{6} \cdot (2 - 3 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$$

Um die Fläche immer genauer zu berechnen, muss die Anzahl n immer weiter gesteigert werden. Mathematisch gesehen betrachtet man von diesem Ausdruck den Grenzwert für $n \to \infty$. Der zweite und dritte Summand geht für $n \to \infty$ gegen 0, so dass sich als Flächeninhalt A = 8/3 ergibt.

Abschließend sollen die Koeffizienten der Formeln nach ihrer Herkunft untersucht werden.

$$\frac{8}{6} \cdot (2 - 3 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$$

Die Zahl 6 unter dem Bruchstrich und die Zahlen 2 und – 3 stammen aus der Summenformel und werden von der Größe des zu berechnenden Intervalls nicht beeinflußt. Damit entsteht bei dieser Funktion, gleichgültig, welches Intervall betrachtet wird, im Nenner immer eine 3 (Zähler = 2 Nenner = 6) Lediglich die Zahl 8 entsteht aus der oberen Intervallgrenze, wenn man die untere Intervallgrenze mit 0 ansetzt. Die Zahl 8 entsteht aus

oberer_Intervallgrenze * (oberer_Intervallgrenze) ^{2}

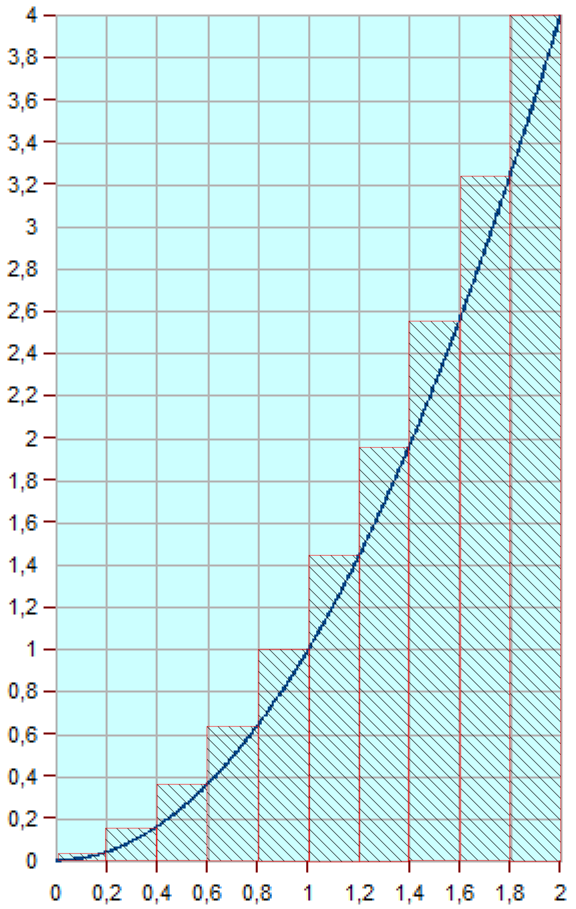
also ist das Ergebnis für eine untere Intevallgrenze = 0:

A = (oberer_Intervallgrenze)^3 / 3

(Die Stammfunktion von $y = x^2$ ist bekanntermaßen $y = ⅓\, x^3$)

27.3.2.2. Obersummen

Es soll jetzt die gleiche Funktion, aber die Obersummen dazu betrachtet werden. Die Berechnung der Fläche der Streifen ist identisch zu den Untersummen, mit dem einen Unterschied, dass die Höhe des Rechtecks von der rechten Seite bestimmt wird. Es wird gleich mit einer Teilung von 10 gerechnet und dann auf allgemeines n geschlossen.



$$\frac{2}{10}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{8}{10}\right)^2 +$$

$$\frac{2}{10}\left(\frac{10}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{12}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{14}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{16}{10}\right)^2 +$$

$$\frac{2}{10}\left(\frac{18}{10}\right)^2 + \frac{2}{10}\left(\frac{20}{10}\right)^2$$

Aus dieser Summe lassen sich wieder die Breite des Streifens und 2^2 im Zähler, sowie 10^2 im Nenner ausklammern, doch die entstehende Reihe ist eine andere:

$$\frac{2}{10}\left(\frac{2}{10}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2)$$

Im Gegensatz zur Berechnung der Untersummen werden hier bei n=10 auch wirklich die Quadrate der ersten 10 natürlichen Zahlen addiert, so dass die Summenformel ohne Veränderung übernommen werden kann.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Damit ergibt sich für beliebiges n: $\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$

woraus unter Einsatz der Summenformel folgender Ausdruck entsteht:

Man erkennt an dieser Formel sehr gut, dass die Werte immer Größer, als die Fläche sind, da vor dem zweiten Ausdruck 3 * 1/n in diesem Fall ein + Zeichen steht, während bei den Untersummen ein Minuszeichen steht.
Jetzt gibt es zu den Unter- und Obersummen eine wichtige Aussage zum Flächeninhalt:

Wenn der Grenzwert der Obersummen und der Untersummen existiert, dann ist dieser Grenzwert gleich und gleich dem Flächeninhalt unter der Kurve.

Bei dieser Aussage ist auf das erste „Wenn“ zu achten. Es existieren auch endlich große Flächeninhalte, wenn die ober Grenze des Intervalls nach +∞ läuft, aber diese endlichen Flächeninhalte existieren nicht immer. In einigen dieser Fälle gibt es keinen endlichen Grenzwert der Ober- und Untersummen, so dass auch kein endlicher Flächeninhalt existieren kann.
Deshalb ist in der Satz formuliert, **wenn der Grenzwert existiert**, der Satz besagt nicht, dass der Grenzwert existiert ! Für Funktionen, die im betrachteten Intervall keine Polstelle haben oder deren Intervallgrenzen nicht ∞ existiert der Grenzwert immer. Nur für Funktionen mit Polstellen und unendlichen Intervallgrenzen kann es keinen Grenzwert geben.

27.4. Fundamentalsatz der Differenzial – Integralrechnung

Dieser Lehrsatz, der auch offiziell diese Bezeichnung trägt, schafft die Verbindung zwischen den Stammfunktionen und der Flächenberechnung. Erst durch die Gültigkeit dieses Satzes wird die Integralrechung (=Stammfunktionen) für die Berechnung von Flächen und Volumen interessant. Im Abschnitt über die Berechnung der Untersummen wurde am Schluß des Abschnittes untersucht, wie die einzelnen Zahlen entstanden sind und die Schlußfolgerung gezogen, dass der Größe der Fläche von der oberen Grenze der Flächenberechnung abhängt (wenn die untere Grenze als Funktionswert 0 hat).

Zunächst müssen einige Begriffe eingeführt werden. Das ist zunächst etwas formal, hilft aber später Ordnung zu halten.

