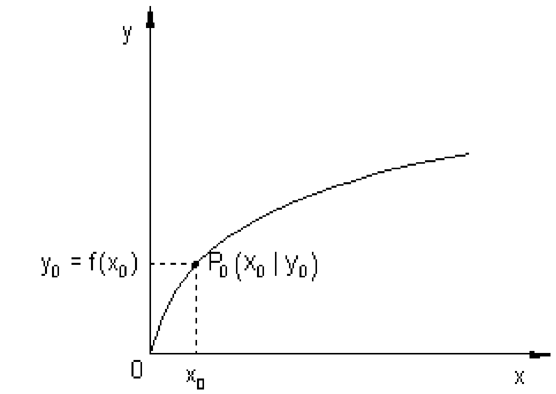
24. Differenzialrechnung

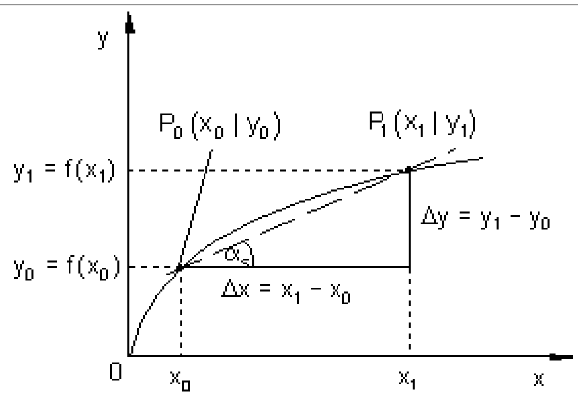
24.1. Grundlagen

In der Differentialrechnung interessiert die Steigung von Kurven. Eine Gerade hat eine konstante Steigung, bei einer Kurve ist die Steigung von Punkt zu Punkt verschieden und damit von x abhängig. In der Skizze soll die Steigung in P bestimmt werden. Dazu legt man eine Sekante durch P und einem Hilfspunkt A. Die Steigung der Sekante A hat im Vergleich zur tatsächlichen Steigung in P einen zu großen Wert. Nähern wir unseren Hilfspunkt A an P heran, so wird aus ihm B. Eine Sekante durch P und B hat ebenfalls eine zu große Steigung, der Fehler ist aber schon geringer geworden. Je weiter der Hilfspunkt an P herangeschoben wird, desto genauer stimmt die Sekantensteigung mit der Tangentensteigung überein. Die exakte Steigung in P erhält man schließlich über die Grenzwertbildung, bei der der Hilfspunkt in P hineinläuft bzw. der Abstand zwischen x_0 und z.B. gegen Null geht.

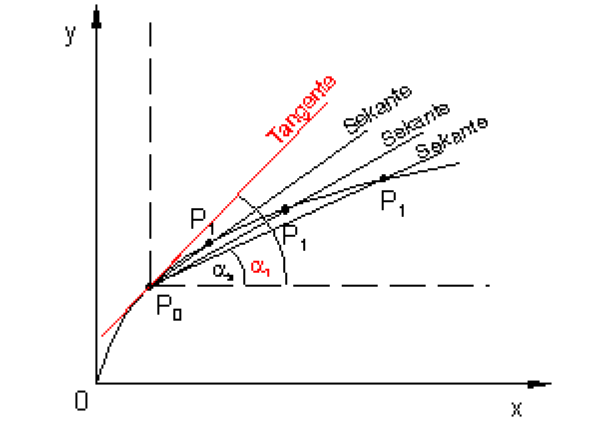
Gegeben ist ein Funktion f(x) und ihr Graph.
Gesucht ist der Anstieg der Tangente im Punkt $P_0(x_0|y_0)$

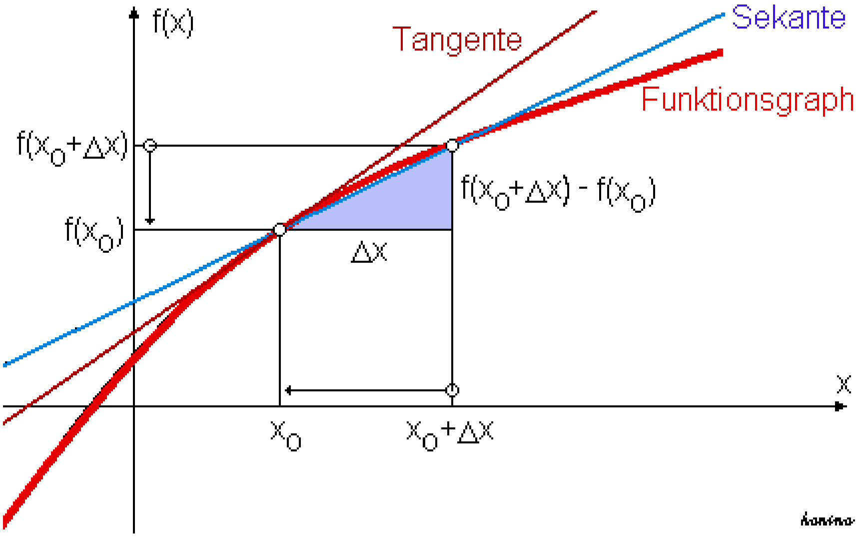


Bei der Lösung des Problems geht man davon aus, dass Problem zunächst annähernd zu lösen. Dazu wählt man einen zweiten Punkt $P_1(x_1|y_1)$, der ebenfalls auf dem Graph der Funktion liegt. Die beiden Punkte auf dem Graphen werden mit einer Geraden verbunden. Für diese gerade kann über die Zwei-Punkte–Gleichung einer Geraden problemlos die Geradengleichung bestimmt werden.



Je weiter der Punkt P_1 an den Punkt P_0 heran-rückt, desto mehr nähert sich die Gerade der Tangente im Punkt P_0. Wenn im Grenzfall der Punkt P_1 mit dem Punkt P_0 identisch ist, ist die Tangente erreicht.





Definition: Die Steigung m der Sekante heißt **Differenzenquotient** und wird durch die Formel $\frac{f(x_1\text{-}x_0) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ bzw. $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ausgedrückt

24.2. Grenzwert

Bei diesem Quotienten interessiert jetzt das Grenzverhalten für Δx gegen 0. Bei diesem Übergang wird aus der Sekantensteigung eine Tangentensteigung.

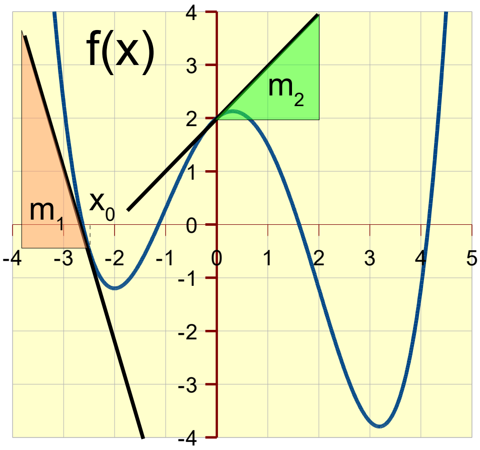
Definition: Der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ heißt

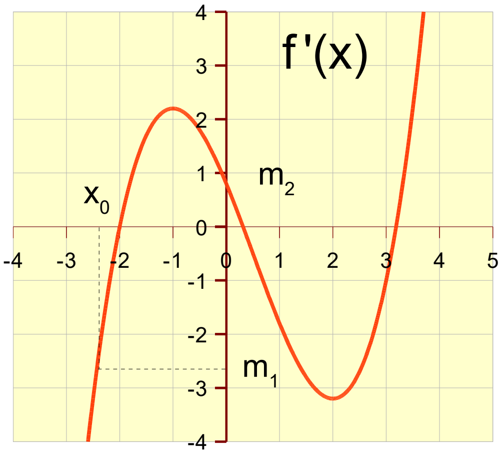
Differenzialquotient $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Dieser Differenzialquotient heißt auch „Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0“ Wenn dieser Grenzwert existiert ist die Funktion f(x) an der Stelle x_0 differenzierbar. Die Differenzierbarkeit ist also zunächst eine Eigenschaft eines einzelnen Punktes der Funktion. Wenn für diese Differenzierbarkeit an den Punkt x_0 keine weiteren

Bedingungen gestellt werden, ist die Funktion im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und somit lässt sich eine Funktion für die Ableitung angeben, die jedem Punkt der Funktion f(x) den Wert seiner Ableitung zuweist. Erst dann entsteht die **Ableitungsfunktion** f'(x) der Funktion f(x).

Mit der Definition der Ableitungsfunktion ist es möglich, für die 1. Ableitung eine Funktionskurve zu bestimmen. Mit Hilfe dieser Funktionskurve lässt sich zwischen dem Tangentenanstieg einer Funktion f(x) im Punkt x0 und den Funktionswerten der 1. Ableitung folgender Zusammenhang herstellen.





In der linken Abbildung ist die Funktion f(x) dargestellt. An diese Funktion sind in zwei Punkten die Tangente eingetragen. Der erste Punkt ist mit x_0 gekennzeichnet und der zweite Punkt ist der Schnittpunkt mit der y-Achse. Zu jeder Tangente sind die Steigungsdreiecke m_1 und m_2 eingezeichnet.
Im Punkt x_0 hat die Tangente einen negativen **Anstieg m_1** . Der Wert dieses Anstiegs kann aus dem Funktionsbild der 1. Ableitung abgelesen werden. Betrachtet man dort an der Stelle x_0 den **Funktionswert der 1. Ableitung**, so erhält man den Wert m_1.
Genauso verhält es sich mit dem Schnittpunkt mit der y-Achse. Der Tangentenanstieg hat einen positiven Wert m_2. Diesen Wert kann man aus dem Kurvenbild der 1. Ableitung ebenso aus dem Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmen. In beiden Fällen ist der Wert gut zu erkennen: Der Tangentenanstieg m_2 im Punkt x = 0 ist +1 und der Funktionswert der 1. Ableitung an der Stelle x = 0 ist +1.

24.3. Ableitung einzelner Grundfunktionen

Mit dieser Grenzwertdefinition lassen sich für elementare Funktionen die jeweiligen Ableitungen bestimmen.

24.3.1. Ableitung der Funktion y = x^2

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0+\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x_0+\Delta x = 2x_0$$

Für die Existenz des Grenzwertes sind keine weiteren Bedingungen an den Wert x0 zu stellen, so gibt es für die elementare Funktion $f(x) = x^2$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x$ für alle x des Definitionsbereiches.

24.3.2. Ableitung der Funktion y = 1/x

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{(x_0+\Delta x)}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0\,(x_0+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0\cdot(x_0+\Delta x)} = \frac{-1}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

Für die Existenz dieses Grenzwertes ist die Voraussetzung $x_0 \neq 0$ zu erfüllen. Diese Bedingung ist aber bereits an die Ausgangsfunktion zu stellen, da an dieser Stelle die Funktion nicht definiert ist. Deshalb gilt auch diese Aussage für alle x des Definitionsbereiches. Die Ableitungsfunktion von $f(x) = 1/x$ ist $f'(x) = -1/x^2$.

24.3.3. Ableitung der Funktion y = $\sqrt{x}$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})\,(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x\cdot(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})} = \frac{\Delta x}{\Delta x\cdot(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Für die Existenz dieses Grenzwertes ist die Voraussetzung $x_0 \neq 0$ zu erfüllen. Diese Bedingung ist in der Ausgangsfunktion nicht vorhanden. Damit gilt die Ableitungsfunktion für alle x des Definitionsbereiches mit der Eigenschaft $x_0 \neq 0$. (Die Wurzelfunktion an der Stelle x =0 eine senkrechte Tangente!)

24.4. Ableitungen elementarer Grundfunktionen

Für die Arbeit mit Ableitungen ist es nützlich, wenn man die Ableitungen der folgenden Grundfunktionen kennt:

f(x)	f '(x)
x^n	$n\,x^{n-1}$
C	0
sin (x)	cos(x)
cos(x)	– sin(x)

Ab der 12. Klasse sollten noch folgende Funktionen dazukommen

e^x	e^x
ln(x)	1/x

24.5. Ableitungsregeln

24.5.1. Ableitung von Summen und Differenzen: s(x) = f(x) ± g(x)

$$\frac{s(x_0+\Delta x) + s(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \pm g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \pm \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

$$\boxed{s'(x) = f'(x) \pm g'(x)}$$

Bei einer Summe/Differenz von Funktionen kann man jeden Summanden einzeln ableiten.

24.5.2. Ableitung mit konstantem Faktor: f(x) = c • g(x)

$$\frac{f(x_0+\Delta x) + f(x_0)}{\Delta x} = \frac{c \bullet g(x_0+\Delta x) - c \bullet g(x_0)}{\Delta x} = c \bullet \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

$$\boxed{f'(x) = c \bullet g'(x)}$$

Ein multiplikativer Faktor vor einer Funktion bleibt beim Ableiten erhalten und es wird die Funktion ohne Berücksichtigung des Faktors abgeleitet.

24.5.3. Ableitung einer (additiven) Konstanten: f(x) = C

$$\frac{f(x_0+\Delta x) + f(x_0)}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Die Ableitung einer (additiven) Konstanten ist 0. Diese triviale Aussage hat später weitreichende Konsequenzen.

24.5.4. Ableitung eines Produktes von Funktionen: p(x) = f(x) • g(x)

$$\frac{p(x_0+\Delta x) - p(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) \bullet g(x_0+\Delta x) - f(x_0) \bullet g(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_0+\Delta x) \bullet g(x_0+\Delta x) - \mathbf{f(x_0) \bullet g(x_0+\Delta x)} + \mathbf{f(x_0) \bullet g(x_0+\Delta x)} - f(x_0) \bullet g(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\, g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\, \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

$$\boxed{p'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}$$

Bei einem Produkt von Funktionen ist jeweils eine Funktion abzuleiten, die anderen bleiben bestehen. Die so entstehenden Teile werden zusammenaddiert.

24.5.5. Ableitung eines Quotienten von Funktionen: q(x) = f(x) / g(x)

$$\frac{q(x_0+\Delta x) - q(x_0)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{\dfrac{f(x_0+\Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x) \cdot g(x_0)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_0+\Delta x) \cdot g(x_0) - \mathbf{f(x_0) \cdot g(x_0)} + \mathbf{f(x_0) \cdot g(x_0)} - f(x_0) \cdot g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x) \cdot g(x_0) \cdot \Delta x}$$

$$= \frac{1}{g(x_0+\Delta x) \cdot g(x_0)} \left(g(x_0) \cdot \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right)$$

$$q'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Die Ableitung einer reziproken Funktion $q(x) = 1/g(x)$ ist ein Spezialfall der Quotientenregel:

$$q'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

24.5.6. Ableitung verketteter Funktionen k(x) = f(g(x))

$$\frac{k(x_0+\Delta x) - k(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(\,g(x_0+\Delta x)\,) - f(\,g(x_0)\,)}{\Delta x} \quad \text{erweitern mit: } \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(\,g(x_0+\Delta x)\,) - f(\,g(x_0)\,)}{\Delta x} \cdot \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(\,g(x_0+\Delta x)\,) - f(\,g(x_0)\,)}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

substituieren: $g(x_0) = z_0$
$g(x_0+\Delta x) - g(x_0) = \Delta z$
$g(x_0+\Delta x) = z_0 + \Delta z$

Die Funktionswerte von g entsprechen in der Funktion f den Werten x in der Funktion g; sie sind die unabhängigen Variablen.

außerdem gilt: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x_0+\Delta x) - g(x_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta z$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(\,g(x_0+\Delta x)\,) - f(\,g(x_0)\,)}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\,g(x_0+\Delta x)\,) - f(\,g(x_0)\,)}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{d}{dz} f(z_0) \bullet \frac{d}{dx} g(x_0)$$

$$= \frac{d}{dg(x_0)} f(g(x_0)) \bullet \frac{d}{dx} g(x_0)$$

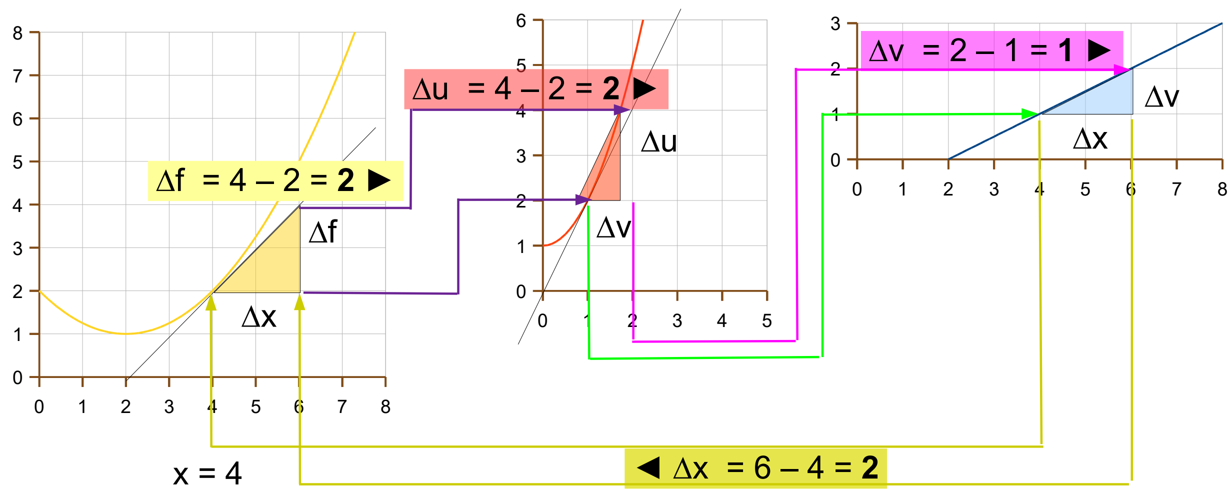
$k'(x) = f'(g(x)) \bullet g'(x)$

Bei verketteten Funktionen wird zunächst die äußere Funktion abgeleitet und als Argument der Funktion bleibt die innere Funktion erhalten. Dann wird die innere Funktion abgeleitet und als Faktor der Ableitung der äußeren Funktion hinzugefügt.

$f(x) = u(v(x)) = (½x–1)^2 + 1$
$= ¼ x^2 – x + 2$

$u(x) = v^2 + 1$

$v(x) = ½ x – 1$



x = 4

$f'(x) = ½x – 1$

$u'(v) = 2v$
$u'(v(x)) = 2(½x–1)$
$= x – 2$

$v'(x) = m = ½$

Δf =	Δu =	u' Δv =	u' v' Δx
d f(x) =	d u(v) =	2v dv =	2v ½
d f(x) =	d u(v) =	2(½x–1) dv =	2(½x –1) ½ dx

$$\frac{df}{dx} = u'\,v' = 2(½x –1)\,½ = ½x – 1$$

Zur graphischen Veranschaulichung der Kettenregel

Untersucht wird die Funktion $f(x) = (½\,x – 1)^2 + 1$. Diese Funktion lässt sich natürlich ausmultiplizieren und dann als ganzrationale Funktion ableiten mit dem Ergebnis $f'(x) = ½\,x – 1$.
Aber die Funktion kann auch als verkettete Funktion verstanden werden mit einer äußeren Funktion $u(x) = x^2 + 1$ und einer inneren Funktion $v(x) = ½\,x – 1$. Damit entsteht als äußere Funktion $u(v) = v^2 + 1$ mit einer Ableitung $du/dv = u'(v) = 2v$. Im mittleren Koordinatensystem des Beispiels gelangt man über den Ordinatenabschnitt

Δu zum Abszissenabschnitt Δv und über das rechte Koordinatensystem vom dortigen Ordinatenabschnitt Δv zum Abszissenabschnitt Δx (Ordinate ist die y-Achse, Abszisse die x-Achse), der identisch ist mit dem Abszissenabschnitt Δx im linken Koordinatensystem der Funktion f(x).

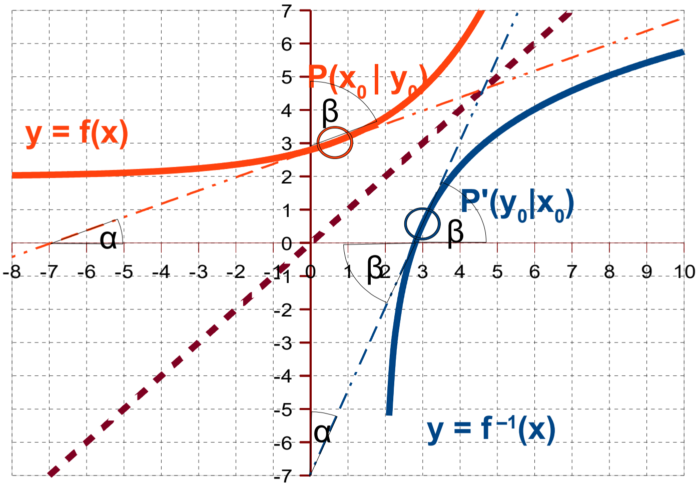
v ist also eine Funktion von x, für die gilt dv/dx = v'(x), oder dv = v'(x) dx. Betrachtet man jetzt die Funktion u als Funktion von x (genau das ist f(x)), muss man das dv in der Ableitung von du ersetzen: du/ (v'(x) • dx) = 2v. Formt man diesen Bruch so um, dass man die Ableitung du/dx erhält, so muss mit v'(x) durchmultipliziert werden, was zum Ergebnis du/dx = u'(v) v'(x) führt. Für die Variable v setzt man in der Funktion u(v) den Funktionsterm v(x) ein und erhält somit die Ableitung von du/dx = df/dx = u'(v(x)) • v'(x). In dem obigen Beispiel damit df/dx = 2 (½ x – 1) • ½ = ½ x – 1. Die gleiche Ableitung, die man erhält, wenn man die verkettete Funktion ausmultipliziert.

24.5.7. Ableitung der Umkehrfunktion: y =f(x) ; x = g(y)

Die Umkehrfunktion erhält man, indem man eine gegebene Funktion y = f(x) nach der Variablen x auflöst. Damit erhält man eine eine Funktion x = g(y). Zum Bilden der Umkehrfunktion gehört, dass nach dem Auflösen die Variablen x und y wieder vertauscht werden, damit auch die Umkehrfunktion in der Form y = g(x) geschrieben wird. Nicht alle Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion, jedoch die Elementarfunktionen haben alle eine solche. Bei einigen dieser Funktionen besteht die Umkehrfunktion aus zwei Teilen, wie z.B y = x^2 oder sie ist nur für bestimmte Bereiche definiert, wie z.B y = sin(x). Näheres dazu ist beim Thema Umkehrfunktionen zu finden.

g'(x) = 1 /f '(y) mit y = g(x)
= 1 / f'(g(x))

Die Tangente an die Funktion f(x) im Punkt $P(x_0|y_0)$ hat einen Anstieg von tan α. Da die Schnittwinkel der roten und blauen Tangente der Umkehrfunktion an der Winkelhalbierenden y=x gleich sind, ist der Schnittwinkel der blauen Tangente mit der y-Achse ebenfalls gleich α. Das so entstehende rechtwinklige Dreieck an der x-y-Achse hat als zweiten Winkel den Wert β, der, weil Scheitelwinkel, der Anstieg der Tangente an die Umkehrfunktion ist, und zwar im Punkt $P'(y_0|x_0)$ *(Vertauschen der x- und y- Werte gegenüber dem Punkt P)*. Da α und β die gleichen Katheten hat, nur mit unterschiedlicher Bedeutung: Die Gegenkathete α von ist die Ankathete β von und umgekehrt folgt daraus, dass die beiden tan Werte genau reziproke Werte sind: tan α = 1 / tan β



Womit gezeigt ist, dass der Tangentenanstieg der Umkehrfunktion genau der reziproke Wert des Tangentenanstiegs der Ausgangsfunktion ist.

Beispiel: f(x) = y = x^2 die zugehörige Umkehrfunktion ist g(x) = y = $\sqrt{x}$

Die Ableitung von $y = x^2$ ist $y' = 2x$
Die Ableitung von $y = \sqrt{x}$ ist $y' = 1/2y = 1/2\sqrt{x}$
$x = f(y) = y^2$; $f'(y) = 2y$;
Umkehrfunktion: $y = g(x) = \sqrt{x}$; $g'(x) = 1/ f'(y) = 1/ 2y$
$= 1/ 2f'(g(x)) = 1/ 2\sqrt{x}$

$f(x) = y = e^x$ die zugehörige Umkehrfunktion ist $g(x) = y = \ln(x)$
Die Ableitung von $y = e^x$ ist $y' = e^x$
Die Ableitung von $y = \ln x$ ist $y' = 1 / x$
$x=f(y) = e^y$ $f'(y) = e^y$;
Umkehrfunktion: $y = g(x) = \ln(x)$; $g'(x) = 1/ f'(y) = 1/e^y$
$= 1/e^{y} = 1/ e^{\ln(x)} = 1/x$

24.5.8. Ableitung für Funktionen in Parameterdarstellung y = f(t), x = g(t)

(Nicht für das Abitur notwendig)
Dabei handelt es sich um Funktionen oder Kurven, die nicht in der Form $y = f(x)$ geschrieben werden können. Es stellt sich die Frage, wie kann man bei solchen Funktionen die 1. Ableitung bzw. den Tangentenanstieg in einem Punkt $P(x_0|y_0)$ bestimmen. Dazu geht man von der theoretischen Überlegung aus, dass man die Funktion $x=g(t)$ nach t auflösen könnte. Wenn das immer machbar wäre, könnte man diesen Ausdruck in die Funktion $y =f(t)$ einsetzen und hätte ein Funktion $y = f_2(x)$. Die nach t aufgelöste Funktion hat die Form: $t = g^{-1}(x)$, die dann in die in die Funktion von y für den Parameter t eingesetzt wird: $y = f(g^{-1}(x))$. Diese Funktion kann man formal nach x ableiten, wobei man bezüglich der Funktion $g^{-1}(x)$ die Kettenregel zu beachten hat.

$dy/dx = f'(g^{-1}(x)) * (g^{-1}(x))'$ (ACHTUNG! $g^{-1}(x)$ heißt hier nicht $1/g(x)$)

$(g^{-1}(x))' = dt/dx$ ist die Ableitung der Funktion $t = g^{-1}(x)$ nach x
damit ist es die Umkehrfunktion von $x = g(t)$.
Die Ableitung der Umkehrfunktion $g^{-1}{}'(x) = 1/ g'(g^{-1}(x))$ mit $g^{-1}(x) = t$
was zur Ableitung von $g^{-1}{}'(x) = 1/ g'(t)$ führt.

Setzt man das in die obige Formel ein, erhält man folgende Formel:
$dy/dx = f'(g^{-1}(x)) / g'(t) = f'(t) / g'(t)$
oder

$$\boxed{y'(x) = dy/dx = f'(t) / g'(t) = (dy/dt) / (dx/dt)}$$

Man berechnet die Ableitung der Funktion $y = f(t)$ nach t: $dy/dt = f'(t)$
und die Ableitung der Funktion $x = g(t)$ nach t: $dx/dt = g'(t)$
und bildet anschließend den Quotienten der beiden Funktionen.

24.5.9. Logarithmisches Differenzieren $y = f(x)^{g(x)}$

(Nicht für den Schulgebrauch)
Diese Differenziationsregel ist notwendig, wenn bei einem exponentielle Ausdruck die Variable x sowohl in der Basis, als auch im Exponenten vorkommt. Typische Vertreter dieser Funktionen sind etwa $y = x^x$ oder $y = (\sin x)^x$. Eines dürfte klar sein, dass es sich hier um eine besondere Art von verketteten Funktionen handelt, die in irgend einer Weise mit der Kettenregel zu bearbeiten sind.

Betrachtet man die Funktion $y = f(x)^{g(x)}$ als allgemeinen Ausdruck, dann lässt sich zunächst die gesamte Funktionsgleichung mit dem natürlichen Logarithmus logarithmieren:

$$\ln y = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

Jetzt ist auf der rechten Seite ein Produkt entstanden, das normal nach der Produktregel abgeleitet werden kann. Auf der linken Seite ist eine Kettenregel entstanden mit einer äußeren Funktion ln ( ) und einer inneren Funktion y(x), bei der zu beachten ist, das diese eine innere Ableitung y'(x) besitzt. Damit erhält man, wenn man beide Seiten differenziert:

$$\frac{1}{y} \cdot y'(x) = g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\boxed{y'(x) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)}$$

Beispiel:

$$u(x) = x^{(2+3x)} \qquad | \ln$$

$$\ln (u(x)) = (2+3x) \ln x$$

Ableitung:

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = 3 \ln x + (2+3x) \frac{1}{x}$$

$$u'(x) = x^{(2+3x)} \left(3 \ln x + (2+3x) \frac{1}{x} \right)$$

ohne Logarithmierung kann man dieses Beispiel auch direkt mit der Kettenregel ableiten, indem man die Funktion in den Exponenten einer e-Funktion umschreibt:

$$u(x) = x^{(2+3x)}$$

$$u(x) = e^{(2+3x) \ln x}$$

Ableitung:

$$= e^{(2+3x) \ln x} \left(3 \ln x + (2+3x) \frac{1}{x} \right)$$

$$u'(x) = x^{(2+3x)} \left(3 \ln x + (2+3x) \frac{1}{x} \right)$$

24.5.10. Die Ableitungsfunktion

Die Ableitung ist zunächst eine Eigenschaft eines Punktes der Kurve. Es wird für einen Punkt x_0 der Tangentenanstieg ermittelt. Damit entsteht keine Funktion, sondern ein einzelner reeller Wert.
Als einfaches Beispiel soll dazu die Funktion y =f()x = x^2 betrachtet werden. Die Ableitung ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten. Also ist als Erstes der Differenzenquotient für die Funktion $y=x^2$ für eine beliebige Stelle x_0 zu bilden.

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2+2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, es wurde keine Ableitung gebildet, sondern nur der Differenzenquotient für die Funktion an einer festen aber beliebigen Stelle gebildet. Man könnte für x_0 auf Zahlen wie 2, -3, 7 oder -5 einsetzen. Bisher wurde dieser Differenzenquotient nur mit den Mitteln der Bruchrechnung bearbeitet und vereinfacht. Will man jetzt zur Ableitung kommen, so ist von diesem Differenzenquotienten das Grenzwert für Δx gegen 0 zu bilden:

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

Damit gilt: Der Grenzwert des Differenzenquotienten für eine feste Stelle x_0 ist $2x_0$.
Damit hat die 1. Ableitung an der Stelle x_0 den Wert $2x_0$. An die Existenz dieses Grenzwertes ist keine besondere Bedingung gebunden, dh. es gibt keine Einschränkungen für die Existenz dieses Grenzwertes. Dieser Grenzwert ist

- für alle x aus dem Definitionsbereich berechenbar
- hat für alle x aus dem Definitionsbereich den gleichen Wert $2x_0$

Die 1. Ableitung für die Funktion y = f(x) = x^2 ist für alle x des Definitionsbereiches y' = f'(x) = 2x.

Die Funktion y = f(x) = x^2 hat die Ableitungsfunktion y' = f'(x) = 2x.

Das heißt nichts weiter als:

> Es gibt eine Abbildungsvorschrift (=Funktion) die jedem Wert an der Stelle x eindeutig einen Wert f'(x) zuordnet und diese Zuordnungsvorschrift heißt 2*x

24.5.11. Höhere Ableitungen

Da man die 1. Ableitung auch als Funktion schreiben kann, ist es natürlich möglich von der Ableitungsfunktion der 1. Ableitung wieder eine 1. Ableitung zu bilden, da es eine ganz normale Funkion ist, die den mathematischen Kriterien an eine Funktion genügt. Da diese Funktion dann die 1. Ableitung der 1. Ableitung ist, bezeichnet man sie sinnvollerweise als 2. Ableitung der Ausgangsfunktion. Auf diese Art kann man für jede Funktion beliebig viele Ableitungen bilden. Dabei muss man sich immer bewusst sein, man kann von keiner(!) Funktion die 2. Ableitung bilden, es gibt keine Vorschrift, wie man eine 2. Ableitung berechnen muss. Man kann nur von einer 1. Ableitung wieder eine 1. Ableitung berechnen und diese wird dann der Einfachheit halber als 2. Ableitung der Ausgangsfunktion bezeichnet !

Damit ist folgendes klar: Alle Eigenschaften der Funktion f, die über die 1. Ableitung bestimmt werden können, lassen sich ebenso für die 1. Ableitung treffen, wenn man dafür die 2. Ableitung als Grundlage nimmt. Die 2. Ableitung ist die 1. Ableitung der 1. Ableitung.

Diese Tatsache macht man sich im anschließenden Kapitel „Kurvendiskussion“ zu nutze, um Eigenschaften der Ausgangsfunktion zu bestimmen, die über bestimmte Eigenschaften der 1. Ableitung ermittelt werden können. Um diese 1. Ableitung zu untersuchen benutzt man analog die 2. Ableitung.

25. Kurvendiskussion

25.1. Grundgedanke

Die geometrischen Eigenschaften der Ableitung macht man sich für die Untersuchung von Funktionen zu nutze. Aus der Definition heraus ist der Wert der 1. Ableitung gleich dem Anstieg der Tangente in einem Punkt x_0. daraus kann man zunächst schlussfolgern, wenn die 1. Ableitung größer 0, dann steigt die Kurve, wenn sie kleiner 0, dann fällt die Kurve. Dieses Steigen und Fallen drückt man in dem Begriff „Monotonie“ aus. das Kurvenverhalten ist „monoton“ in eine Richtung. Ist die 1. Ableitung größer 0, ist die Funktion monoton steigend, ist sie kleiner 0, ist die Funktion monoton fallen.

Interessante Punkte einer Kurve sind z.B. solche, bei denen diese 1. Ableitung gleich 0 oder gleich ∞ ist. Eine 1. Ableitung gleich 0 heißt, dass das Kurvenbild an der Stelle eine waagerechte Tangente besitzt, eine 1. Ableitung gleich ∞ bedeutet, dass das Kurvenbild an der Stelle eine senkrechte Tangente besitzt. Eine senkrechte Tangente würde bedeuten, dass die Funktion senkrecht nach oben oder unten geht, was nach der Definition von Funktionen nicht sein darf, da dann für einen x-Wert mehrere y-Werte möglich sind. Senkrechte Tangenten können deshalb nur an Polstellen auftreten, da an diesen Stellen kein wirklicher Funktionswert +∞ oder – ∞ existiert, sondern nur ein Grenzverhalten.
Waagerechte Tangenten treten an sogenannten Extremstellen auf. Das sind solche x-Werte, bei denen die zugehörigen y-Werte, für eine bestimmte Umgebung, den größten oder kleinsten Wert darstellen. Wie groß diese Umgebung ist, kann nicht allgemein angegeben werden, sondern ist von der Funktion abhängig.

Ein weiteres interessantes Merkmal einer Kurve ist ihr Kümmungsverhalten. Außer Geraden zeigen alle anderen Funktionen ein mehr oder weniger aufgeprägtes Krümmungsverhalten. Darunter versteht man, dass das Kurvenbild in einem kleinen Intervall ein kreisähnliches Verhalten besitzt – das Kurvenbild einen gekrümmten Bogen beschreibt. Durchschreitet man das Kurvenbild von – ∞ nach + ∞ kann man zwischen links-gekrümmten Kurventeilen und rechts-gekrümmten Kurventeilen unterscheiden. Die Aussage über die Art der Krümmung kann mit der 2.Ableitung bestimmt werden. Dabei muss es Kurvenpunkte geben, bei denen die Krümmung von der einen Art zur anderen Art wechselt. Diese Punkte nennt man Wendepunkte, weil der Kurvenbogen eine Wende von links nach rechts, oder von rechts nach links ausführt. An solchen Kurvenpunkten hat die 1. Ableitung einen Extremwert, weil an diesen Stellen der Tangentenanstieg in seiner Umgebung den größten oder kleinsten Wert besitzt (Näheres siehe im Kapitel 2. Ableitung). Das bedeutet aber, dass die 1. Ableitung der 1. Ableitung den Wert 0 haben muss, also muss die 2. Ableitung der Ausgangsfunktion den Wert 0 haben.

25.2. Eigenschaften aus der Funktionsgleichung ermitteln

25.2.1. Definitionsbereich

Üblicherweise sollte ein Kurvendiskussion mit dem Definitionsbereich beginnen. Bei vielen Funktionstypen ist der Definitionsbereich unkritisch und die Funktion gilt für alle reellen Werte x. Treten folgende Funktionen auf, ist dem Definitionsbereich mehr Beachtung zu schenken:

gebrochen-rationale Funktionen: Für alle Nullstellen des Nenners ist die Funktion nicht definiert. Diese einzelnen x-Werte müssen vom Definitionsbereich ausgeschlossen werden.
Wurzelfunktionen, Logarithmusfunktionen: diese Funktionen sind für negative x-Werte nicht definiert.
Funktionen, bei denen die tan-Funktion auftritt

25.2.2. Symmetrie

Symmetrie ist bei den wenigsten Funktionen gegeben. Man unterscheidet zwischen Achsensymmetrie und Punktsymmetrie.
Achsensymmetrie: Hier sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden
achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$ (gerade Funktion)
achsensymmetrisch zu $x = x_0$: $f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$
Punktsymmetrie: Hier sind auch zwei Möglichkeiten zu unterscheiden
punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$ (ungerade Funktion)
punktsymmetrisch zu $P_0(x_0|y_0)$: $y_0 = ½ (f(x_0-h) + f(x_0+h))$

Für ganz-rationale Funktionen (Polynome) gelten folgende Aussagen:
Treten nur ganzzahlige Potenzen aus, dann ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse. Dazu gehört auch, dass ein Absolutglied möglich ist.
Treten nur ungerade Potenzen auf, dann ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung. Dazu gehört auch, dass **kein** Absolutglied auftreten darf.