Definition: Eine Funktion F(x) heißt **Stammfunktion** einer Funktion f(x), wenn gilt: $F'(x) = f(x)$.

wenn also f(x) die erste Ableitung von F(x) ist.

Satz:
Sei $F_1(x)$ eine Stammfunktion von f(x), dann ist eine Funktion $F_2(x)$ ebenfalls Stammfunktion von f(x), wenn gilt:
$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

Dieser Satz sagt nichts weiter aus, als das: Wenn man eine Stammfunktion hat, gibt es auch noch weitere, die sich aber zur durch die Addition einer konstanten Zahl unterscheiden, da eine addierte konstante Zahl beim Differenzieren wegfällt, kann man „rückwärts“ nicht mehr schließen, was für eine konstante Zahl da ursprünglich gestanden ist. Nach diesem Satz gibt es genau eine Stammfunktion $F_2(x)$, die an einer Stelle x_0 den Wert 0 annimmt: $F_2(x_0) = 0$, nämlich die Funktion $F_2(x)$ mit $C = -F_1(x_0)$.

Um Irrtümern durch Gleichheit in den Variablenbezeichnungen zu vermeiden, wird vorübergehend die zu integrierende Funktion f(x) mit der Variablen t benutzt und als f(t) geschrieben.

Diese Funktion wird bezeichnet mit $F = {}_{x0}\int f(t)\,dt$ und ihr Funktionswert wird bezeichnet mit $F(x) = {}_{x0}\int^{x} f(t)\,dt$

Definition: Unter der **Integralfunktion** F(x) einer Funktion f(x) versteht man den Wert des Integrals von f(t) an seiner oberen Grenze x:

$$F(x) = {}_{x0}\int^{x} f(t)\,dt$$

Diese Formel soll noch etwas erklärt werden. Man bildet die Stammfunktion von f(t), dabei erhält man F(t) und wenn an dem Integralzeichen am unteren Ende x_0 steht und am oberen Ende eine Variable x steht, dann soll man in die Stammfunktion F(t) dieses x

am oberen Ende des Integralzeichens einsetzen und das x_0 an der unteren Grenze des Integrals. Natürlich entsteht damit nichts anderes als die Funktion F(x). Deshalb nennt man diese Konstruktion auch etwas hochtrabend: Das Integral als Funktion seiner oberen Grenze. Eine der wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion F(x) ist, dass sie an der Stelle gleich Null ist : $F(x_0) = 0$. Das ist damit von der Stelle x_0 abhängig und man erhält für jedes x_0 eine andere Stelle, an der die Integralfunktion Null ist, und trotzdem sind alle F(x) Stammfunktionen und Lösungen des Integrals.
Blickt man jetzt noch einmal zurück auf die Berechnung der Untersummen und der Entstehung der einzelnen Zahlen kann man die Fläche schreiben als:

$$\text{Fläche} = F(2) = \int_0^2 x^2\,dx$$

In Worten: berechne die Stammfunktion und setze im Integral als oberes Ende des Integralzeichens den rechten, oberen Wert der zu berechnenden Fläche ein **und dieser Wert ist gleich dem Flächeninhalt**.
Genau das wird durch den Fundamentalsatz ausgedrückt.

Fundamentalsatz der Differenzial-Integralrechnung:

Ist f(t) eine stetige Funktion, so ist die Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar mit der Ableitung F'(x) = f(x) und der Grenzwert der Ober- und Untersummen ist gleich und zwar mit dem Funktionswert der Integralfunktion an seiner oberen Grenze.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Dieser Satz liefert den Zusammenhang zwischen der Flächenberechnung als Grenzwert unendlich schmaler Rechtecke und der Stammfunktion der Funktion, unter der der Flächeninhalt berechnet werden soll. Erst mit diesem Satz ist die Flächenberechnung über das Integral erlaubt.

1. Zunächst sollen hier ein paar Schlußfolgerungen aus diesem Satz gezogen werden. Der Funktionswert der Integralfunktion an der Stelle x = a ist immer 0, geometrisch, da von 0 bis 0 keine Fläche entsteht und deshalb

   $$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) = 0$$

   Der Wert x = a ist aber auch die untere Grenze des Integrals. Also kann man schlußfolgern: Der Wert der Integralfunktion an seiner unteren Grenze ist 0.

2. Ist der Flächeninhalt nicht vom Punkt 0 aus, sondern von einem beliebigen anderen Punkt a aus zu berechnen, geht man so vor, dass man die Fläche bis zum oberen x-Wert der Berechnung bestimmt und dann die zuviel berechnete Fläche bis zum unteren x-Wert (Anfangswert) wieder subtrahiert.

   $$\int_0^b f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

   Das gleiche Ergebnis kann man erzielen, wenn man als untere Grenze nicht den Wert 0 sondern den Wert benutzt, von dem an die Fläche berechnet werden soll. das führt bei der vorhergehenden Formel zu der verkürzten Form:

   $$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Ganz nebenbei entsteht dabei der Effekt, dass auch für sich änderndes b der Flächeninhalt an der unteren Grenze immer 0 bleibt.

3. Aus dem Bilden der Stammfunktion ist bekannt, dass zu jeder Stammfunktion noch eine unbekannte Konstante C zu Addieren ist.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Aus dieser unbekannten Konstanten C wird jetzt eine „bekannte“ Konstante, nämlich F(a), so das man folgende Beziehung aufschreiben kann:

$$_a\int^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

wobei jeweils für x = a die Konstante C = F(a) zu setzen ist. Damit erhält man eine sich ändernde Konstante in Abhängigkeit von der unteren Grenze. Auf diesen Zusammenhang ist bereits zu Beginn dieses Abschnitts bei der Erklärung der Integralfunktion hingewiesen worden.