Für gebrochen-rationale Funktionen gelten folgende Aussagen:
Haben das Zählerpolynom und das Nennerpolynom nur gerade Potenzen, dann ist auch der Quotient eine **gerade** Funktion.
Haben das Zählerpolynom und das Nennerpolynom nur ungerade Potenzen, dann ist der Quotient ebenfalls eine **gerade** Funktion.
Hat das Zähler- oder das Nennerpolynom nur gerade (ungerade) Potenzen und das Nenner- oder Zählerpolynom nur ungerade (gerade) Potenzen, dann ist der Quotient eine **ungerade** Funktion.

Die Aussagen für gebrochen-rationale Funktionen gelten generell für alle Quotienten aber auch Produkte von Funktionen. Das Produkt zweier gerader oder ungerader Funktionen ist eine gerade Funktion. das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist immer eine ungerade Funktion.
Die Untersuchung von Symmetrieeigenschaften ist noch angeraten bei trigonometrischen Funktionen, sowie bei Funktionen die komplett mit einer Potenz versehen wurden, wie z.B $(x^2 +3x +2)^2$.

25.2.3. Nullstellen

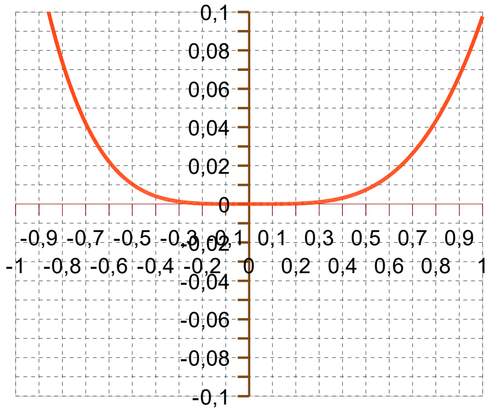
Eine Untersuchung, die alle Funktionen betrifft, ist die Untersuchung der Nullstellen, dh. das bestimmen der Schnittpunkte mit der x-Achse. Während Schnittpunkte mit der x-Achse mehrere auftreten können, kann es Schnittpunkte mit der y-Achse nur einen geben. Das resultiert aus der Definition der Funktion, dass zu jedem x-Wert nur ein y-Wert existieren darf. Das Bestimmen der Nullstellen von Hand ist nicht immer möglich. Bei ganzrationalen Funktionen kann man davon ausgehen, dass nur Ausdrücke bis zu einem quadratischen Polynom 2. Grades mittel p-q-Formel durch schriftliches Rechnen lösbar ist. Bei höheren Potenzen ist die Möglichkeit zu prüfen, ob Potenzen von x ausgeklammert werden können, um dadurch das Ausgangspolynom in seinen Potenzen zu reduzieren. Bei Funktionen der Art $x^5 – 2x^3 + 4x^2$ kann die niedrigste Potenz, die in allen Summanden auftritt – x^2 – ausgeklammert werden, was dann zu einer Funktion $x^2 (x^3 – 2x +4)$ führt.
Hier tritt jetzt der „Satz vom Nullprodukt“ in Erscheinung: Ein Produkt kann nur dann Null sein, wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist. Damit reicht es, die Faktoren einzeln zu betrachten und die x-Werte zu finden, bei denen der jeweilige Faktor Null wird.
Im obigen Beispiel wäre das x^2 und die Klammer getrennt zu untersuchen.
Während eine reine x-Potenz sehr einfach zu bearbeiten ist, dieser Faktor ist Null für x=0, ist der verbleibende Klammerausdruck immer noch keine quadratische Funktion. Will man hier ohne GTR weiterkommen, muss man den Ausdruck mit zielgerichteten Test nach Nullstellen absuchen. Dazu kann man nur nach ganzen Zahlen suchen. Diese ganzen Zahlen müssen ein teile des Absolutgliedes sein, dabei sind positive und negative Vorzeichen, so wie auch die zahl 1 zu berücksichtigen. Für den obigen Ausdruck $x^3 – 2x +4$ sind also alle Teiler von 4 zu untersuchen. das sind –4; –2 ; –1 ; 1; 2 ; 4. Ist unter diesen Zahlen keine ganzzahlige Lösung dabei, kann es keine ganzzahlige Lösung geben. Andere Zahlen sind manuell nicht bestimmbar. Mit jeder gefundenen Nullstelle lässt sich das Polynom über eine Polynomdivision in seinem Grad verringern, bis man zu einem quadratischen Polynom kommt, das dann über p-q-Formel berechnet werden kann.
Andere Lösungen sind nur mit dem GTR bestimmbar.
Bei Nullstellen ist unbedingt die Vielfachheit einer Nullstelle zu berücksichtigen, da diese Auswirkungen auf das Kurvenbild hat. Dazu wird zunächst eine allgemeine ganz-rationale Funktion betrachtet. Der Funktionsausdruck für eine solche Funktion lautet: $y = a_0x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$. Jede Funktion dieser Art lässt sich in Linearfaktoren ihrer Nullstellen zerlegen: $y = a_0 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_{n-1})(x-x_n)$
Dabei gilt:

1. $x_1, x_2 ,x_3,\dots x_n$ sind die Nullstellen der Funktion
2. <u>Jede</u> ganz-rationale Funktion n-ten Grades hat <u>genau</u> n Nullstellen
3. Einige dieser Nullstellen können komplexe Zahlen sein. Diese komplexen Nullstellen treten immer paarweise auf und wenn man die beiden Linearfaktoren dieser komplexen Nullstellen entsteht eine quadratischer Ausdruck, der nur reelle Zahlen enthält.

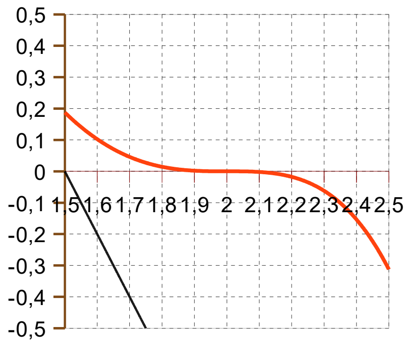
Aus diesen Merkmalen kann man schlussfolgern: Eine ganz-rationale Funktion n-ten Grades hat <u>höchsten</u> n <u>reelle</u> Nullstellen. Für komplexe Nullstellen bleiben statt zweier Linearfaktoren ein quadratischer Faktor stehen. Komplexe Nullstellen können im Kurvenbild nicht eingezeichnet werden !
Bei einer solchen Linearfaktorzerlegung kann es möglich sein, das ein Linearfaktor mehrfach auftritt. Einen solchen Effekt kann man bereits bei quadratischen Funktionen feststellen. Wenn man von der Funktion $y = x^2 – 2x+1$ die Nullstellen bestimmt stellt

man fest, dass die Diskriminante unter der Wurzel der quadratischen Lösungsformel (p-q-Formel) den Wert 0 hat. In diesem Fall gibt es eine doppelte Nullstelle und diese doppelte Nullstelle ist gleichzeitig der Scheitel der Parabel, der auf der x-Achse liegt. Die Linearfaktorzerlegung dieser Funktion würde dann lauten: $y = (x-1)^2$ und der Exponent an dem Linearfaktor gibt die Vielfachheit der Nullstelle an. Für mehrfache Nullstellen lassen sich folgende Aussagen treffen:

1. Je höher die Vielfachheit der Nullstelle, desto mehr schmiegt sich die Kurve an die x-Achse an und der Kurvenverlauf wird in der Umgebung der Nullstelle immer flacher.
2. Ist die Vielfachheit einer Nullstelle eine gerade Zahl, wird die x-Achse nicht geschnitten, sondern nur berührt. Die Funktion bleibt nach der Nullstelle auf der gleichen y-Seite, wie vor der Nullstelle. Es findet kein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte statt. Die Funktion hat dort zwangsläufig einen Extrempunkt, da die 1. Ableitung 0 sein muss. Diese Aussage lässt sich über die Produktregel beweisen! Die nebenstehende Abbildung zeigt das Bild einer vierfachen Nullstelle. Dabei ist bei der Skalierung der y-Achse zu berücksichtigen, das diese nur 1/10 der Skalierung der x-Achse beträgt. Bei gleicher Skalierung wäre nur eine waagerechte Linie zu erkennen.



3. Ist die Vielfachheit einer Nullstelle eine ungerade Zahl, dann wird die x-Achse geschnitten, aber die Funktion schmiegt sich auch dabei immer mehr der x-Achse an. Die Funktion hat dort (Vielfachheit größer oder gleich 3) einen Stufenwendepunkt, da neben der 1. Ableitung auch mindestens die 2. Ableitung gleich Null ist. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Bild einer dreifachen Nullstelle .



25.2.4. Verhalten für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$

Für eine ganze Reihe von Funktionen ist das Grenzverhalten für $x \to -\infty$ oder $x \to +\infty$ interessant. Das trifft für alle gebrochen-rationalen Funktionen zu, für Exponential- und Logarithmusfunktionen oder Produkte von Funktionen zu. Dabei interessiert nicht nur, ob die Funktion einem festen Grenzwert zustrebt. Interessant ist für eine Reihe von Funktionen die nach $+\infty$ oder $-\infty$ verlaufen, wie dieser Verlauf erfolgt. Dazu werden eventuelle Asymptoten zu den Funktionen bestimmt. Mehr dazu wird im Abschnitt Asymptoten ausgeführt.

25.2.5. Polstellen

Polstellen treten in erster Linie bei Funktionen mit Brüchen auf, also solchen Funktionen, die eine Zähler- und eine Nennerfunktion besitzen. Bei solchen Funktionen sind alle x-Werte, für die die Nennerfunktion gleich Null wird, eine potenzielle Polstelle. Das ist nur dann nicht der Fall, wenn gleichzeitig die Zählerfunktion auch eine Nullstelle hat. In solchen Fällen spricht man von Definitionslücken, da ein unbestimmter Ausdruck 0/0 entsteht. Dieser Ausdruck kann jeden beliebigen Wert entsprechen und bedarf gesonderter Untersuchungen – siehe dazu nächstes Kapitel.
Polstellen können aber auch ohne Funktionen mit Brüchen auftreten, da solche Funktionen wie tan x oder ln x von sich aus schon Polstellen mitbringen. Treten also solche Funktionen im Gesamtausdruck auf, ist grundsätzlich nach Polstellen zu suchen. Polstellen sind aus dem Definitionsbereich zu entfernen.

Für Polstellen ist die gleiche Unterscheidung, wie bei Nullstellen zu machen. Auch für Polstellen gibt es die Eigenschaft mehrfache Polstelle zu sein, was sich dadurch auszeichnet, dass bei der Linearfaktorzerlegung des Nenners Potenzen an den Linearfaktoren auftreten. Hier gilt ebenfalls, wie bei Nullstellen: Ist die Vielfachheit der Polstelle eine gerade Zahl, findet kein Vorzeichenwechsel statt. Das bedeutet, wenn die Funktion von der einen Seite einen Grenzwert $+\infty$ hat, dann auch von der anderen Seite. Bei ungeraden Polstellen ist ein Grenzwert immer $+\infty$ und ein Grenzwert immer $-\infty$.

25.2.6. Behebbare Definitionslücken

Behebbare Definitionslücken sind Stellen im Kurvenbild bei deren Berechnung unbestimmte Ausdrücke vorkommen. Die Bezeichnung rührt daher, dass der Wert nach den mathematischen Gesetzen zwar erlaubt ist, z.B. keine Division durch 0, aber durch normales Einsetzen des x-Wertes nicht eindeutig berechenbar. Zu solchen unbestimmten Ausdrücken gehören folgende Formen: $0/0$; 0^0; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; ∞/∞; 1^∞;
Solche Ausdrücke werden mit der Formel des d l'Hopital berechnet und auf die Form 0/0 zurückgeführt.

- Ausdrücke der Form 0/0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Das ist die Grundformel für unbestimmte Ausdrücke. Es wird nicht der Grenzwert der Funktionswerte betrachtet, sondern der Grenzwert der 1. Ableitungen. Dabei ist zu beachten, dass hier keine Quotientenregel zur Anwendung kommt, sondern Zähler und Nenner einzeln differenziert werden. Der Quotient, der beim Dividieren der 1. Ableitungen entsteht ist dann als Funktionswert an dieser Stelle zu setzen. Alle anderen unbestimmten Ausdrücke werden auf diese Form zurückgeführt. Deshalb wird bei der Angabe von unbestimmten Ausdrücken immer nur die Umwandlung in die Form 0/0 angegeben.

- Ausdrücke der Form ∞/∞

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ausdrücke der Form $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) * g(x)}}$$

Ausdrücke der Form $\infty * 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) * g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Ausdrücke der Form $0^0;\quad \infty^0;\quad 1^\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) * \ln(f(x))}$$

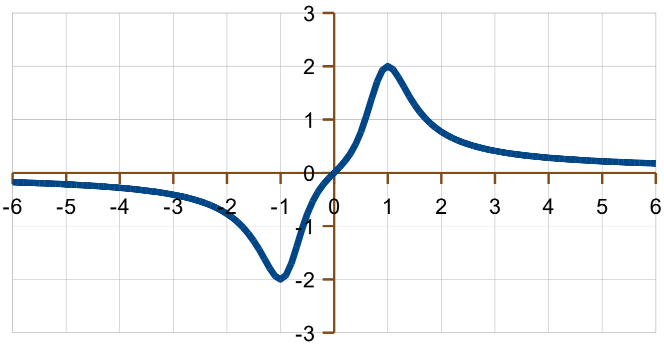
Im Exponent entsteht eine Funktion des Typs $\infty * 0$ die man gesondert betrachten kann und nach den oben angegebenen Umstellungen in 0/0 umwandeln kann. Das ist dann als Exponent der e-Funktion zu benutzen um den Funktionswert zu bestimmen.

25.2.7. Asymptoten

Asymptoten beschreiben das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$. Im weiteren Sinne werden Polstellen auch dazu gerechnet, für soll es aber um Grenzverhalten gehen. Nicht bei allen Funktionen kann man Asymptoten angeben, diese Funktionen haben schlichtweg keine Asymptoten. Zu diesen Funktionen z.B. gehören ganz-rationale Funktionen und Trigonometrische Funktionen. Asymptotisches Verhalten kann dagegen bei gebrochen-rationalen Funktionen und allen Funktionen, bei denen die e-Funktion mit enthalten ist, bestimmt werden.
Das größte und wichtigste Gebiet sind die gebrochen-rationalen Funktionen. Deshalb soll sich hier auf diese Typen beschränkt werden.

Gebrochen-rationale Funktionen sind gekennzeichnet, dass die Funktion durch einen Bruch dargestellt wir, bei dem im Zähler und Nenner eine ganz-rationale Funktion auftritt. Die entstehenden Asymptoten werden von der höchsten Potenz der der Zähler- und Nennerfunktion bestimmt. In Abhängigkeit von diesen Potenzen unterscheidet man mehrere Fälle.

25.2.7.1. Höchste Potenz im Zähler ist kleiner als im Nenner

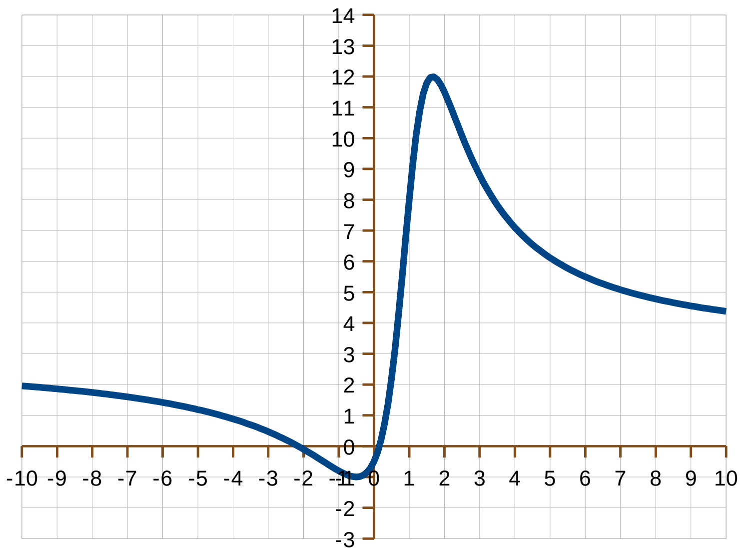


In diesen Fällen ist immer die x-Achse die Asymptoten für $x \to \pm\infty$. Ob sich die Funktion von der positiven y-Seite oder der negativen y-Seite der x-Achse nähert wird von den Vorzeichen der Koeffizienten vor den höchsten Potenzen bestimmt. Im nebenstehenden Beispiel ist die Zählerfunktion $y = x^3 + x$ und die Nennerfunktion $y = x^4 - x^2 + 1$. Für positive x-Werte ist der Quotient positiv, deshalb nähert sich die Funktion für $x \to +\infty$ der x-Achse aus positiver y-Richtung. Für negative x-Werte ist der Nenner wegen der ungeraden höchsten Potenz negativ, so dass der Quotient auch negativ ist. Die Funktion nähert sich von der negativen y-Seite der x-Achse.

25.2.7.2. Die höchste Potenz im Zähler und Nenner sind gleich

In diesem Fall ist die Asymptote eine waagerechte Linie zu x-Achse. Die Höhe der Linie – ist gleichzeitig der konstante y-Wert – wird durch den Quotienten der Koeffizienten vor den beiden höchsten Potenzen bestimmt.

Die Funktionsausdrücke der nebenstehenden Abbildung sind für den Zähler $y = 3x^2 + 6x - 1$ und für den Nenner $y = x^2 - 2x + 2$. Die Asymptote wird durch die Koeffizienten vor der höchsten Potenz im Zähler und Nenner bestimmt. Der Quotient der Koeffizienten ist 3. Deshalb ist die Gerade $y=3$ die Asymptote der gebrochen-rationalen Funktion.

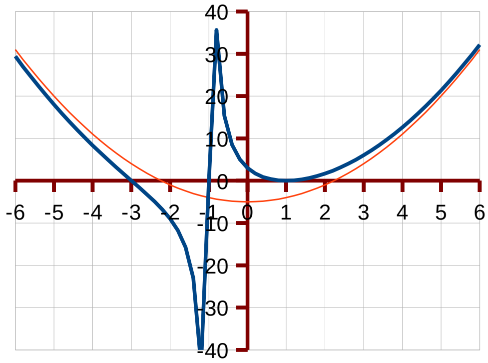


25.2.7.3. Die höchste Potenz im Zähler ist größer als im Nenner

In diesen Fällen ist eine Polynomdivision der Funktion durchzuführen. Die Gebrochen-rationale Funktion $G(x) = Z(x) / N(x)$ wird mittels Polynomdivision in eine neue Funktionsdarstellung überführt: $G(x) = P(x) + Z_2(x)/N(x)$. Es entsteht damit keine neuen Funktion, sondern nur eine andere Schreibweise.
Die Bestandteile der neuen Funktionsdarstellung ist eine Funktion $P(x)$, die eine ganz-rationale Funktion darstellt und meistens eine Zählerfunktion $Z_2(x)$, wenn die Polynomdivision nicht ohne Rest aufgeht. Diese Funktion ist dann wieder durch die ursprüngliche Nennerfunktion zu teilen und mittels Addition mit der ganz-rationalen Funktion $P(x)$ zu einem Funktionsausdruck zusammenzufügen.

Die bei dieser Polynomdivision entstehende Funktion P(x) ist die Asymptote der Funktion G(x).
Was ist darunter zu verstehen: Gebrochen rationale Funktionen dieser dritten Art haben für $x \to \pm\infty$ das Grenzverhalten, dass auch $y \to \pm\infty$ verläuft, also keinen endlichen Grenzwert. Aber dieser Verlauf ist nicht willkürlich sondern wird durch diese Polynomfunktion P(x) bestimmt, die bei der Polynomdivision entsteht.

In der nebenstehenden Abbildung ist die blaue Kurve eine gebrochen-rationale Funktion $y = (x+1)^2(x+3)/(x+1)$. Durch Polynomdivision entsteht eine ganz-rationale Funktion $y=x^2-5$, die hier rot eingezeichnet wurde. Man sieht sehr deutlich, das bereits ab den x-Werten ±6 eine Annäherung der beiden Funktionen erfolgt.
═► Die Funktion $y= x^2-5$ ist Asymptote der Funktion $y = (x+1)^2(x+3)/(x+1)$.



Der durch die Polynomdivision entstehende Restteil $Z_2(x)/N(x)$ nähert sich für wachsende x-Werte immer mehr dem Wert 0 an und spielt deshalb für das Kurvenbild eine immer geringer werdende Rolle.

25.3. Eigenschaften aus der Ableitung zu ermitteln

25.3.1. Monotonie

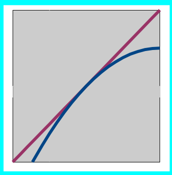
Das erste markante Verhalten der Funktion betrifft die Monotonie. Für diese Eigenschaft ist die erste Ableitung maßgebend.

Definition: Eine Funktion y=f(x) heißt **streng monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ gilt:

$\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$

oder

wenn ihre 1. Ableitung größer 0 ist.



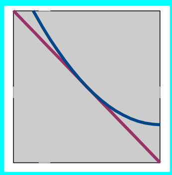
Eine monoton wachsende Funktion besitzt mit wachsenden x Werten auch wachsende y-Werte, die Funktionswerte werden immer größer. Monoton wachsende Kurvenabschnitte können sowohl bei links- als auch bei rechts-gekrümmten Kurventeilen auftreten. In diesen Kurvenabschnitten hat die Tangente einen positiven Anstieg.

Definition: Eine Funktion y=f(x) heißt **streng monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ gilt:

$\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$

oder

wenn ihre 1. Ableitung kleiner 0 ist.



Eine monoton fallende Funktion besitzt mit wachsenden x Werten fallende y-Werte, die Funktionswerte werden immer kleiner. Monoton fallende Kurvenabschnitte können sowohl bei links- als auch bei rechts-gekrümmten Kurventeilen auftreten. In diesen Kurvenabschnitten hat die Tangente einen negativen Anstieg.

Ist bei den Ungleichungen, oder bei den Ableitungen, auch das Gleichheitszeichen zugelassen spricht man nur von monoton wachsend oder fallend, ohne die Bezeichnung der *strengen* Monotonie.
Jetzt sind natürlich solche Punkte interessant, bei denen das Kurvenbild von monoton wachsenden Abschnitten nach monoton fallenden Abschnitten, oder umgekehrt, wechselt. Diese Punkte sind die sogenannten Extrempunkte einer Kurve.

Zusammenhang zwischen Monotonie und 1. Ableitung.

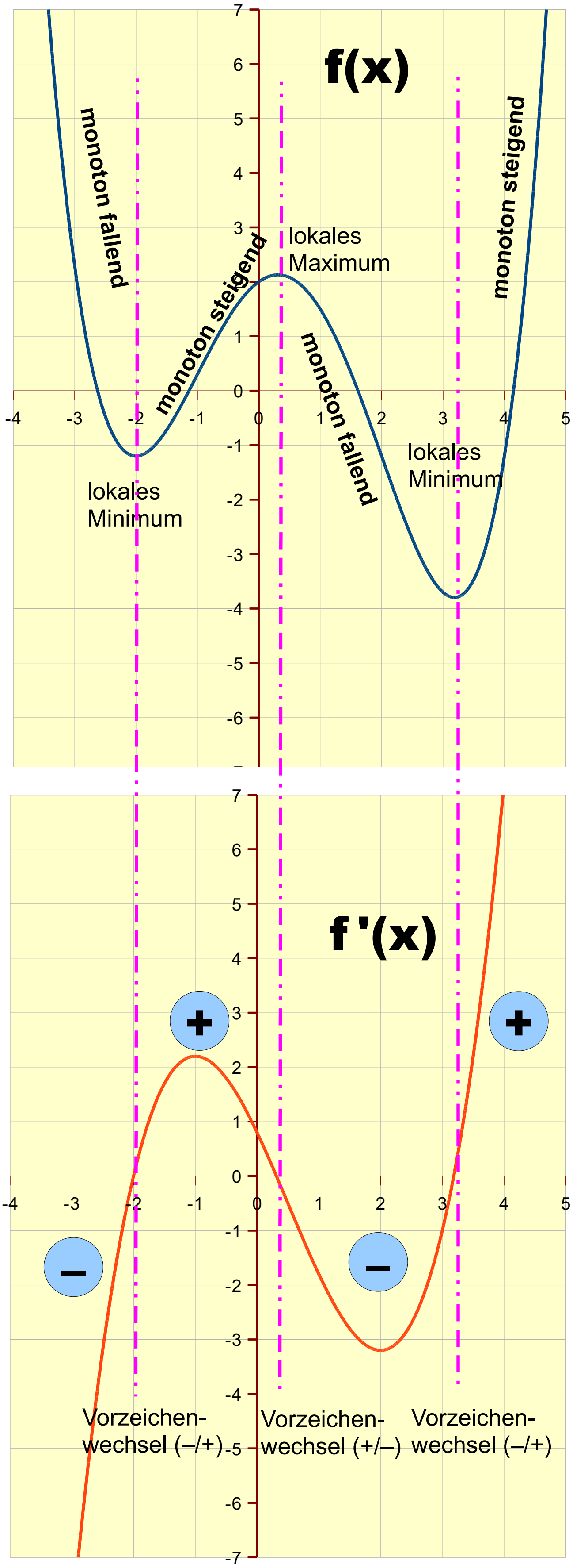
Die Anstiege m der Tangenten an die Funktion f(x) sind die Funktionswerte der Funktion f'(x).

monoton-fallende Funktionen

- haben negative Tangenten-anstiege und deshalb
- hat die Funktion f'(x) negative Funktionswerte.

monoton-steigende Funktionen

- haben positive Tangenten-anstiege und deshalb
- hat die Funktion f'(x) positive Funktionswerte.



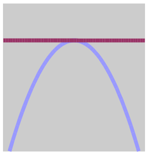
25.3.2. Hoch- und Tiefpunkte

Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion sind solche Punkte, in denen die Funktion gegenüber ihrer Umgebung einen maximalen oder minimalen Funktionswert einnimmt. Diese Eigenschaft maximaler oder minimaler Funktionswert zu sein gilt natürlich nicht immer für die gesamte Kurve, sondern nur für ein begrenztes Intervall. Die Größe dieses Intervall ist vom Kurvenverlauf abhängig und kann, wie bei einer Parabel, auch das gesamte Intervall des Definitionsbereiches umfassen.
Bei einem Hoch– oder Tiefpunkt wechselt die Funktion ihr Monotonieverhalten von monoton fallen nach monoton steigend, oder umgekehrt. Damit muss die 1. Ableitung ihr Vorzeichen wechseln, d.h. die 1. Ableitung **muss** an dieser Stelle gleich 0 sein. Aber nicht alle Stellen der Funktion, an denen die 1. Ableitung gleich Null ist sind ein Extrempunkt. Es kann Stellen in einer Funktion geben, bei denen die 1. Ableitung gleich Null ist, aber kein Extrempunkt vorliegt. Aus diesem Grund spricht man dabei von einer notwendigen Bedingung; bei Extrempunkten muss die 1. Ableitung Null sein, aber das reicht noch nicht aus, um eindeutig einen Extrempunkt zu identifizieren.

Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt:
Für einen Extrempunkt (Hoch- oder Tiefpunkt) der Funktion f(x) an einer Stelle x_0 ist, dass die 1. Ableitung gleich Null ist: $f'(x_0) = 0$

Um einen Extrempunkt eindeutig zu identifizieren ist die oben angegebene Bedingung des Vorzeichenwechsels der 1. Ableitung hinzuzuziehen. Erst dann kann man eindeutig von einem Extrempunkt sprechen. Dabei gilt es gleich die beiden Extrempunkte Hoch- und Tiefpunkt zu unterscheiden.

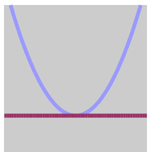
25.3.2.1. Hochpunkt



Bei einem Hochpunkt wechselt der Tangentenanstieg von monoton steigend zu monoton fallend und damit das Vorzeichen der 1. Ableitung von + nach – . Unter Benutzung der 2. Ableitung kann man ein weiteres Kriterium angeben. Aus dem nebenstehenden Kurvenverlauf kann man erkennen, dass die Funktion eine Rechtskrümmung durchführt. Hochpunkte können nur bei rechts-gekrümmten Kurven auftreten, deshalb kann man sagen, wenn die Kurven eine rechts-gekrümmte Kurve ist, ist der Extrempunkt ein Hochpunkt.

Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt:
Die 1. Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0 ist Null: $f'(x_0) = 0$
Die 1. Ableitung hat an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel von + nach –
oder
Die 2. Ableitung ist kleiner Null: $f''(x_0) < 0$

25.3.2.2. Tiefpunkt



Bei einem Tiefpunkt wechselt der Tangentenanstieg von monoton fallend zu monoton steigen und damit das Vorzeichen der 1. Ableitung von – nach + . Unter Benutzung der 2. Ableitung kann man ein weiteres Kriterium angeben. Aus dem nebenstehenden Kurvenverlauf kann man erkennen, dass die Funktion eine Linkskrümmung durchführt. Tiefpunkte können nur bei links–gekrümmten Kurven auftreten, deshalb kann man sagen, wenn die Kurven eine links–gekrümmte Kurve ist, ist der Extrempunkt ein Tiefpunkt.

Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt:

Die 1. Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0 ist Null: $f'(x_0) = 0$

Die 1. Ableitung hat an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel von – nach +

oder

Die 2. Ableitung ist größer Null: $f''(x_0) > 0$

25.3.3. Krümmung

Die Krümmung einer Kurve verändert ihren Tangentenanstieg. Eine Kurve, die keine Krümmung hat, hat immer den gleichen Tangentenanstieg – die Gerade. Also läuft die Krümmung mit der Veränderung des Tangentenanstiegs zusammen. Deshalb wird für die Krümmung von f das Verhalten von f' untersucht.

Dass der Begriff Krümmung nicht nur so aus der Luft gegriffen ist soll folgende Information – *die nicht zum Schulstoff gehört* – belegen. Für jeden Punkt $P_0(x_0|y_0)$ auf der Kurve einer Funktion lässt sich ein Kreis bestimmen der die Kurve in dem Kurvenpunkt berührt.

Diesen Kreis bezeichnet man als den Krümmungskreis der Funktion f(x) im Punkt P_0.

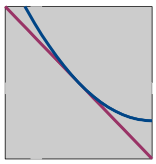
Der Radius diese Kreises berechnet sich aus:

$$r(x) = \frac{\sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)^3}}{f''(x)}$$

Der Kehrwert diese Radius wird als Krümmung k bezeichnet und es lässt sich damit eine Krümmungsfunktion k(x) zu jeder Funktion f(x) definieren.

25.3.3.1. Links-gekrümmte Kurven

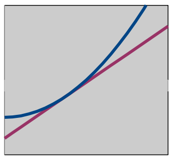
Als erstes soll eine links-gekrümmte Kurve betrachtet werden.Jeder Krümmungsbogen besteht aus zwei Teilen, einem, bei dem die Kurve steigt und einem, bei dem die Kurve fällt.



Es soll die links-gekrümmte Kurve von „links“ nach „rechts“ betrachtet werden, also in Richtung wachsender x-Werte. Damit ist der erste Kurventeil eine fallende Kurve. Die Werte der 1. Ableitung steigen von großen negativen Zahlen langsam zu kleinen negativen Zahlen, die Werte der 1. Ableitung sind also **steigend**, aber vom Wert her negativ. Wenn

- die Werte der Funktion (hier **1. Ableitung**) **steigend**, also monoton wachsen
- müssen die Werte der zugehörigen 1. Ableitung (hier die **1. Ableitung der 1. Ableitung** = 2. Ableitung von f) **positiv** sein.
- die absoluten Werte der 1. Ableitung sind negativ

Als nächstes soll der steigende Teil einer links-gekrümmte Kurve untersucht werden. Die Anstiege der Kurve sind positiv und steigen von kleinen positiven Werten zu größeren positiven Werten. Damit ist



- der Anstieg der **1. Ableitung steigend** ist.
- die **1. Ableitung der 1. Ableitung ist positiv** , weil 1. Ableitung steigend ist
- die absoluten Werte der 1. Ableitung sind positiv

Damit ist auch für diesen Teil die 2. Ableitung positiv.

Links-gekrümmte Kurvenabschnitte besitzen eine positive 2. Ableitung!

Merkregel: L **i** nks-gekrümmte Kurven haben pos **i** tive 2. Ableitung

Wenn links-gekrümmte Kurven von großen negativen Werten zu großen positiven Werte steigen, müssen irgendwann Werte auftreten, an denen die Steigung 0 ist. Diese Stellen sind diejenigen, an denen die 1. Ableitung gleich Null ist. Aus der Untersuchung der Krümmung muss man schlußfolgern:
Da eine links-gekrümmte Kurve von negativen Anstiegen zu positiven Anstiegen wechselt kann die Stelle an der der Tangentenanstieg Null ist nur ein Tiefpunkt sein.
Deshalb sollte man bei der Formulierung der hinreichenden Bedingung nicht sagen:

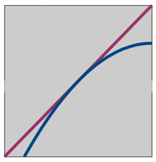
> Wenn die 2. Ableitung größer Null ist, ist der Extremwert ein Tiefpunkt, sondern
> Funktionen, deren 2. Ableitung positiv ist können als Extremwert nur einen Tiefpunkt besitzen.

Ein wichtiges Merkmal links-gekrümmter Kurven bezüglich ihrer Tangente ist:

Bei links-gekrümmten Kurven befindet sich die **Tangente** immer auf der **rechten Seite** der Kurve.

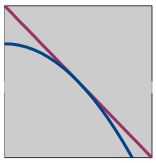
25.3.3.2. Rechts-gekrümmte Kurven

Auch bei rechts-gekrümmten Kurven existiert ein steigender und ein fallender Teil der Kurve. Es soll eine solche Kurve auch wieder von „links“ nach „rechts“ – für steigende x-Werte – betrachtet werden. Der Kurvenabschnitt beginnt mit einen steigenden Teil, wobei zunächst hohe positive Anstiege zu verzeichnen sind, die allmählich kleiner werden. Die 1. Ableitung ist in diesem Teil damit fallend, also



- die **1. Ableitung** von f, monoton **fallend**.
- also ist die **1. Ableitung der 1. Ableitung** = 2. Ableitung von f **negativ**.
- die Werte der 1. Ableitung selbst sind positiv.

Betrachtet man den anschließenden Teil, in dem die Kurve fällt. Die Tangentenanstiege wachsen von kleinen negativen Werten zu immer größer werdenden negativen Werten. Damit ist der Verlauf der 1. Ableitung weiter monoton fallend.



- die **1. Ableitung** von f, monoton **fallend**.
- also ist die **1. Ableitung der 1. Ableitung** = 2. Ableitung von f **negativ**.
- die Werte der 1. Ableitung selbst sind negativ

Damit ist auch für diesen Teil die 2. Ableitung negativ.

Rechts-gekrümmte Kurvenabschnitte besitzen eine negative 2. Ableitung!