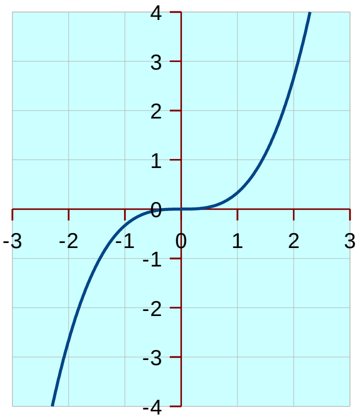
Geometrische Interpretation der Schlußfolgerung 3:
Es soll wieder die einfache Funktion $y = x^2$ betrachtet werden und die Berechnung des Flächeninhalts unter dieser Funktion, bzw. die Integralfunktion bei unterschiedlicher unterer Grenze. Bei der Berechnung der Fläche über die Rechtecke wurde die Fläche von 0 bis 2 betrachtet. Diese Berechnung läßt sich jetzt in eine Integralform schreiben, die folgendermaßen aussieht:

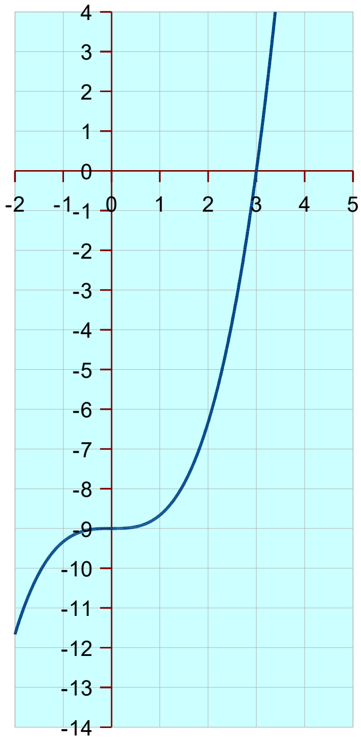
$$\text{Fläche} = {}_0\int^2 x^2\,dx = \frac{2^3}{3} = F(2)$$

Betrachtet man diese Funktion als Integralfunktion ihrer oberen Grenze entsteht:

$$_0\int^x t^2\,dt = F(x) - F(0) = \frac{x^3}{3} - 0 = \frac{x^3}{3}$$

Der Funktionswert an der unteren Grenze x = 0 ist 0, so dass die Konstante C aus der allgemeinen Berechnung der Stammfunktion jetzt einen definierten Wert hat, den der Stammfunktion an der unteren Grenze. Das dazu gehörende Funktionsbild der Stammfunktion hat den rechts dargestellten Verlauf. Man kann aus dieser Kurve auch ablesen, dass der Flächeninhalt unter der Funktion $y = x^2$ von 0 bis 2 gleich 8/3 = 2,66 beträgt. Das ist der Funktionswert der Funktion (= Stammfunktion von $y = x^2$) an der Stelle x = 2.

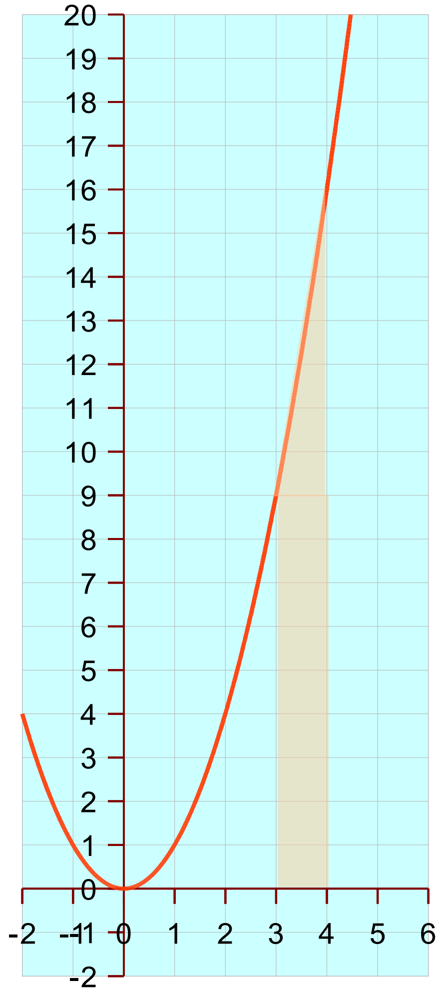




Als nächstes soll die Fläche unter der Funktion nicht ab dem Punkt 0, sondern ab dem Punkt 3 betrachtet werden. Wie oben bereits ausgeführt heißt dass, die untere Grenze wird zu dem Wert x= 3 und das Integral hat folgendes Aussehen.

$$\int_3^x t^2 dt = F(x) - F(3) = \frac{x^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{x^3}{3} - 9$$

Die Stammfunktion ist natürlich wieder die gleiche, wie vorher, aber die Konstante C aus dem Berechnen der Stammfunktion hat jetzt den Wert – 9 . Auf der rechten Seite ist wieder das Kurvenbild dargestellt. Was kann man aus diesem Kurvenbild ablesen:
Der Kurvenverlauf ist der gleiche wie in der oberen Funktion. Die Funktion ist in Richtung y-Achse verschoben (Die Verschiebung in Richtung y-Achse macht genau die additive Konstante, die beim Differenzieren weggefallen ist.)
Was aber das entscheidende daran ist: Die Verschiebung der Kurve erfolgt genau so, dass die Kurve an der unteren Grenze des Integrals 0 ist, die Kurve schneidet die x-Achse, in diesem Fall an der Stelle x = 3.



Als nächstes soll das Verhalten, das Entwickeln, der Fläche ab dem Punkt x = 3 betrachtet werden. In der rechten Funktion ist deshalb die Fläche von x = 3 bis x = 4 orange eingefärbt. Daraus ist zu erkennen, dass natürlich die Fläche von x = 3 bis x=3 gleich 0 ist, da keine Breite vorhanden ist, aber selbst ein sehr kleiner Schritt von x = 3 in positive x Richtung führt schlagartig zu einer größeren Fläche. Betrachtet man dazu das obere Kurvenbild der Stammfunktion sieht man, dass dieses an x = 3 einen sehr steilen Kurvenanstieg hat.

Der Flächeninhalt im rechten Bild lässt sich fast auszählen: Bis y = 9 sind 9 volle Quadrate von der Größe 1 FE, danach kommen noch 6 Quadrate, an denen mehr oder weniger ein Stück fehlt. Geht man einmal grob davon aus, dass bei dem Quadrat zwischen y=9 und y= 10 etwa die Fläche fehlt, die beim Quadrat zwischen y= 15 und y = 16 noch vorhanden ist und beim Quadrat zwischen y = 10 und y = 11 das fehlt, was beim Quadrat zwischen y = 14 und y = 15 vorhanden ist, werden aus den 6 Quadraten 3 Quadrate mit vollem Flächeninhalt. Diese zu den 9 Quadraten addiert ergeben 12 Quadrate. Betrachtet man jetzt die zugehörige Stammfunktion

$$y = \frac{x^3}{3} - 9$$

Mit der oberen Grenze 4 und der unteren Grenze 3 erhält man:

$$y(4)=\frac{4^3}{3}-9=\frac{37}{3}=12{,}33$$

und der Wert an der unteren Grenze ist 0, wie man bereits dem Funktionsbild entnehmen kann. Also ist der Flächeninhalt unter der Kurve $y = x^2$ zwischen $x = 3$ und $x = 4$ gleich 12,33 FE, was der ausgezählten Fläche doch sehr nahe kommt. Der Grund liegt natürlich darin, dass die Funktion $y=x^2$ in diesem Bereich einer Geraden schon sehr ähnlich sieht.

27.5. Der orientierte Flächeninhalt

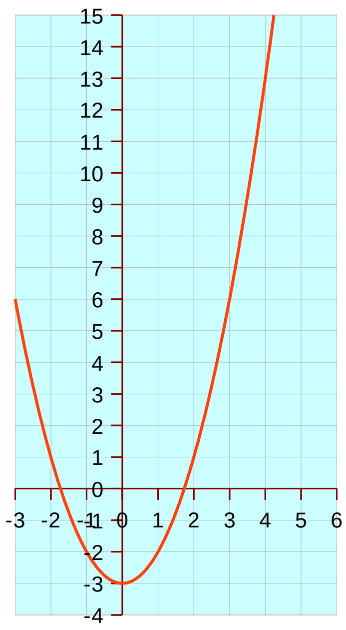
Bei der Berechnung der Flächeninhalte über Rechtecke war eine Seite der Rechtecke der y-Wert der Funktion. Dieser y-Wert der Funktion kann positiv oder auch negativ sein. Aus diesem Grund, werden beim Integrieren Flächeninhalte mit positivem und mit negativem Flächeninhalt entstehen. Für die Berechnung des **Werts des Integrals** muss das auch so bleiben, nur, wenn definitiv nur der **Flächeninhalt unter der Funktion** berechnet werden soll, sind einige Dinge zu beachten. Die werden im Kapitel Flächeninhalte genauer erklärt.

Für die folgenden Betrachtungen sollen folgende Begriffe vereinbart werden:

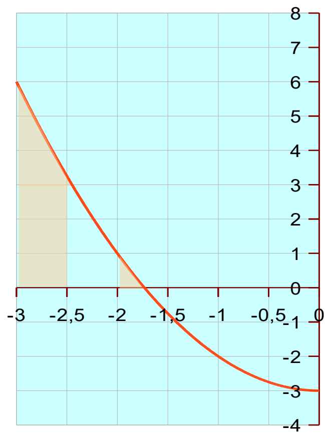
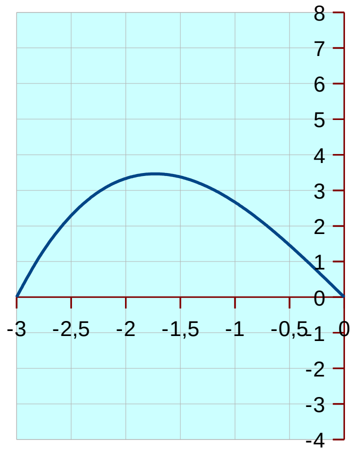
- Die **Ausgangsfunktion** ist die Funktion, die hinter dem Integralzeichen steht, von der die Stammfunktion berechnet werden soll.
- Die **Stammfunktion** oder **Integralfunktion** ist das Ergebnis des Integrierens als Funktion ausgedrückt und nicht als Maßzahl einer Fläche.

Damit ist die Ausgangsfunktion die erste Ableitung der Stammfunktion.

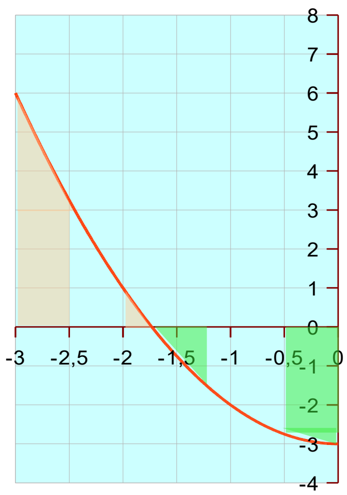
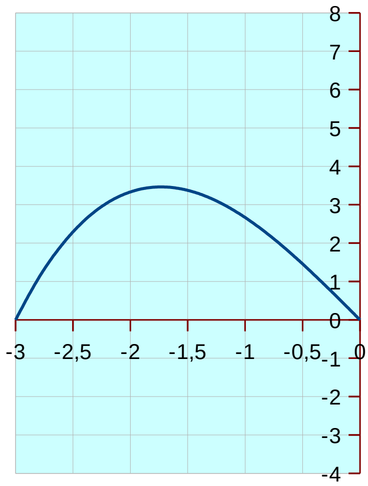
Der orientierte Flächeninhalt soll ebenfalls an einer einfachen Funktion erläutert werden. Es wird die Funktion $y = x^2 - 3$ benutzt und das Integral (=Stammfunktion) von $F(x)={}_{-3}\int^{x} f(t)\,dt$ betrachtet. Auf der rechten Seite ist zunächst wieder das Funktionsbild von $y = x^2 - 3$ abgebildet.



An der Stelle $x = -3$ wird die zugehörige Stammfunktion gleich 0 sein. Für steigendes x werden die Funktionswerte steigen, da die Funktion f(x) als erste Ableitung der Stammfunktion positiv ist. Aber die Steigungen werden kleiner, weil die Funktionswerte kleiner werden. (*Zusammenhang zwischen Funktion und 1. Ableitung*) Für den Bereich der Integralfunktion heißt dass, es werden positive Flächenteile addiert, mit wachsendem x werden aber die Flächenteile, die addiert werden, kleiner.

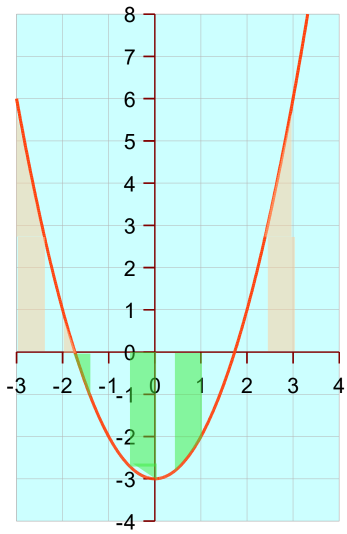
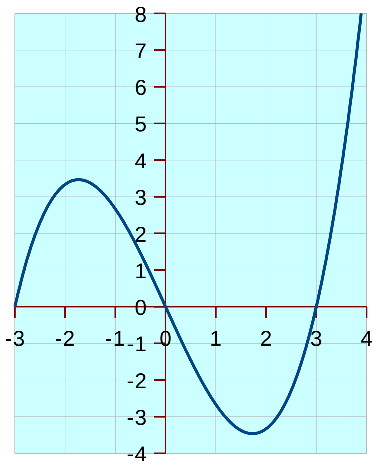
$y = x^2 - 3$	Integralfunktion
	

Am Bild sieht man deutlich, dass die Zunahme der Flächen kleiner wird. Bei der Integralfunktion steigen die Funktionswerte an, mit wachsendem x wird aber die Zunahme geringer. Der Zuwachs erfolgt etwa bis zum Punkt x = – 1,75, genau ist es $-\sqrt{3} = -1{,}7320$, der Nullstelle der Funktion $y = x^2 - 3$. Da das die erste Ableitung der Stammfunktion ist, muss die Stammfunktion dort einen Extrempunkt besitzen !
Ab diesem Zeitpunkt verläuft die Kurve von f(x) unterhalb der x-Achse, was auf die Fläche und das Funktionsbild der Integralfunktion Auswirkungen hat.