Merkregel: R **e** chts-gekrümmte Kurven haben n **e** gative 2. Ableitung

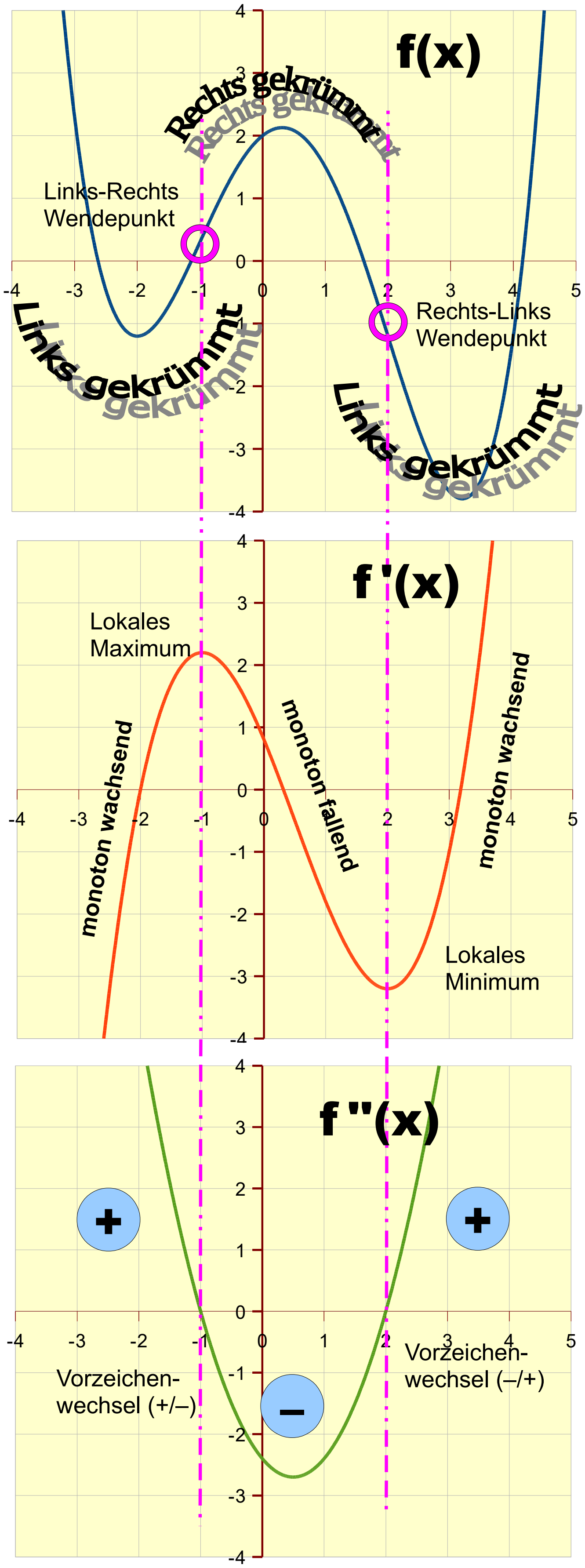
Für die Punkte des Übergangs vom positiven zum negativen Tangentenanstieg besitzt die Ausgangsfunktion f einen Extremwert und die 1. Ableitung eine Nullstelle. Analog zur Überlegung beim links-gekrümmten Kurven kann man hier sagen:

> Funktionen, deren 2. Ableitung negativ ist können als Extremwert nur einen Hochpunkt haben.

Ein wichtiges Merkmal rechts-gekrümmter Kurven bezüglich ihrer Tangente ist:

> Bei rechts-gekrümmten Kurven befindet sich die **Tangente** immer auf der **linken Seite** der Kurve.

25.3.3.3. Zusammenhang zwischen Krümmung, 1. Ableitung und 2. Ableitung



Links-gekrümmte Kurven

- haben mit steigenden x-Werten steigende Tangentenanstiege.
- deshalb ist die 1. Ableitung monoton wachsend
  und
- die 2. Ableitung, als 1. Ableitung der 1. Ableitung, größer 0.

Im Bild von großen negativen Tangentenanstiegen steigend über den Anstieg 0 bei x =–2 bis zu positiven Anstiegen bei x =–1. Danach ist der Tangentenanstieg zunächst noch größer 0, aber die Werte fallen wieder.

Rechts-gekrümmte Kurven

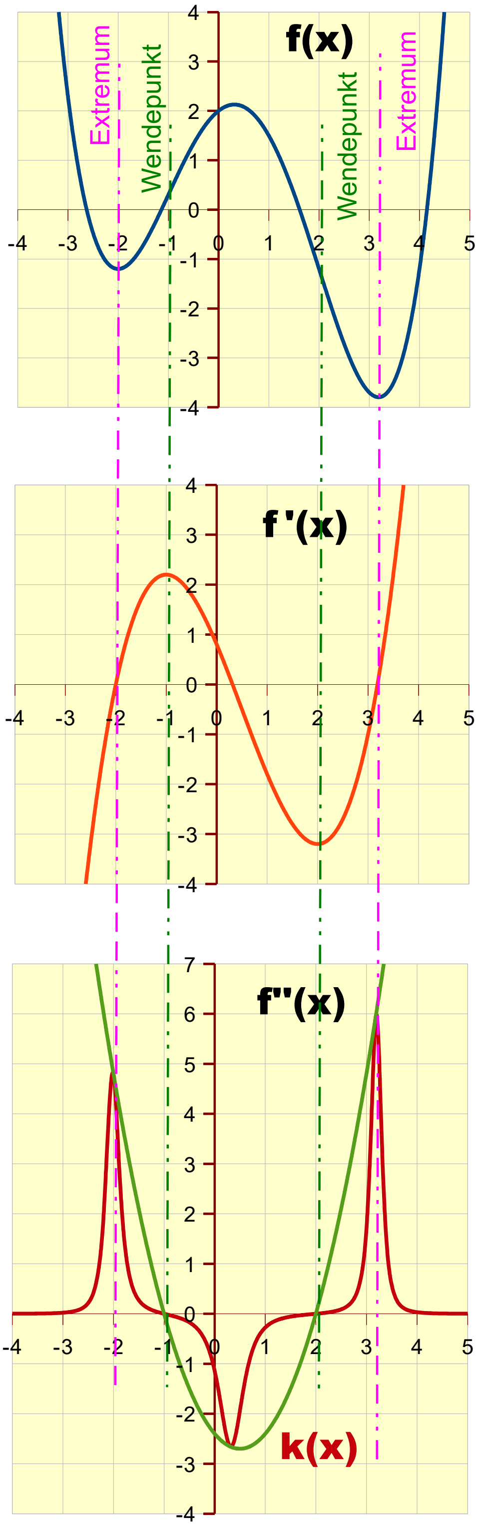
- haben mit steigenden x-Werten fallende Tangentenanstiege.
- deshalb ist die 1. Ableitung monoton fallend
  und
- die 2. Ableitung, als 1. Ableitung der 1.Ableitung kleiner 0.

Im Bild von positiven Tangentenanstiegen ab x=–1 über die 0 bei etwa x=0,3 anschließend negative Anstiege.

Die Extremwerte der 1. Ableitung in den Wendepunkten bedeuten, dass der Wendepunkt in seiner Umgebung den steilsten Tangentenanstieg hat, sowohl mit negativen wie auch im positiven Werten.

25.3.3.4. Extremwerte und Krümmung

(Dieses Thema ist nicht Bestandteil der schulischen Ausbildung)



Zu Beginn des Abschnittes über Krümmung wurde über den Zusammenhang des Funktionsbildes mit dem Begriff Krümmung bereits geschrieben. Dazu wurde die Formel des Krümmungsradius einer Funktion in Verbindung mit der 2. Ableitung angegeben. Den Kehrwert dieses Radius bezeichnet man dann tatsächlich als „Krümmung“ und man kann unter Benutzung der Formel für jede Funktion eine Krümmungsfunktion angeben. In diesem Abschnitt soll diese Krümmungsfunktion im Zusammenhang mit Extremwerten näher untersucht werden.
Die Formel für die Krümmungsfunktion

lautet: $$k(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)^3}}$$

Beim näheren Betrachten des Einflusses der 1. Ableitung f'(x) in dieser Formel fällt auf, dass die 1. Ableitung als Quadrat in diese Formel eingeht, dh. Vorzeichen der 1. Ableitung spielen keine Rolle. Der Wert ist immer positiv. Wenn der Wert aber immer positiv ist, heißt das auch, dass der Wert unter der Wurzel den kleinsten Wert annimmt, wenn f'(x)=0 ist. Die Werte, an denen f'(x) =0 ist, sind aber die Extremwerte der Funktion. Da der Wurzelausdruck im Nenner steht folgt daraus, je kleiner der Nenner wird, desto größer wird der Wert des Bruches. Also hat die Krümmungsfunktion ihren größten Wert an den Stellen an denen die Funktion Extremwerte besitzt. Das führt zu folgender Schlußfolgerung:

Eine Funktion f(x) hat in den Extremwerten ihre stärkste Krümmung.

Die pink farbige strich-punktierten Linien kennzeichnen die x-Werte, an denen ein Extremum vorhanden ist. Man erkennt in der Krümmungsfunktion deutliche Spitzen in diesen Punkten.
Im Gegensatz dazu hat die Funktion in ihren Wendepunkten keine Krümmung! (siehe nächstes Kapitel) Ist f''(x)=0, dann ist die Krümmung gemäß obiger Formel gleich 0. Die grünen Strich-punktierten Linien verbinden die x-Werte, an denen ein Wendepunkt vorhanden ist. Hier sieht man ebenfalls deutlich die Nullstellen der Krümmungsfunktion.

25.3.4. Wendepunkte

Analog zu den Stellen, an denen die Monotonie einer Kurve wechselt – Extremstellen – sind natürlich die Punkte einer Kurven interessant, an denen die Krümmung wechselt – Wendepunkt –. Dabei muss man berücksichtigen, dass sowohl eine Wechsel von links– nach rechts– gekrümmt, wie auch ein Wechsel von rechts– nach links– gekrümmt möglich ist. Damit stellt sich die frage, wie man man feststellen um welchen Wechsel der Krümmung es sich handelt.
Aus dem bisher dargelegten kann erst einmal grundsätzlich für einen solchen Wendepunkt eine notwendige Bedingung angegeben werden, wie sie für Extrempunkte angegeben wurde:

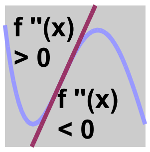
Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt:
Für einen Wendepunkt der Funktion f(x) an einer Stelle x_0 ist, dass die 1. Ableitung gleich Null ist: $f''(x_0) = 0$

Diese Aussage bedeutet, wenn die 2. Ableitung nicht Null ist, muss gar nicht weiter untersucht werden, ob es sich hier um einen Wendepunkt handelt.

25.3.4.1. Wendepunkt von links-gekrümmt nach rechts gekrümmt

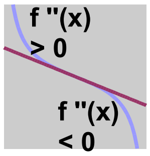
Da das Durchschreiten der Kurve immer in Richtung steigender x-Werte verläuft befindet man sich beim Übergang der links-gekrümmten Kurve in eine rechts-gekümmten Kurve bei einem Wechsel der 2. Ableitung von positiven Werten nach negativen Werten.

Dabei kann dieser Wechsel vom steigenden Teil einer Linkskrümmung in den steigenden teil einer Rechtskrümmung verlaufen,



oder

durch einen Wechsel des fallenden Teils einer Linkskrümmung in den fallenden Teil einer Rechtskrümmung übergehen.



Die 2. Ableitung wechselt ihr Vorzeichen von plus nach minus, was einem Extremwert der 1. Ableitung entspricht, da die 1. Ableitung der 1. Ableitung = 2. Ableitung dort eine Nullstelle hat, bei der die 1. Ableitung einen Extremwert besitzt. Man kann noch mehr sagen: Bei einem Vorzeichenwechsel von plus nach minus muss die **1. Ableitung** dort einen **Hochpunkt** besitzen (siehe Verhalten von f im Verbindung zu f').

> Wenn eine Funktion einen Hochpunkt besitzt, ist die 1. Ableitung dieser Funktion gleich Null und die 2. Ableitung dieser Funktion ist kleiner Null.

Wendet man diese Aussage auf die 1. Ableitung einer Funktion an, so heißt das:

> Wenn eine 1. Ableitung einen Hochpunkt besitzt, ist die 2. Ableitung dieser Funktion gleich Null und die 3. Ableitung dieser Funktion ist kleiner Null.

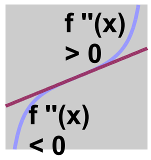
Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt von links-gekrümmter zu rechts- gekrümmter Kurve:

Die 2. Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0 ist Null: $f''(x_0) = 0$
Die 2. Ableitung hat an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel von + nach –
oder
Die 3. Ableitung ist kleiner Null: $f'''(x_0) < 0$

25.3.4.2. Wendepunkt von rechts-gekrümmt nach links-gekrümmt

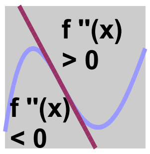
Bei dieser Art eines Wendepunktes erhält man bei der 2. Ableitung einen Wechsel von negativen Werten der 2. Ableitung zu positiven Werten der 2. Ableitung.

Dabei kann auch dieser Wechsel vom steigenden Teil einer Rechtskrümmung in den steigenden Teil einer Linkskrümmung verlaufen,



oder

durch einen Wechsel des fallenden Teils einer Rechtskrümmung in den fallenden Teil einer Linkskrümmung übergehen.



Die 2. Ableitung wechselt ihr Vorzeichen von minus nach plus, was einem Extremwert der 1. Ableitung entspricht, da die 1. Ableitung der 1. Ableitung = 2. Ableitung dort eine Nullstelle hat, bei der die 1. Ableitung einen Extremwert besitzt. Man kann noch mehr sagen: Bei einem Vorzeichenwechsel von minus nach plus muss die **1. Ableitung** dort einen **Tiefpunkt** besitzen (siehe Verhalten von f im Verbindung zu f').

Wenn eine Funktion einen Tiefpunkt besitzt, ist die 1. Ableitung dieser Funktion gleich Null und die 2. Ableitung dieser Funktion ist größer Null.

Diese Aussage analog der vorigen Untersuchung umgesetzt führt zu folgender Bedingung:

Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt von rechts-gekrümmter zu links- gekrümmter Kurve:
Die 2. Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0 ist Null: $f''(x_0) = 0$
Die 2. Ableitung hat an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel von – nach +
oder
Die 3. Ableitung ist größer Null: $f'''(x_0) > 0$

Allgemein gilt also für Wendepunkte, dass die 3. Ableitung ungleich Null sein muss.

Jetzt erhebt sich die Frage, was wird mit solchen Punkten, bei denen die 1. Ableitung gleich Null, auch die 2. Ableitung gleich Null, auch die 3. Ableitung gleich Null usw. Für solche Punkte gilt folgende Aussage:

Ist die erste **von Null verschiedene Ableitung**
- eine **gerade Ableitung**, dann handelt es sich um einen **Extrempunkt**,
- eine **ungerade Ableitung**, dann handelt es sich um einen **Wendepunkt**.

Das ist eine Verallgemeinerung dafür, dass es sich bei der 2. Ableitung um einen Extrempunkt und bei der 3. Ableitung um einen Wendepunkt handelt.

25.3.5. Wendetangente

Die Wendetangente wird nicht immer in einer Kurvendiskussion verlangt, und sollte auch, wenn es um Zeit geht, wie bei Arbeiten, nicht berechnet werden. Für das Zeichnen des Kurvenbildes kann sie aber wertvolle Hinweise geben.
Was ist eine Wendetangente ?

Es ist die Tangente im Wendepunkt.

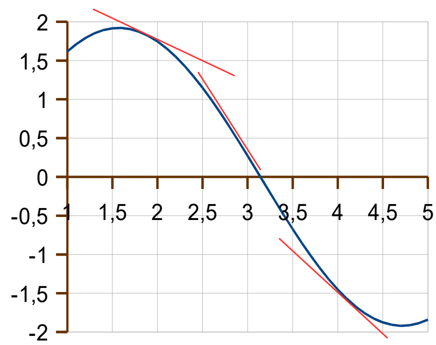
Wie kommt man zu einer Wendetangente ?

- nach der Bestimmung des x-Wertes für einen Wendepunkt bestimmt man den y-Wert des Punktes.
- den x-Wert des Wendepunkts setzt man in die 1. Ableitung ein und erhält damit den Tangentenanstieg der Kurve in dem Wendepunkt.
- mit den x-y-Werten des Wendepunkts und dem Anstieg der Tangente im Wendepunkt erstellt man über die Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung die Gleichung der Tangente.

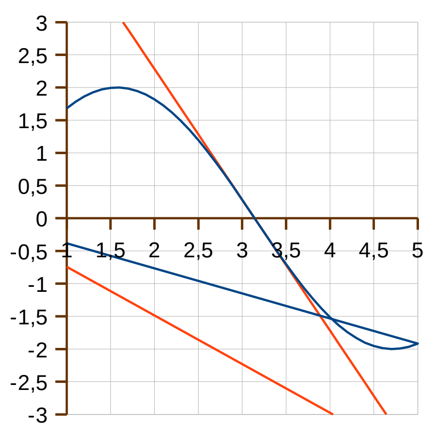
An Wendepunkten wechselt nicht nur die Krümmung der Kurve, sondern auch die lage der Tangente. Da jeder Krümmung eindeutig die Lage der Tangente zugeordnet ist, muss die Tangente von einer Seite der Kurve auf die andere Seite wechseln. Das führt zu einer bemerkenswerten Eigenschaft eines Wendepunkts.

> Wendepunkte sind die einzigen Punkte einer Kurve, bei der die Tangente die Kurve schneidet.

Bei dieser Aussage geht es natürlich nicht darum, dass jede Tangente die Kurve in großer Entfernung schneiden kann, sondern es geht um ein kleines Intervall in der Umgebung des Berührungspunktes der Tangente mit der Kurve. In dieser Umgebung darf kein Schneiden der Tangente mit der Kurve stattfinden, sonst ist e keine Tangente.



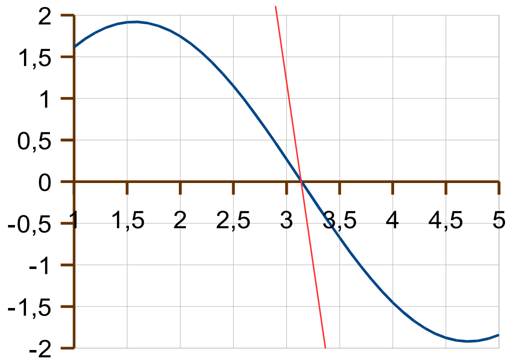
Die wichtigste Eigenschaft die eine Tangente auszeichnet, ist die, dass sie die Kurve in dem Punkte nur berührt und nicht schneidet. Daher hat sie ihren Namen: Tangente. Das bedeutet, dass die Tangente links und rechts vom Berührungspunkt immer auf der gleichen Seite der Kurve liegt.



Bei einem Wendepunkt **muss** die Tangente die Kurve genau in dem Berührungspunkt schneiden.
Bis zum Wendepunkt ist die Kurve rechts gekrümmt, also liegt die Tangente links von der Kurve. Im Wendepunkt ist die Krümmung der Kurve 0 (da y"=0 = keine Krümmung)

Keine Krümmung hat aber nur eine Gerade. Im Wendepunkt entspricht die Kurve einer Geraden und nach dem Wendepunkt ist die Kurve links gekrümmt, also muss die Tangente rechts von der Kurve liegen. Das schafft die Tangente nur, wenn sie im Wendepunkt die Kurve scheidet.
Damit könnte man sagen: Die Wendetangente scheidet nicht die Kurve, sondern im Wendepunkt sind Kurve und Tangente identisch, wie es bei jeder Geraden der Fall ist. Links und Rechts des Wendepunkts haben alle Tangenten wieder die Eigenschaft, dass sie die Kurve nicht schneiden.

Wenn man also die Wendetangente berechnet und zeichnet, dann muss der Kurvenverlauf auf der einen Seite der Tangente komplett unterhalb der Tangente und auf der anderen Seite komplett über der Tangente verlaufen, wobei Tangente und Kurve im Wendepunkt tatsächlich identisch verlaufen müssen.