$y = x^2 - 3$	Integralfunktion
	

Die grün gezeichneten Flächen liegen unterhalb der x-Achse und besitzen deshalb negative y-Werte. Der Flächeninhalt wird deshalb eine negative Zahl werden. Also verringern diese Flächen den Wert der Integralfunktion, je weiter der Wert für x wächst. Auf der Seite der Integralfunktion erscheinen diese negative Flächeninhalt als kleiner werdende Funktionswerte.
An der Stelle x=0 ist bei der Integralfunktion eine Nullstelle erreicht. Geometrisch bedeutet das, dass der gesamte positive Flächeninhalt „aufgebraucht“ ist und der Gesamtflächeninhalt von x = – 3 bis x = 0 den Wert 0 hat.

$$\int_{-3}^{0} (x^2-3)\,dx = F(0) - F(-3) = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{-3}^{0} = 0 - (-9+9) = 0$$

$y = x^2 - 3$	Integralfunktion
	

Betrachtet man die Funktion weiter, sammeln sich für wachsende x weitere negative Flächenstücke an, was dazu führt, dass die Integralfunktion weiter fällt. Die Integralfunktion fällt bis $x = \sqrt{3}$, danach sammeln sich wieder positive Flächenteile an. Was ist an dieser Stelle: die erste Ableitung f(x) hat eine Nullstelle, damit muss die Stammfunktion an dieser Stelle einen Extremwert besitzen. Da der Wechsel der Ausgangsfunktion als 1. Ableitung der Stammfunktion wechselt von negativen Werten nach positiven Werten, also muss in der Stammfunktion ein Minimum vorliegen, was bei der Integralfunktion deutlich zu sehen ist. Mit dem Anwachsen positiver Flächenteile wächst auch die Integralfunktion wieder, bist mehr positive Flächenteile angesammelt sind, als nach x= 0 negative Flächenteile angesammelt wurden. Auf Grund der Achsensymmetrie der Funktion muss dass bei x = 3 passieren, deshalb hat die Integralfunktion dort einen Nullpunkt, der aber aus dem Kurvenbild der Funktion f(x) nicht abzuleiten ist.

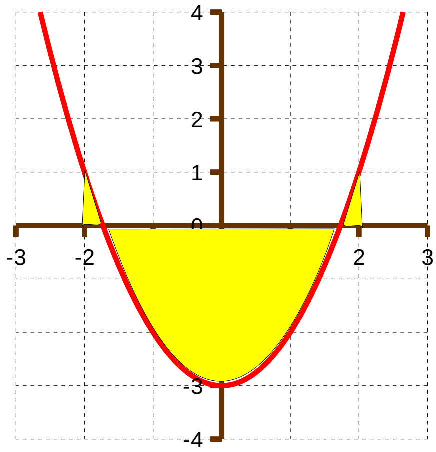
Zusammenfassung

- Die Integralfunktion – das Integral als Funktion seiner oberen Grenze – ist die Stammfunktion immer bezogen auf den Wert der unteren Grenze, an dem die Integralfunktion immer gleich 0 ist.
- Die untere Grenze hat damit die Bedeutung der additiven Konstanten aus der Berechnung von Stammfunktionen F(x) +C und legt eindeutig eine Konstante C fest, die so festgelegt wird, dass die Integralfunktion an der unteren Grenze 0 ist: C = F(unterer Grenze)
- Damit wird aus den beliebig vielen Stammfunktionen, die sich nur durch einen konstanten Wert C unterscheiden, ein ganz bestimmtes C ausgewählt und damit aus der Kurvenschar F(x) + C eine Kurve ausgewählt.
- Den gleiche Effekt kann man erzielen, wenn die Frage gestellt ist, es gibt einen Punkt P mit den Koordinaten x_P und y_P, gesucht ist diejenige Stammfunktion, die durch diesen Punkt verläuft. Daraus resultiert die Gleichung $y_P = F(x_P) + C$, was letzten Endes auf eine Bestimmungsgleichung für C hinausläuft, da alle anderen Werte bekannt sind. (Punktprobe, ob – oder wann – ein Punkt auf einer Funktionskurve liegt.)

27.6. Flächenberechnung mit dem Integral

Diese Eigenschaften der Integralfunktion nutzt man auch bei der Berechnung krummlinig begrenzter Flächen aus. Wobei man davon ausgehen muss, dass hier negative Flächeninhalte keinen Sinn machen, da der gesamte Flächeninhalt gesucht ist, gleichgültig, ob oberhalb oder unterhalb der x-Achse. Damit folgt unmittelbar aus der Integralfunktion, dass die Berechnung von Flächen an den Nullstellen der Funktion unterbrochen werden muss. Es müssen die Flächenteile oberhalb der x – Achse und unterhalb der x-Achse getrennt berechnet werden. Außerdem ergeben Flächen unterhalb der x– Achse immer einen negativen Wert, so dass in diesem Fall mit dem Betrag der berechneten Zahl weiterzuarbeiten ist. Deshalb wird häufig bei der Berechnung von Flächeninhalten das Integral grundsätzlich in Betragsstriche gesetzt.

27.6.1. Flächeninhalt zwischen Funktion und x-Achse



Es soll der gelb eingezeichnete Flächeninhalt bestimmt werden, also folgendes Integral berechnet werden:

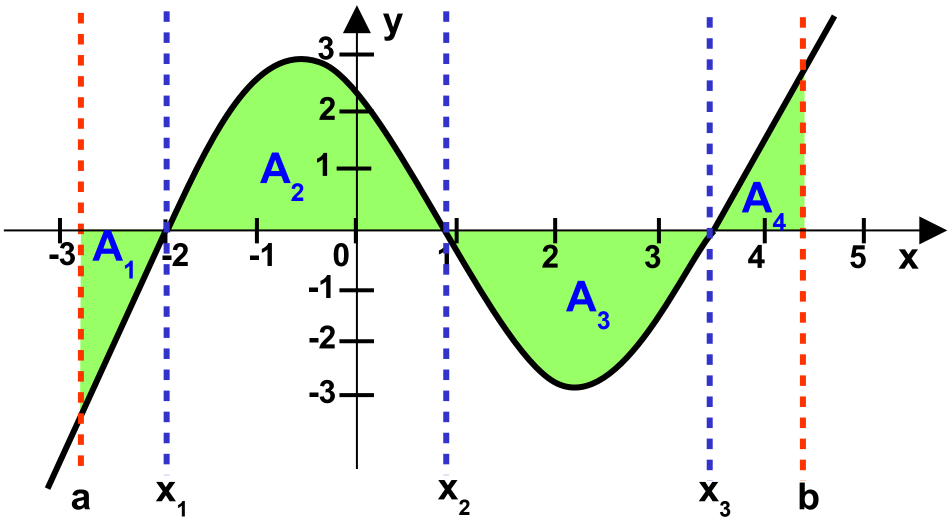
$$\int_{-2}^{2}\left(x^2-3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_{-2}^{2}$$