Wenn die Kurve das Aussehen links hätte und die Wendetangente wäre die rot eingezeichnete Gerade, dann sollte es hier den vollen Punktabzug geben, da die Kurve nicht annähernd tangentiales Verhalten zur Tangente aufweist. Wie so etwas auszusehen hat, ist in der oberen Zeichnung dargestellt. Wird die Wendetangente nicht verlangt, ist das genaue Kurvenverhalten nicht weiter zu ermitteln und die Kurve wird dann auch so akzeptiert, wie sie gezeichnet wurde, wenn sie die Extrema und Nullstellen korrekt wiedergibt.

25.3.6. Kurvenbild

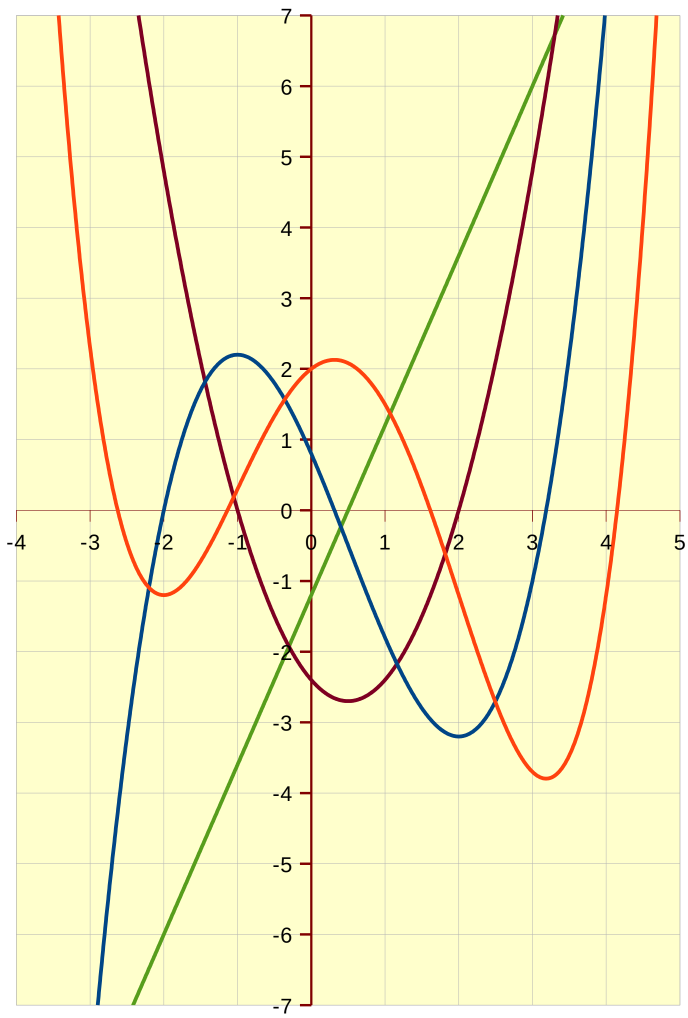
Zum Zeichnen des Kurvenbildes werden zunächst alle berechneten Punkte: Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Polstellen Asymptoten gezeichnet und dann die Punkte so miteinander verbunden, dass sie keinen Widerspruch zu den berechneten Werten ergeben. Bei Funktionen, die wenig solche Anhaltspunkte geben – Funktionen müssen ja keine Wendepunkte haben und können trotzdem mehrere Extrempunkte besitzen – kann eine zusätzliche Wertetabelle nützlich sein.

25.4. Darstellung der Zusammenhänge an einem Beispiel

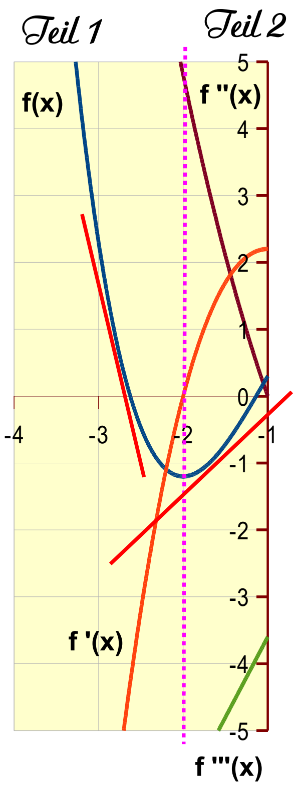
Die nachfolgende Untersuchung wurde an einer realen Funktion durchgeführt, auch wenn hier die Funktionsgleichung keine Rolle spielt. In den Kurvenbildern sind jeweils

- die Ausgangsfunktion (blaue Linie),
- die 1. Ableitung (rote Linie),
- die 2. Ableitung (braune Linie) und
- die 3. Ableitung (grüne Linie) angegeben.

Die Erklärungen zu den einzelnen Kurventeilen können somit unmittelbar verglichen werden.
Die folgenden Kapitel untersuchen genau diese Funktion und ihre Ableitung nach bestimmten Abschnitten, die dadurch gekennzeichnet sind, dass entweder die 1. Ableitung oder die 2. Ableitung eine Nullstelle besitzen. Dabei werden alle Zwischenräume analysiert um zu zeigen, wie sich Funktion und Ableitungen in diesen Intervallen verhalten und welche Zusammenhänge bestehen.



25.4.1. Teil 1 und Teil 2



Teil 1:
Die erste Ableitung (rote Linie) < 0
→ Tangentenanstieg negativ
Werte negativ steigen zu 0 (werden größer!) ⇒
Ausgangsfunktion monoton fallend→ erste Ableitung monoton wachsend
→ Tangentenanstiege werden flacher

Die zweite Ableitung (braune Linie) > 0
⇒ Ausgangsfunktion links gekrümmt
→ Tangente liegt rechts von der Kurve (beim Durchschreiten der Kurve von – ∞ nach + ∞ beschreibt man eine Kurve um seinen linken Arm). Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist sie größer 0
→ erste Ableitung monoton wachsend

Wechsel Teil 1 nach Teil 2
Erste Ableitung = 0
⇒ Ausgangsfunktion Extremwert
→ Wechsel der ersten Ableitung von negativ nach positiv
→ Änderung des Tangentenanstiegs von negativ nach positiv

zweite Ableitung (braune Linie) > 0
⇒ Ausgangsfunktion links gekrümmt
→ links gekrümmte Funktionen können als Extremwert nur ein Minimum haben

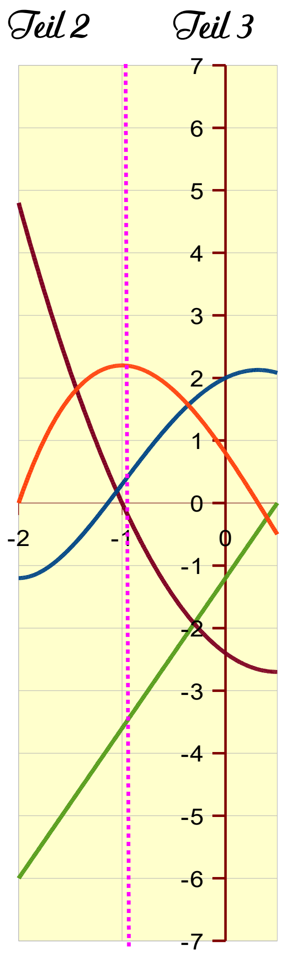
Teil 2:

Die erste Ableitung > 0
→ Tangentenanstieg positiv; Werte positiv steigend
→ Tangentenanstiege werden steiler
⇒ Ausgangsfunktion monoton wachsend

Die zweite Ableitung (braune Linie) > 0
→ Kurvenkrümmung bleibt erhalten
→ Tangente liegt immer noch rechts von der Kurve
⇒ Ausgangsfunktion links gekrümmt

Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist sie immer noch größer 0
→ erste Ableitung weiter monoton wachsend

25.4.2. Übergang von Teil 2 nach Teil 3 und Teil 3



Wechsel Teil 2 nach Teil 3:

Zweite Ableitung = 0
⇒ Ausgangsfunktion **Wende**punkt
Für den Funktionsgraphen heißt das: An diesem Punkt gibt es keine Krümmung !

Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist sie = 0
→ erste Ableitung hat einen Extremwert
→ da die erste Ableitung bis jetzt steigend war, kann der Extremwert für die erste Ableitung nur ein Maximum sein, ab jetzt ist die erste Ableitung fallend

Dritte Ableitung (grüne Linie) < 0
→ **Wende** von konvexer nach konkave Krümmung
→ **Wende** der Tangente rechts von der Kurve nach links von der Kurve (der Wendepunkt ist der einzige Punkt einer Funktion, wo die Tangente die Funktion schneidet)
→ Im Wendepunkt hat die Kurve den (betragsmäßig) steilsten Anstieg, weil die erste Ableitung einen Extremwert hat.

Als erste Ableitung der zweiten Ableitung ist sie < 0
→ zweiten Ableitung monoton fallend

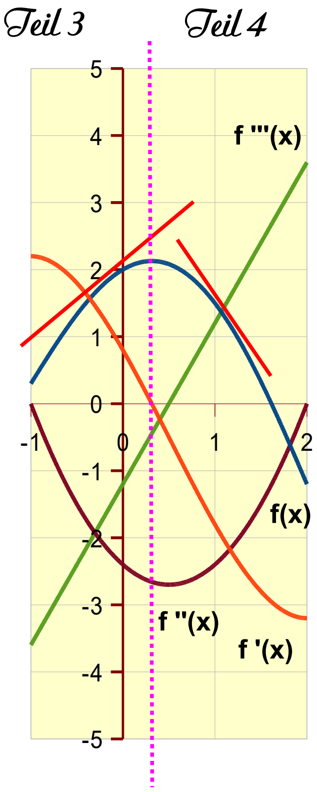
Als zweite Ableitung der ersten Ableitung ist sie < 0
→ ersten Ableitung rechts gekrümmt, der Extremwert der ersten Ableitung kann nur ein Maximum sein

Teil 3:
Die erste Ableitung > 0
→ Tangentenanstieg positiv,
⇒ Ausgangsfunktion monoton wachsend
Werte positiv, aber fallend → Tangenten werden flacher

Die zweite Ableitung (braune Linie) < 0
⇒ Ausgangsfunktion konkav oder rechtsgekrümmt
→ Tangente liegt links von der Kurve (beim Durchschreiten der Kurve von – ∞ nach + ∞ beschreibt man eine Kurve um seinen rechten Arm)

Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist sie < 0
→ ersten Ableitung monoton fallend

25.4.3. Übergang von Teil 3 nach Teil 4 und Teil 4



Wechsel Teil 3 nach Teil 4:

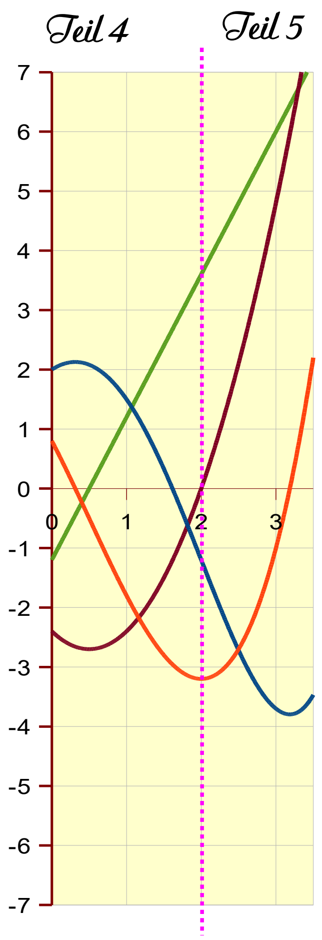
Erste Ableitung = 0
⇒ Ausgangsfunktion Extremwert
Wechsel der ersten Ableitung von positiv nach negativ
→ Änderung des Tangentenanstiegs von positiv nach negativ
⇒ Ausgangsfunktion Maximum

Zweite Ableitung < 0; Keine Änderung
→ keine Änderung Krümmungsverhalten, Ausgangsfunktion bleibt rechts gekrümmt
→ rechts gekrümmte Kurven können als Extremwert nur ein Maximum haben
Als erste Ableitung der ersten Ableitung
→ ersten Ableitung monoton fallend

Teil 4:
Die erste Ableitung < 0
⇒ Ausgangsfunktion monoton fallend
→ Tangentenanstieg negativ, Werte negativ fallend (Bedeutet der Betrag des Wertes wird größer)
→ Tangenten werden mit negativem Anstieg steiler

Die zweite Ableitung (braune Linie) < 0
⇒ Ausgangsfunktion rechts gekrümmt
→ Tangente liegt links von der Kurve
Als erste Ableitung der ersten Ableitung
→ ersten Ableitung monoton fallend

25.4.4. Übergang von Teil 4 nach Teil 5 und Teil 5



Wechsel Teil 4 nach Teil 5:

Zweite Ableitung (braune Linie) = 0
⇒ Ausgangsfunktion **Wende**punkt

Erster Ableitung: Keine Änderung, weiterhin negativ
→ keine Änderung Tangentenanstieg, weiter negativ

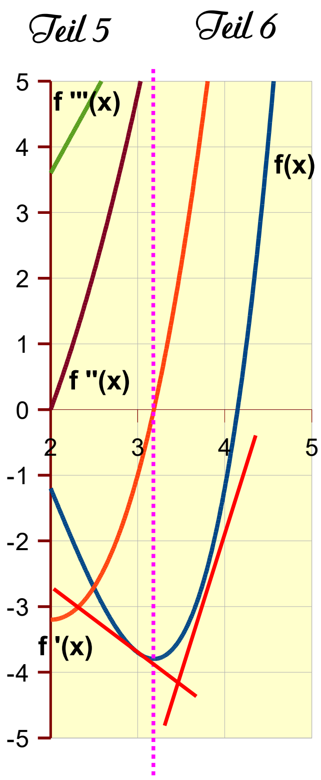
Dritte Ableitung (grüne Linie) > 0
→ **Wende** von rechts gekrümmt nach links gekrümmt
→ **Wende** der Tangente links von der Kurve nach rechts von der Kurve→ Im Wendepunkt hat die Kurve den steilsten (hier negativen) Anstieg, weil die erste Ableitung einen Extremwert hat, hier Minimum. Der steilste Anstieg ist immer als größter Betrag ohne Vorzeichen zu sehen.

Als erste Ableitung der zweiten Ableitung ist sie > 0
→ zweiten Ableitung monoton steigend

Als zweite Ableitung der ersten Ableitung ist sie > 0
→ ersten Ableitung links gekrümmt, der Extremwert der ersten Ableitung kann nur ein Minimum sein.

Teil 5:
Die erste Ableitung < 0
→ Tangentenanstieg negativ
⇒ Ausgangsfunktion monoton fallend
→ Werte negativ, aber steigend,Tangentenanstiege werden flacher (Betragsmäßig kleiner)

25.4.5. Übergang von Teil 5 nach Teil 6 und Teil 6



Wechsel Teil 5 nach Teil 6:

Erste Ableitung = 0
⇒ Ausgangsfunktion Extremwert
Wechsel der ersten Ableitung von negativ nach positiv
→ Änderung des Tangentenanstiegs von negativ nach positiv
→ Extremwert kann nur eine Minimum sein
zweiten Ableitung > 0; keine Änderung
⇒ Ausgangsfunktion keine Änderung, Kurve bleibt links gekrümmt
→ links gekrümmte Kurven können als Extremwert nur ein Minimum haben

Teil 6:

Erste Ableitung > 0
→ Tangentenanstieg positiv
⇒ Ausgangsfunktion monoton steigend

Die zweite Ableitung (braune Linie) > 0
⇒ Ausgangsfunktion links gekrümmt
→ Tangente liegt rechts von der Kurve

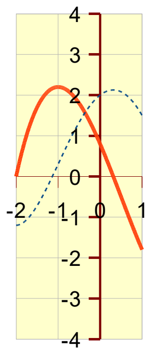
Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist sie > 0
→ ersten Ableitung monoton steigend

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, wie man von einer Funktion zu den Ableitungen gelangen kann und welche Eigenschaften von den Ableitungsfunktionen zu erwarten sind. Eine interessante Aufgabestellung ist jetzt auch die Frage der Umkehrung. Wenn man die Ableitungsfunktionen kennt, wie kann man dann aus das Verhalten der Ausgangsfunktion rückwärts schließen. Um dieses Problem rechnerisch zu lösen benötigt man die Regeln der Integralrechnung, die in einem gesonderten Teil besprochen werden. Hier soll es darum gehen, was kann man aus dem Kurvenbild der 1. Ableitung für die Ausgangsfunktion entnehmen, ohne dass der analytische Ausdruck der 1. Ableitung bekannt ist. (*Übliche Aufgabestellung in Abituraufgaben*)

25.4.6. Schließen von der Ableitung auf die Funktion

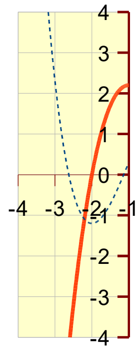
Wie nutzt man die Aussagen der Ableitung für die Eigenschaften der Ausgangsfunktion. In den folgenden Grafiken ist die 1. Ableitung als rote Linie gezeichnet und die zugehörige Ausgangsfunktion als dünne blaue Linie.

(a)1.



Bereich –2< x <0,4

(a)2.

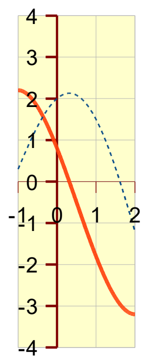


Bereich –4< x <–2

a) Das Vorzeichen von f '(x)

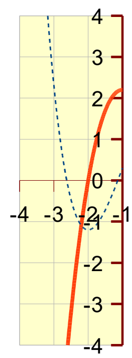
1.) f ´(x) > 0 ➡ f(x) ist monoton steigend
2.) f ´(x) < 0 ➡ f(x) ist monoton fallend

(b)1.



Bereich –1< x <2

(b)2.



Bereich –4< x <0

b) Die Monotonie von f '(x)

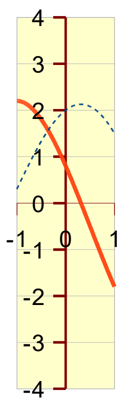
1.) f ´(x) fällt streng monoton ➡ f(x) ist rechts gekrümmt
(Wende die Aussage (a) auf die 1. Ableitung an:)
➡ f '(x): streng monoton fallend
➡ (f '(x))' = f ''(x): < 0
➡ f(x): rechts gekrümmt

2.) f ´(x) wächst streng monoton ➡ f(x) ist links gekrümmt
➡ f '(x): streng monoton wachsend
➡ (f '(x))' = f ''(x): > 0
➡ f(x): links gekrümmt

c) Das asymptotische Verhalten von f '(x)

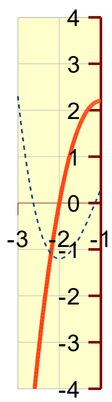
f ´(x) strebt gegen Null ➡ f(x) hat waagrechte Asymptote
f ´(x) strebt gegen konstanten Wert ➡ Die Asymptote ist eine Gerade
f ´(x) hat senkrechte Asymptote ➡ f(x) hat senkrechte Asymptote
f '(x) → +∞ für x → +∞ dann auch f(x) → +∞
f '(x) → –∞ für x → +∞ dann auch f(x) → –∞
f '(x) → +∞ für x → –∞ dann auch f(x) → –∞
f '(x) → –∞ für x → –∞ dann auch f(x) → +∞
(Achtung! Für x → –∞ dreht sich das Verhalten von f '(x) und f(x)

(d)1.