Aber es ist auch bekannt, dass die Flächenteile, die unterhalb der x-Achse liegen mit negativem Vorzeichen versehen sind und deshalb die ersten positiven Flächeninhalte wieder verringern. Das muss in diesem Fall natürlich verhindert werden weil es das Ergebnis verfälscht. Aus dem Bild der Funktion ist schon zu erkennen, was man machen muss, man darf nur bis zum Schnittpunkt mit der x-Achse – Nullstelle – berechnen, dann den Teil unterhalb der x-Achse getrennt berechnen und davon nur den Betrag benutzen, ohne das negative Vorzeichen, und dann den dritten Teil von der zweiten Nullstelle bis zum Ende des gesuchten Flächeninhalts. In diesem Fall führt das zu folgender notwendigen Änderung des Integrals:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}}\left(x^2-3\right)dx+\left|\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(x^2-3\right)dx\right|+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(x^2-3\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_{-2}^{-\sqrt{3}}+\left|\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right|+\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_{-\sqrt{3}}^{2}$$

Für Funktionen mit mehreren Nullstellen bedeutet das, dass die Integration gegebenenfalls mehrfach zu trennen ist. Jede Nullstelle der Funktion erfordert ein neues Integral. Damit kann sich für ein Integral folgende Notwendigkeit ergeben:



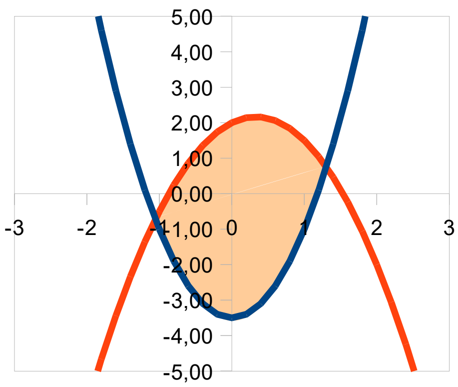
$$A=\int_a^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx+\int_{x_3}^{b} f(x)\,dx$$

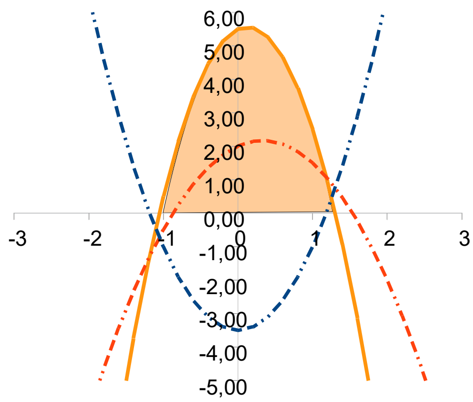
27.6.2. Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen.

Man kann nicht nur den Flächeninhalt von der x-Achse bis zu einer Funktionskurve berechnen, sondern auch den Flächeninhalt zwischen zwei Kurven. Das Prinzip ist wieder das Gleiche, wie bei den allgemeinen Flächeninhalten: Berechne die Fläche bis zur „oberen" Kurve und subtrahiere die Fläche bis zur „unteren" Kurve. Da aber das Integral linear ist, kann man die Subtraktion in ein Integral schreiben:

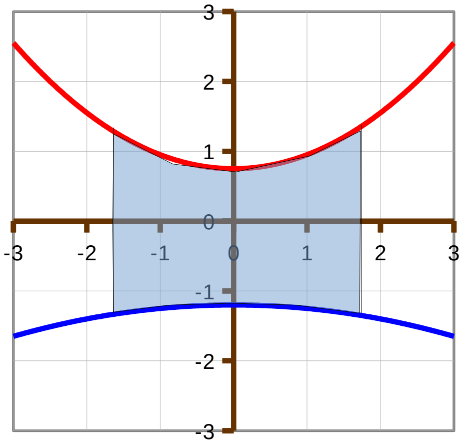
$$\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\ dx\right|$$

Da man auch hier schwer entscheiden kann, welche Funktion die obere ist, werden Betragsstriche gesetzt, damit nur die Maßzahl des Flächeninhalts benutzt wird. Allerdings ist auch hier auf die Nullstellen zu achten. Es sind nicht die Nullstellen der einzelnen Funktionen interessant, weil die nicht einzeln integriert werden, sondern die Nullstellen der Differenzfunktion, da diese integriert wird. Die Nullstellen der Differenzfunktion treten natürlich genau dort auf, wo die beiden Einzelfunktionen f(x) und g(x) den gleichen Funktionswert haben, weil dann die Differenz gleich 0 ist. Die Stellen, an denen die beiden Funktionen den gleichen Funktionswert haben sind die Schnittpunkte der beiden Funktionen. Für Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen gilt deshalb:
Die Integrale sind zu trennen an den x-Werten, an denen f(x) = g(x).





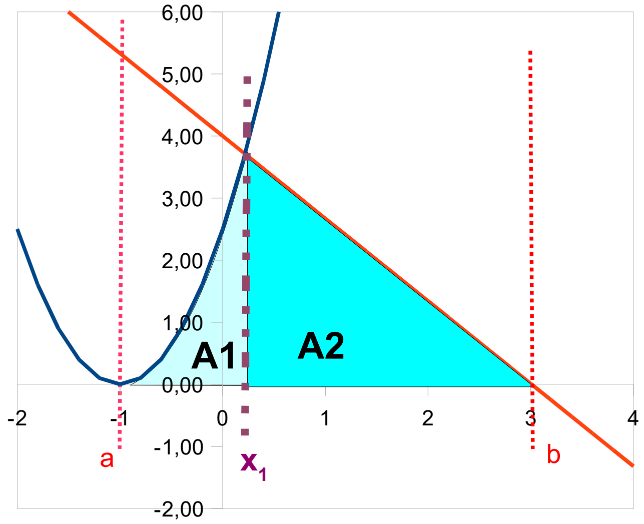
Auf der linken Seite ist die Fläche, die zwischen den beiden Funktionen liegt orange eingefärbt. Auf der rechten Seite zeigt die orange Fläche die Fläche an, die eigentlich berechnet wird: Die Fläche zwischen der Differenzfunktion (gelb) und der x-Achse. Deutlich zu erkennen ist, dass die Schnittpunkte der beiden Funktionen oberhalb und unterhalb der x-Achse liegen, und dass die Differenzfunktion genau dort ihre Nullstellen hat.
Wenn die beiden Kurven im Integrationsintervall keinen Schnittpunkt haben, dann muss das Integral auch nicht getrennt werden und kann in einem Ganzen berechnet werden.



$$\left| \int_{-1,8}^{1,8} (f(x) - g(x)) \, dx \right|$$

27.6.3. Flächeninhalt stückweise definierter Funktionen

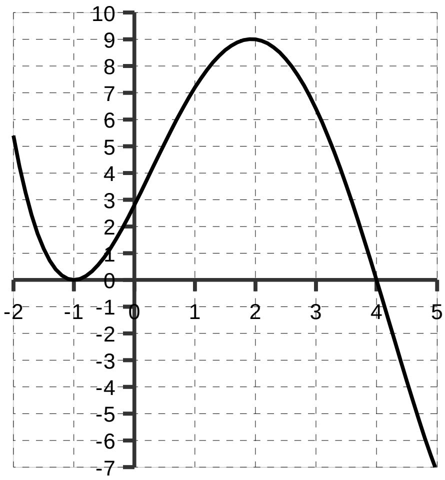
Als nächstes muss betrachtet werden, dass auch Flächen bestimmt werden können, die nicht im gesamten Intervall von ein und derselben Funktion begrenzt werden. Solche Funktionen sind stückweise definierte Funktionen.



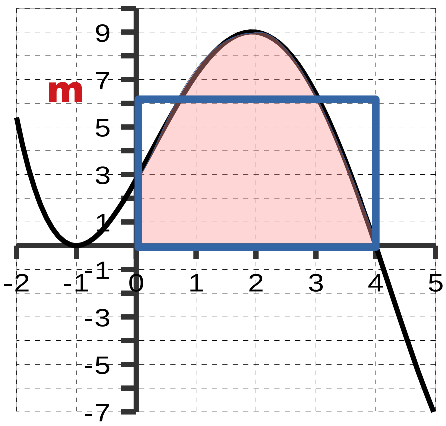
Unabhängig von noch vorhandenen Nullstellen der einzelnen Funktionen sind diese Integrale natürlich an den Grenzen der unterschiedlichen Definitionen zu trennen und die Fläche rechts in zwei Teilintegralen zu berechnen.

27.7. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Das bestimmte Integral wird auch benutzt, um den Mittelwert einer Funktion über einem Intervall zu berechnen. Nun ist es bei einer allgemeinen Funktion nicht so klar, was will man denn als Mittelwert dieser Funktion ansehen.



Was sollte man bei einer solchen Funktion als Mittelwert im Intervall von 0 bis 4 ansehen. Man berechnet die Fläche unter der Funktion. Man macht folgende Überlegung: Wenn man diese Fläche umwandelt in ein Rechteck, bei dem die Grundseite genau so lang ist, wie das Intervall, dann wäre die Höhe des Rechtecks genau der Wert, den die Funktion im Intervall haben müßte, um den gleichen Flächeninhalt zu erzielen. Diese Wert ist dann über das gesamte Intervall konstant und kann damit als mittlerer Wert für die Funktion angesehen werden. Damit stellt sich die Frage, wie bekommt man die notwendige Höhe über dem Intervall.



$$m \cdot 4 = \int_0^4 f(x)\,dx$$

Dabei stellt der linke Teil der Formel die Fläche des (blauen) Rechtecks dar und der rechte Teil der Formel die Fläche (rot) unter der Kurve. Diese beiden Flächen sollen gleich sein, dann ist M der Mittelwert der Funktion im Intervall 0 bis 4. Stellt man diese Gleichung nach m um und setzt allgemeine Integrationsgrenzen ein, dann erhält man folgende Formel für den Mittelwert:

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

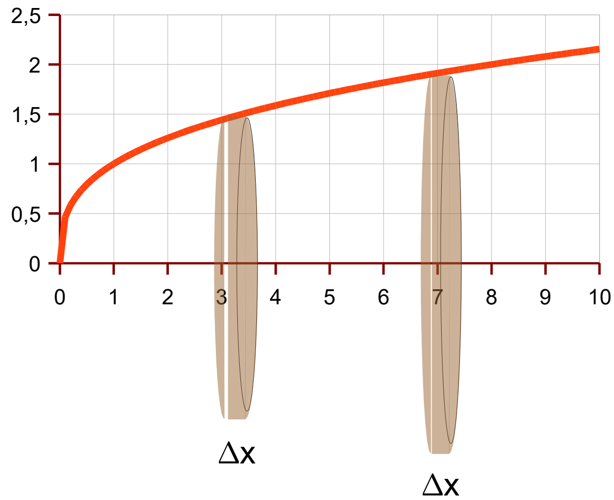
Wenn die Funktion im gesamten Intervall von 0 bis 4 den gleichen Funktionswert m hätte, käme der gleiche Flächeninhalt heraus, somit ist m der mittlere Funktionswert der Funktion f über dem Intervall 0 bis 4. m ist damit ein y – Wert und nicht die Stelle, an der der mittlere Funktionswert angenommen wird. m ist auch kein Flächeninhalt, nur weil ein Integral mit im Spiel ist. Über den x Wert, an dem dieser mittlere Funktionswert existiert, wird keine Aussage gemacht. Wegen der Stetigkeit der Funktion, sie macht keine Sprünge, ist aber gesichert, daß es mindestens ein solches x im Intervall gibt, an dem dieser Funktionswert angenommen wird.

27.8. Rotationskörper

Die Integralrechnung kann man nicht nur zur Flächenberechung von krummlinig begrenzten Flächen benutzen, sondern auch zur Volumenberechnung. Dazu werden in der höheren Mathematik sogenannte Mehrfachintegrale benutzt, die in der Schulausbildung keine Rolle spielen. Die einzigen Volumen, die man mit einfachen Integralen berechnen kann sind die Volumen von Rotationskörpern. Dazu lässt man ein ebene Kurve des x–y–Koordinatensystems um die x–Achse oder y–Achse rotieren. Die äußere Figur solcher Körper wird durch die Funktion bestimmt und die Querschnitte dieser Körper sind immer Kreise. Deshalb benutzt man den gleichen Grundgedanken, wie bei der Berechnung von Flächen. Einen rotierender Körper kann man sich vorstellen als ein Gebilde, das aus Zylindern verschiedener Durchmesse besteht. Der Radius eines solchen Zylinders ist genau der Funktionswert der gegebenen Funktion f(x). Dazu kann man wieder in einem Intervall einen oberen und einen unteren Funktionswert finden, wie es bereits bei der Flächenberechnung gemacht wurde. Die Höhe eines solchen Zylinders entspricht wieder der Streifenbreite der Flächenberechnung. Wenn man jetzt die Zylinderhöhen immer kleiner macht werden sich die Volumen der Zylinder immer mehr dem tatsächlichen Volumen des rotierenden Körpers annähern und im Grenzfall mit diesem identisch sein.