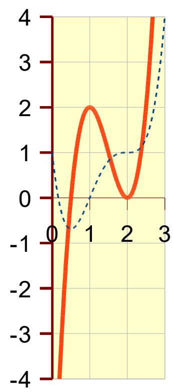
x = 0,4

(d)2.



x = –2

(d)3.



x = 2

d) Die Nullstellen von f '(x)

Einfache Nullstellen von f ´(x) ➡ Extrempunkte von f(x)

1. Nullstelle von f ´(x), schneidet x-Achse von + nach –
➡ Hochpunkt von f(x)
2. Nullstelle von f ´(x), schneidet x-Achse von - nach +
➡ Tiefpunkt von f(x)
3. Nullstelle von f ´(x), berührt x-Achse (Extrempunkt von f ´(x))
➡Sattelpunkt von f(x)

(Kein Extremwert von f, weil der Funktionswert von f'(x) positiv bleibt, für einen Extremwert muss der Tangentenanstieg wechseln – Deshalb Wendepunkt, auch deshalb, weil f'(x) durch die Berührung einen Extremwert hat und die erste Ableitung von f '(x) = f ''(x) = 0 sein muss)

Bei den folgenden Funktionsbildern ist auch die 2. Ableitung als braune Linie eingezeichnet.

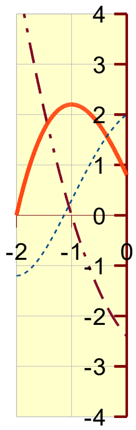
e) Die Extrema von f '(x)

Extrempunkt von f ´(x) ➡ Wendepunkt von f(x)

1. Anstieg von f ´(x), wechselt von + nach –
   - ➡ f '(x): Hochpunkt
   - ➡ f(x): Wechsel von links nach rechts gekrümmt
   - ➡ f ''(x): Hochpunkt von f '(x), erste Ableitung von f '(x) (=f ''(x)) wechselt von + nach –
     ➡ Wendepunkt 1

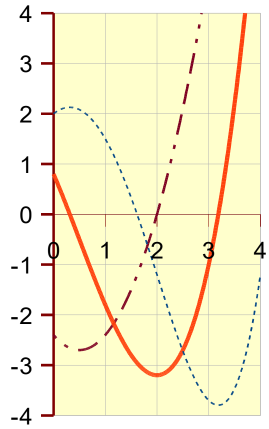
2. Anstieg von f ´(x) wechselt von - nach +
   - ➡ f '(x): Tiefpunkt
   - ➡ Wechsel von rechts nach links gekrümmt
   - ➡ f ''(x): Tiefpunkt von f '(x), erste Ableitung von f '(x) (=f ''(x)) wechselt von – nach +
     ➡ Wendepunkt 2

(e)1.



x = –1

(e)2.



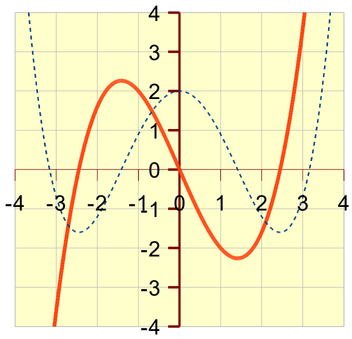
x = 2

(Die Vorzeichen der Tangentenanstiege ändern sich nicht, aber die Beträge entwickeln sich im Fall 1. zu einem Maximum und im Fall 2 zu einem Minimum, dh. im Wendepunkt hat die Funktion betragsmäßig den größten Anstieg: = f '(x) hat einen Extremwert)

f) Symmetrieeigenschaften von f(x) aus f '(x) bestimmen:

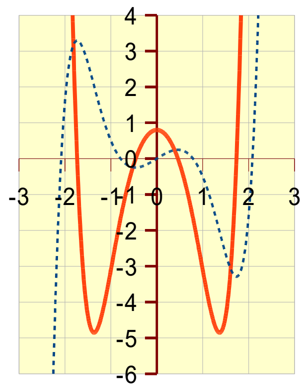
1. f '(x) punktsymmetrisch zum Ursprung
   ➡ f (x) symmetrisch zur y -Achse
   (Für die Achsensymmetrie muss der Tangentenanstieg links und rechts von der y-Achse betragsmäßig gleich sein, aber mit dem anderen Vorzeichen. Außerdem muss die Ausgangsfunktion einen Extremwert haben und somit f '(x) eine Nullstelle)

(f)1.



2. f '(x) achsensymmetrisch zur y–Achse
   ➡ f(x) punktsymmetrisch zum Ursprung.
   (Für Punktsymmetrie sind die Tangentenanstiege links und rechts vom Symmetriepunkt gleich und die Funktion muss an dieser Stelle einen Wendepunkt haben, also f '(x) einen Extremwert.)

(f)2.

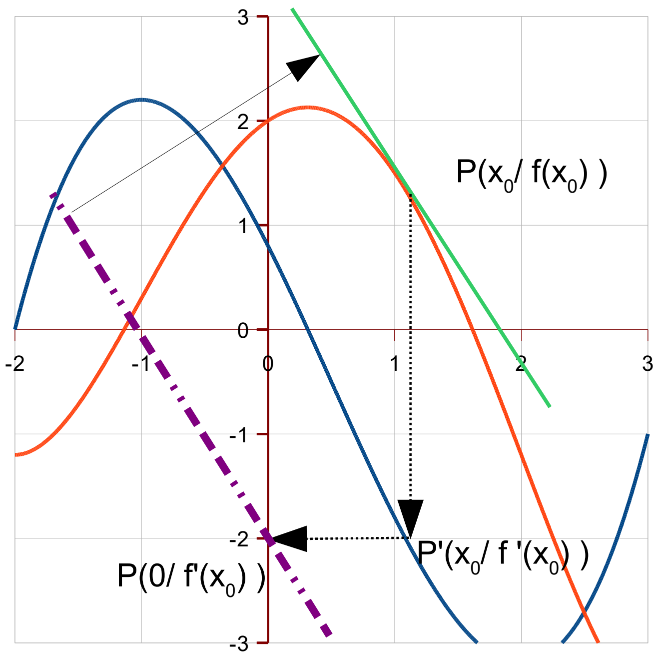


Aus den Ableitungen nicht zu bestimmen sind:

1. Schnittpunkte mit der x- oder y-Achse
2. Verlauf der Kurve durch einen beliebigen Punkt im Koordinatensystem
3. Ob die Funktionswerte an einer Stelle größer oder kleiner 0 sind.
4. Der Wert der waagerechten Asymptote kann aus der Tatsache, dass eine solche existiert nicht ermittelt werden, deshalb kann nicht entschieden werden, ob die x-Achse eine Asymptote ist.

25.4.7. Konstruktion der Tangente aus der Ableitungsfunktion

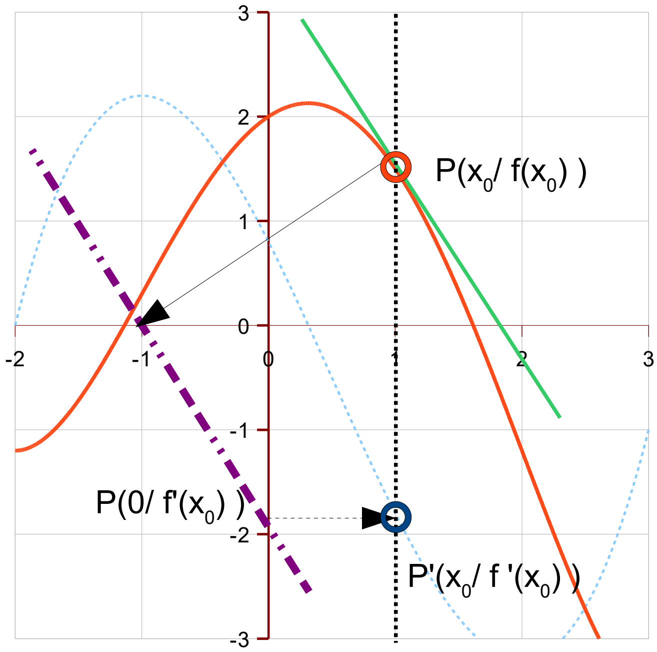
Wenn das Kurvenbild der Funktion und der 1. Ableitung (zeichnerisch) gegeben sind, dann ist es möglich die Tangente an einen Kurvenpunkt zu konstruieren. Im folgenden ist die Kurven die rote Linie und die 1. Ableitung die blaue Linie.



Man erzeugt eine Parallele zur y – Achse im Punkt x_0 und bestimmt den Schnittpunkt dieser Parallelen mit dem Kurvenbild der 1. Ableitung und gelangt so zum Punkt P'(x_0/f'(x_0)). Von diesem Punkt zieht man eine Parallele zur x – Achse bis auf die y-Achse und erhält so den Punkt P(0/f'(x)). Von diesem Schnittpunkt mit der y- Achse wird eine Gerade zum Punkt (0/–1) der x – Achse. Damit hat man eine Parallele zur Tangente erzeugt, die nur noch an die Kurve parallel verschoben werden muss.
(Bei dieser Konstruktion wird ausgenutzt, dass beim Steigungsdreieck die y–Differenz zweier Geradenpunkte dem Anstieg entspricht, wenn die x–Differenz gleich 1 ist.)

25.4.8. Konstruktion der 1. Ableitung aus den Tangenten an eine Kurve

Interessanter als der vorherige Abschnitt ist die Frage, wie kann man zur 1. Ableitung kommen, wenn man nur das Kurvenbild der Funktion zur Verfügung hat. Diese Frage ist durchaus relevant, wenn man ein Kurvenbild aus einzelnen Messwerten hat, von dem aber kein funktionaler Zusammenhang bekannt ist. Es handelt sich dabei um die gleiche Funktion, wie im vorhergehenden Abschnitt. Die Kurve der 1. Ableitung ist als dünne blaue Linie gezeichnet, da die eigentlich nicht bekannt ist.



Man zeichnet nach Augenmaß die Tangente an die Kurve. Anschließend wird diese Gerade in den Punkt (0/–1) parallel verschoben. Der Schnittpunkt dieser verschobenen Geraden mit der y- Achse liefert den Funktionswert der 1. Ableitung. Jetzt muss dieser Funktionswert nur noch an die Stelle x_0 verschoben werden und man erhält den Funktionswert der 1. Ableitung an der Stelle x_0 : $P'(x_0|f'(x_0))$

Auf diese Art und Weise kann man die 1. Ableitung aus mehreren Punkten konstruieren.

26. Musterbeispiele

In den folgenden Kurvendiskussionen will ich auf folgende Bereiche wert legen. Bei allen Funktionen untersuche ich den Definitionsbereich, das Verhalten für betragsgroße x, die Symmetrie, gemeinsame Punkt mit den Koordinatenachsen (Nullstellen), Ableitungen, Extrempunkte, Wendepunkte und den Wertebereich. Am Ende erfolgt dann der Graph.
Zusätzlich wird bei den rationalen Funktion das Verhalten der Funktionswerte in der Nähe der Definitionslücken untersucht.
Bei rationalen Funktionen gehen ich auch noch auf Definitionslücken (Polstellen, hebbare Definitionslücke) ein.

26.1. Gebrochen – rationale Funktion 1

Folgende Funktion: $f(x)=\frac{3x^3+x^2-4}{4x^2-16}$.

26.1.1. Definitionsbereich:

Die Funktion ist nicht definiert an den Stellen, an denen das Nennerpolynom $4x^2 - 16 = 0$ wird:

$$\begin{aligned}0&=4x^2-16\\16&=4x^2\\x&=+-2\end{aligned}\qquad D=\mathbb{R}/\{-2;2\}$$

26.1.2. Symmetrie:

$$\begin{aligned}f(-x)&=-f(x)\\\frac{-3x^3+(-x)^2-4}{4(-x)^2-16}&=-\frac{3x^3+x^2-4}{4x^2-16}\\-\frac{3x^3+x^2-4}{4x^2-16}&=-\frac{3x^3+x^2-4}{4x^2-16}\end{aligned}$$

Wir vermuten, dass Punktsymmetrie vorliegt. Für Punktsymmetrie müsste f(-x) = – f(x) gelten:

Dies ist eine wahre Aussage. Damit liegt **Punktsymmetrie** vor.

26.1.3. Verhalten für betragsgroße x:

Durch Polynomdivision zerlegen wir dem Term f(x) in einen ganzrationalen und gebrochenrationalen Anteil: $(3x^3+x^2-4):(4x^2-16)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}+\frac{12x}{4x^2-16}=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}+\frac{3x}{x^2-4}$.

Wenn x unbeschränkt wächst, strebt $\frac{3x}{x^2-4}=\frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}$ gegen 0. Daher kommt der Graph von f für betragsgroße x der Geraden $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ beliebig nahe. Die Gerade mit $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ ist also die Asymptote des Graphen von f.

26.1.4. Verhalten der Funktionswerte in der Nähe der Definitionslücken:

a) Stelle 2:

Am Term $f(x)=\frac{3x^3+x^2-4}{4x^2-16}=\frac{3x^3+x^2-4}{4(x^2-4)}$ erkennt man:

Wenn x→2 und x>2, dann strebt der Zähler von f(x) gegen 24 und der Nenner gegen 0.
Da wegen x>2 der Nenner positiv ist, folgt $f(x)\to+\infty$.
Wenn x→2 und x<2, dann ist der Nenner negativ (sobald x>-2), und man erhält $f(x)\to-\infty$.
An der Stelle –32 liegt also ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor.

b) Stelle –2.
Für x→-2 und x>-2, gilt $f(x)\to+\infty$.
Für x→2 und x<-2, gilt $f(x)\to-\infty$.
An der Stelle –2 liegt also ebenfalls ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor.

26.1.5. Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:

a) x=0

$$f(0)=\frac{1}{4}$$

b) y=0

$$0=3x^3+x^2-4$$
$$\textit{Polynomdivision}:$$
$$(3x^3+x^2-4):(x-1)=3x^2+4x+4$$
$$p,q-\textit{Formel}:$$
$$0=x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$$
$$N(1/0)$$

26.1.6. Ableitungen:

$$f(x)=\frac{3x^3+x^2-4}{4x^2-16}$$
$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2\bullet\frac{x^2-12}{(x^2-4)^2}$$
$$f''(x)=6x\bullet\frac{(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

26.1.7. Extrempunkte:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: f'(x)=0;
x²=0 → x=0

$$0=\frac{3}{4}x^2\bullet\frac{x^2-12}{(x^2-4)^2}$$
$$0=x^2-12$$
$$x=+-\sqrt{12}$$

$$f''(\sqrt{12})>0: Minimum$$
$$f''(-\sqrt{12})<0: Maximum$$
$$f''(0)=0$$
$$T(\sqrt{12};-3,46)$$
$$H(-\sqrt{12};-3,65)$$

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes:

$$f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$$

$$0=6x\bullet\frac{(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$
$$6x=0$$
$$x=0$$

26.1.8. Wendestellen:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: f''(x)=0

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes:

$$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$$

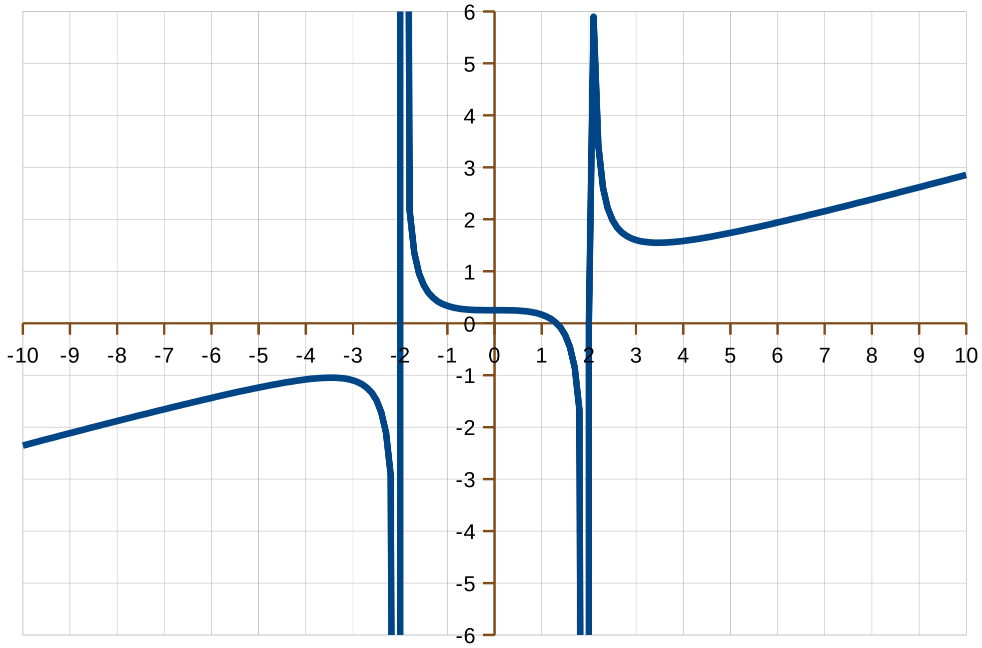
$f'''(0)\neq 0$

An der Stelle x=0 liegt sogar ein Sattelpunkt vor, da f'(x)=0.

26.1.9. Wertemenge:

W = ℝ

26.1.10. Graph zeichnen:



26.2. Gebrochen – rationale Funktion 2

Untersuche folgende Funktion $f(x)=\frac{2x-2}{x^3-4x^2}$

26.2.1. Definitionsbereich:

Die Funktion ist nicht definiert an den Stellen, an denen das Nennerpolynom 0 wird.

$$0=x^3-4x^2$$
$$0=x^2(x-4)$$
$$x^2=0 \vee x-4=0$$
$$x_{1,2}=0 \vee x_3=4$$

$$D=\mathbb{R}/\{0;4\}$$

26.2.2. Symmetrie:

Vermutung, dass weder Achsensymmetrie noch Punktsymmetrie vorliegen.
Für Achsensymmetrie müsste gelten: f(-x)=f(x)
Beispiel für x=1: f(-1)=f(1)
→ keine Achsensymmetrie.

$$f(-x)=f(x)$$
$$f(-1)=f(1)$$
$$\frac{-4}{-5}=\frac{0}{-3}\ f.A.$$

Für Punktsymmetrie müsste gelten: f(-x)=-f(x)
Beispiel für x=1: f(-1)=-f(1)
→ keine Punktsymmetrie.

$$f(-x)=-f(x)$$
$$f(-1)=-f(1)$$
$$\frac{-4}{-5}=-\frac{0}{-3}\ f.A.$$

Somit liegt weder eine Achsensymmetrie noch eine Punktsymmetrie vor.