27.8.1. Rotation um die x – Achse

Wenn ein Kurvenbogen um eine Achse rotiert, entsteht ein dreidimensionaler Körper, den man aufgrund seiner Entstehung Rotationskörper nennt. Die Querschnittsflächen dieses Rotationskörpers sind Kreise, die ihren Mittelpunkt auf der Achse haben, um die die Kurve rotiert. Jeder Querschnittskreis hat an der Stelle x einen Radius von f(x). Damit hat jede Kreisscheibe eine Fläche von $\pi \cdot f(x)^2$. Diese Grundfläche ist mit der Höhe des Zylinders zu multiplizieren, um das Volumen zu erhalten. Die Höhe einer Kreisscheibe beträgt Δx.



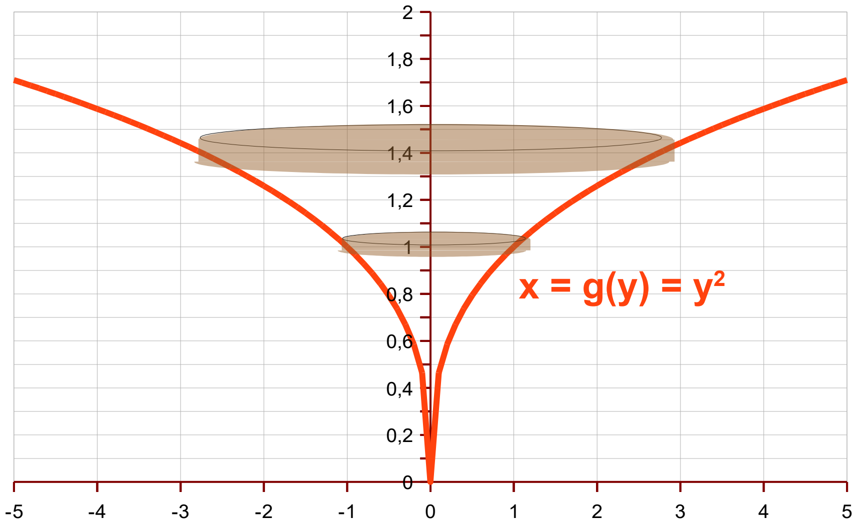
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(x_{i+1})^2 \cdot \Delta x = F_a^{\,b} = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\, dx$$

Die Höhe des gesamten Rotationskörpers wird durch die untere und obere Grenze des Integrals festgelegt.

Damit ergibt sich als Formel für einen Rotationskörper: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$

27.8.2. Rotation um die y – Achse

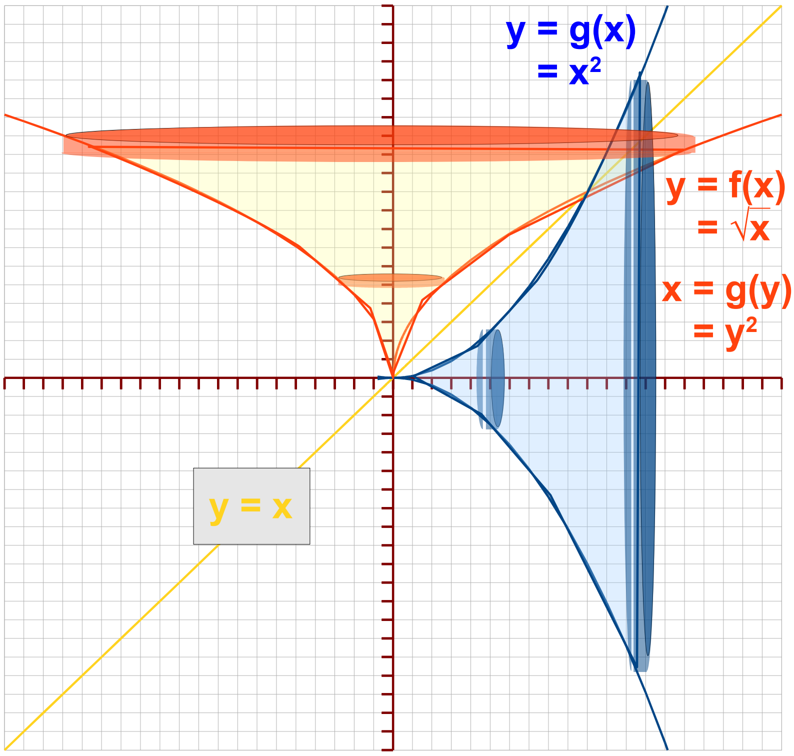
Die Rotation um die y – Achse läuft analog, wobei die Berechnung des Integrals ein kleines Problem aufwirft. Für die Rotation um die y – Achse müsste die Funktion nicht als y = f(x) gegeben sein, sondern als x = g(y).
Bei einfachen Funktionen kann man die gegebene Funktion auflösen nach der Variablen x und erhält somit den notwendigen Funktionsausdruck. Dabei soll schon einmal bemerkt werden, das das der erste Schritt zur Berechnung der Umkehrfunktion ist. Es soll aber zunächst nur die nach x aufgelöste Funktion betrachtet werden:



Jetzt existieren die Rotationsscheiben um die y-Achse und die Höhe des Rotationskörpers wird durch Grenzen auf der y – Achse festgelegt.
Damit wäre der Rotationskörper berechenbar.

$$V=\pi \int_{y1}^{y2} (g(y))^2 \ dy$$

Mit dieser Umstellung ist aber die gewohnte Schreibweise von Funktionen gestört und man hätte lieber eine Funktion in der Schreibweise y = f(x). Dazu muss man den zweiten Schritt bei der Umstellung auf die Umkehrfunktion noch vollziehen. Bei der nach x aufgelösten Funktion sind die beiden Variablen x und y zu vertauschen, was dann zu einer Funktion y = g(x) führt, wobei die Funktion g(x) die Umkehrfunktion von f(x) ist.
Jetzt kann man die Rotationszylinder, die um die y-Achse rotieren in gleicher Größe um die x – Achse rotieren lassen und benutzt dafür die Umkehrfunktion.



Rotation der Funktion $y = \sqrt{x}$ um die y – Achse ist das Gleiche, wie
Rotation der Funktion $y = x^2$ um die x – Achse