26.2.3. Verhalten für betragsgroße x:

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^3-4x^2} = \frac{3}{8(x-4)} + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{8x}$$

Polynomdivision:

$$(2x-2):(x^3-4x^2) = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3-4x^2}$$
$$-2x+4$$
$$-----$$
$$2$$

Für $x \to \infty$, geht $f(x) \to 0$, da

$$\frac{2}{x^2} \to 2$$
$$\frac{2}{x^3-4x^2} \to -2$$
$$Insgesamt$$
$$f(x) \to 0$$

Für $x \to -\infty$, geht $f(x) \to 0$, da

$$\frac{2}{x^2} \to 2$$
$$\frac{2}{x^3-4x^2} \to -2$$
$$Insgesamt$$
$$f(x) \to 0$$

26.2.4. Verhalten der Funktionswerte in der Nähe der Definitionslücken:

a) Stelle 0:

Wenn x→0 und x>0, dann strebt der Zähler von f(x) gegen –2 und der Nenner gegen 0.
Da x>0, folgt $f(x) \to -\infty$.
Wenn x→0 und x<0, dann strebt der Zähler von f(x) gegen –2 und der Nenner gegen 0.
Da x<0, folgt $f(x) \to -\infty$.
→ Pol ohne Vorzeichenwechsel

b) Stelle 4:

Wenn x→4 und x>4, dann strebt der Zähler von f(x) gegen 6 und der Nenner gegen 0.
$f(x) \to \infty$
Wenn x→4 und x<4, strebt der Zähler gegen 6, der Nenner gegen 0: $f(x) \to -\infty$
→ Pol mit Vorzeichenwechsel

26.2.5. Gemeinsame Punkt mit den Koordinatenachsen:

a) x = 0 Nicht definiert!

b) y = 0

$$0=\frac{2x-2}{x^3-4x}$$
$$0=2x-2$$
$$x=1$$
$$N(1/0)$$

26.2.6. Ableitungen:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^3-4x}$$
$$f'(x)=\frac{2(2x^2-7x+8)}{x^3(x-4)^2}$$
$$f''(x)=\frac{12(x^3-6x^2+16x-16)}{x^4(x-4)^3}$$
$$f'''(x)=\frac{24(2x^4-17x^3+72x^2-152x+128)}{x^5(x-4)^4}$$

26.2.7. Extrempunkte:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: f'(x)=0

$$0=\frac{2(2x^2-7x+8)}{x^3(x-4)^2}$$
$$0=2x^2-7x+8\,|:2$$
$$0=x^2-3,5x+4$$
$$p,q-Formel:$$
$$x_{1,2}=1,75+-\sqrt{1,75^2-4}$$
$$keineLösung$$
$$\rightarrow KeineExtrema$$

26.2.8. Wendepunkte:

$$0=\frac{12(x^3-6x^2+16x-16)}{x^4(x-4)^3}$$
$$0=x^3-6x^2+16x-16$$
$$Polynomdivision:$$
$$(x^3-6x^2+16x-16):(x-2)=x^2-4x+8$$
$$p,q-Formel:$$
$$x_{1,2}=2+-\sqrt{4-8}$$

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: f''(x)=0

mögliche Wendestelle bei x=2.

$$f'''(2) \neq 0$$

$$f(2) = \frac{1}{4}$$

$$W(2/\frac{1}{4})$$

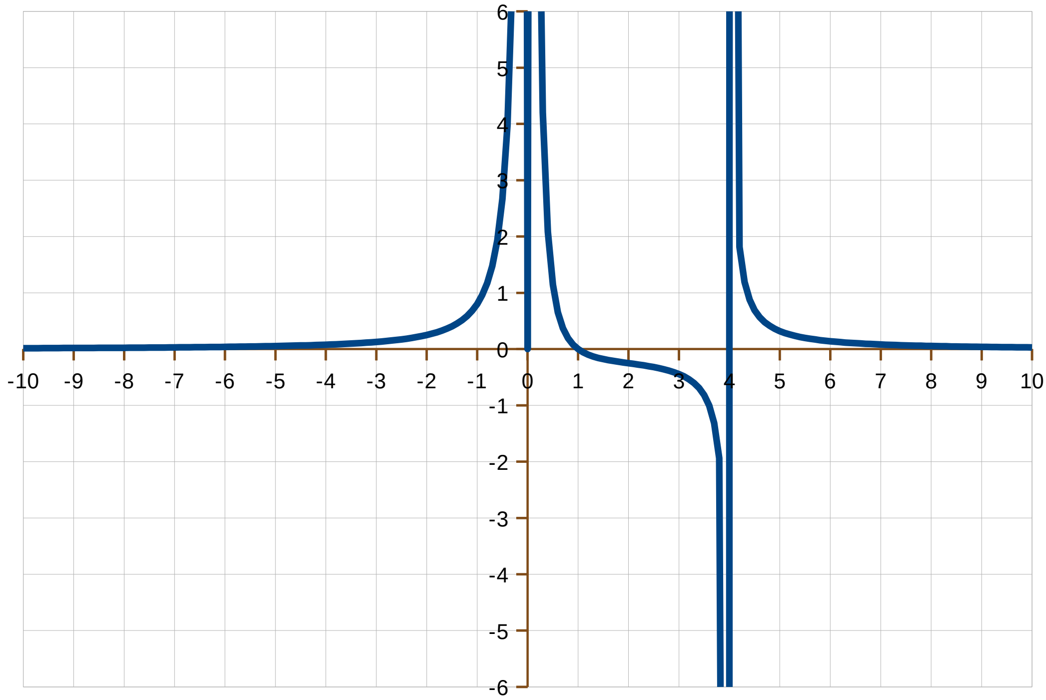
Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes:

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

26.2.9. Wertemenge:

W = ℝ

26.2.10. Graph zeichnen:



26.3. Gebrochen – rationale Funktion 3

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}$$

26.3.1. Definitionsbereich

D er Nenner eines Bruches darf nicht gleich 0 sein. Daher ist x = -2 ausgeschlossen. Beim Einsetzen von in die Funktionsgleichung erhält man für den Nenner 0 und für den Zähler einen Wert ungleich 0. Daher handelt es sich hier um eine Polstelle.
Den zugehörigen Linearfaktor (x+2) könnte man auch in der Form $(x+2)^1$ schreiben also mit ungeradem Exponenten. x = – 2 ist demnach ein ungerader Pol, das heißt ein Pol mit Vorzeichenwechsel.
„Ungerader Pol" bedeutet, dass hier ein „Sprung" zwischen + ∞ und – ∞ stattfindet. Es fragt sich nun, ob dieser Sprung von + ∞ nach – ∞ geht oder umgekehrt.

Um diese Frage zu klären , bildet man den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle x = – 2, dh. man untersucht das verhalten der Funktion beim linksseitigen annähern an die Polstelle und beim rechtsseitigen annähern.
Ein linksseitiger Grenzwert wird mit einem Zusatz „– 0" gekennzeichnet, um zu kennzeichnen, dass man sich auf der „negativen" oder „linken" Seite des Grenzwertes befindet. Entsprechend wird ein rechtsseitiger Grenzwert mit „+0" gekennzeichnet.
Beim linksseitigen Grenzwert ($x \to -2 - 0$) geht der Zähler gegen +6. Für den Nenner setzt man in die Funktion x+2 für das Argument x den Ausdruck $x_0 - h$ ein, wobei h einen beliebigen positiven Wert darstellt. Dann betrachtet man das Vorzeichen und das Verhalten für $h \to 0$:

$$x+2 \to \quad -2 - h + 2 = -h$$

Für positve h hat damit der Quotient aus einem positiven wert +6 und einem negativen Wert –h ein negatives Vorzeichen.

Damit ist der linksseitige Grenzwert – ∞ .

Unternimmt man die gleiche Untersuchung für den rechtsseitigen Grenzwert $x \to -2+0$, so erhält man im Zähler wieder den Wert +6 und im Nenner:

$$x + 2 \to \quad -2 + h - 2 = h$$

Der Nenner ist positiv und der Wert des Quotienten ist ebenfalls positiv.

Damit ist der rechtsseitige Grenzwert + ∞.

26.3.2. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

a) x = 0
Für die Schnittpunkte mit der y-Achse ist der Funktionswert an der Stelle x=0 zu berechnen, dh. in die Funktionsgleichung ist für x der Wert 0 einzusetzen. Damit erhält man für den Schnittpunkt mit der y-Achse x = – 2:

$$S_y\ (\ 0\ |\ -2)$$

b) y = 0
Für die Schnittpunkte mit der x-Achse ist in der Funktionsgleichung für den Wert y der Wert 0 einzusetzen und dann die x Werte zu berechnen, für die dieser Wert eintritt.

Während es mit der y-Achse nur einen Schnittpunkt geben kann, können es mit der x-Achse mehrere Schnittpunkte sein. Bei gebrochen-rationalen Funktionen ist dazu noch ausreichend, wenn man nur die Funktion im Zähler betrachtet. Die Nullstellen der Funktion sind identisch mit den Nullstellen der Zählerfunktion. Dabei ist lediglich zu untersuchen, ob die Nennerfunktion an der gleichen Stelle ebenfalls eine Nullstelle hat. Ist das nicht der Fall, dann handelt es sich tatsächlich um eine Nullstelle. Hat die Nennerfunktion an dieser Stelle ebenfalls eine Nullstelle, dann handelt es sich um einen unbestimmten Ausdruck, der weiterer Untersuchung bedarf.

In diesem Fall ist also die Funktion $y = x^2 - 3x - 4$ zu untersuchen. Mittels der quadratischen Lösungsformel erhält man die beiden Werte $x = -1$ und $x = 4$:

$S_{x1}\ (-1|0)$ und $S_{x2}\ (4|0)$

26.3.3. Verhalten für betragsgroße x

Der Zähler des Funktionsterms ist ein Polynom vom Grad 2, der Nenner ein Polynom vom Grad 1. (Der Grad eines Polynoms ist der höchste vorkommende Exponent der Potenzen von x.) Wenn – wie hier – der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad, dann hat der Funktionsgraph eine Gerade als Asymptote. Die Asymptotengleichung erhält man durch Polynomdivision, wobei ein sorgfältiger Umgang mit Plus- und Minuszeichen angebracht ist.

$$
\begin{array}{l}
(x^2 - 3x\ - 4) : x + 2 = x - 5 + \dfrac{6}{x+2} \\
\underline{-(x^2 + 2x)} \\
\quad - 5x\ - 4 \\
\quad \underline{-(-5x - 10)} \\
\qquad\quad 6
\end{array}
$$

Da der Restbruch im Zähler immer eine niedrigere Potenz haben muss als im Nenner, geht dieser Funktionsteil für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen 0. Das bedeutet, dass der Funktionswert f(x) für große x-Werte sich immer mehr der Funktion $x - 5$ annähert.

Aus dem Verlauf der Funktion $y = x - 5$ kann man direkt das Verhallten der Ausgangsfunktion für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ ablesen:

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 5) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (x - 5) = -\infty$$

Aus dem Restbruch lässt sich die Annäherung der Ausgangsfunktion an die Asymptote bestimmen. Für große positive x-Werte hat der Restbruch ein positives Vorzeichen. Damit liegt die Funktion für große positive x-Werte über der Asymptote. Die Funktion nähert sich also „von oben“ an die Asymptote an.

Für betragsgroße negative x-Werte hat der Restbruch ein negatives Vorzeichen, da dann $x + 2$ negative Werte liefert. Der Zähler beleibt positiv. Damit liegt die Funktion für große negative Werte unter der Asymptote. Die Funktion nähert sich „von unten“ der Asymptote an. Siehe dazu den Funktionsgraphen am Ende des Abschnittes.

26.3.4. Symmetrie

Mit der Kenntnis der Polstellen und der Asymptote kann man sich der Untersuchung der Symmetrieeigenschaften zuwenden. Hier sollen zunächst einige grundsätzliche Bemerkungen zur Symmetrie bei gebrochen rationalen Funktionen gemacht werden.

1. Ist die Zählerfunktion eine gerade Funktion und die Nennerfunktion auch eine gerade Funktion, dann ist auch der Quotient eine **gerade Funktion**.
2. Ist die Zählerfunktion eine ungerade Funktion und die Nennerfunktion auch eine ungerade Funktion, dann ist der Quotient eine **gerade Funktion**.
3. Ist die Zählerfunktion eine ungerade Funktion und die Nennerfunktion auch eine gerade Funktion, dann ist der Quotient eine **ungerade Funktion**.
4. Ist die Zählerfunktion eine gerade Funktion und die Nennerfunktion auch eine ungerade Funktion, dann ist der Quotient eine **ungerade Funktion**.

In diesem Fall liegt keine dieser Eigenschaften vor, da über die Symmetrie der Zählerfunktion wegen ihrer geraden und ungeraden Potenzen keine Aussage gemacht werden kann. Damit müssen hier andere Überlegungen zum Ziel führen.

1. Da die Asymptote eine Gerade ist, und keine Parallele zur x-Achse, kann eine Achsensymmetrie nicht vorliegen.
2. Da die Funktion eine ungerade Polstelle hat, kann höchstens eine Punkt-symmetrie vorliegen, bei der der x-Wert des Symmetriepunktes der x-Wert der Polstelle ist. Man kann aber noch weiter die Bedingung eingrenzen. Der y-Wert des Symmetriepunktes muss der Schnittpunkt der Asymptote mit der Senkrechten an der Polstelle x = – 2 sein. Damit kommt als Symmetriepunkt nur der Punkt S(–2 | –7) in Frage.

Die Bedingung für eine Punktsymmterie außerhalb des Ursprungs lautet:

$$f(x_0 - h) + f(x_0 + h) = 2\, y_0$$

Zweckmäßiger Weise verwendet man dazu das Ergebnis der Polynomdivision zur Berechnung der Asymptote. Bei Verwendung der Ausgangsfunktion ist der Rechen-aufwand um ein Vielfaches größer.

$$= (-2-h) - 5 + \frac{6}{(-2-h)+2} + (-2+h) - 5 + \frac{6}{(-2+h)+2}$$

$$= -14 - \frac{6}{h} + \frac{6}{h} = 2\cdot(-7)$$

Damit ist die Punktsymmetrie für den Punkt S(–2 | –7) nachgewiesen.

26.3.5. Ableitungen

Für das Berechnen der Ableitungen lohnt es sich darüber nachzudenken, ob man auch dazu das Ergebnis der Polynomdivision benutzt, da der gebrochen-rationale Teil der Funktion im Zähler kleiner Potenzen besitzt und damit einfacher abzuleiten geht. Hier soll zunächst die Ausgangs-funktion mit der Quotientenregel abgeleitet werden:

$$f'(x) = \frac{(x+2)(2x-3) - (x^2-3x-4)\,1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-3x+4x-6 - x^2+3x+4}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+4x-2}{(x+2)^2}$$

Die 2. Ableitung:

$$f''(x) = \frac{(x+2)^2\,(2x+4) \;-\; (x^2+4x-2)\;2\;(x+2)\;1}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{(x+2)\,[(x+2)\,(2x+4) \;-\; (x^2+4x-2)\;2\,]}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{(x+2)\,(2x+4) \;-\; (x^2+4x-2)\;2}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{2x^2+4x+4x+8 - 2x^2+8x+4}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{12}{(x+2)^3}$$

Als nächstes sollen die Ableitungen aus der durch Polynomdivision entstanden Funktion ermittelt werden:

$$f(x) = x - 5 + \frac{6}{x+2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-6}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6\bullet 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{12}{(x+2)^3}$$

26.3.6. Extrema

Für das bestimmen der Extremwerte ist die Zählerfunktion der 1. Ableitung gleich Null zu setzen. Wurde die Ableitung aus der Funktion der Polynomdivision gewonnen ist natürlich erst der Summand „1“ mit dem Bruch wieder auf einen Hauptnenner zu bringen.

$$f'(x) = x^2 + 4x - 2 = 0$$

Dieses quadratische Gleichung ist wieder über die p-q Lösungsformel zu behandeln. Damit erhält man für die beiden Nullstellen:

$$x_1 = -2 + \sqrt{6} \quad \text{und } x_2 = -2 - \sqrt{6}$$

Zur Bestimmung des Typs des Extremums sind die x Werte in die 2. Ableitung einzusetzen:

$$f''(-2+\sqrt{6}) = \frac{12}{(-2+\sqrt{6}+2)^3} = \frac{12}{\sqrt{6}^3} \quad > 0$$

$$f''(-2+\sqrt{6}) = \frac{12}{(-2-\sqrt{6}+2)^3} = \frac{12}{-\sqrt{6}^3} \quad < 0$$

Damit ist x_1 ein Tiefpunkt und x_2 ein Hochpunkt. Für das Zeichnen der Extremwerte in das Koordinatensystem müssen die zu den x-Werten gehörigen y-Werte berechnet werden. Dazu sind die hier bestimmten x-Werte in die Ausgangsfunktion f(x) einzusetzen. Auch dabei sollte die Möglichkeit genutzt werden, die durch Polynomdivision umgeschriebene Form der Ausgangsfunktion zu benutzen.

$$f(-2-\sqrt{6}) = -2-\sqrt{6} - 5 + \frac{6}{(-2-\sqrt{6}+2)} = -7 - 2\sqrt{6} \approx -11{,}9$$

Hochpunkt bei **H(–2 –√6 |–7 –2√6) ≈ H (–4,44 | –11,9)**

$$f(-2+\sqrt{6}) = -2+\sqrt{6} - 5 + \frac{6}{(-2+\sqrt{6}+2)} = -7 + 2\sqrt{6} \approx -2{,}1$$

Tiefpunkt bei **T(–2 +√6 |–7 +2√6) ≈ T (–0,45 | –2,1)**

26.3.7. Monotonie

Zur Untersuchung der Monotonie einer Funktion ist das Vorzeichen der 1. Ableitung zu betrachten. Das Monotonieverhalten der Funktion ändert sich an den Extremwerten. Allerdings sind bei der Untersuchung auch die Polstellen zu berücksichtigen. Auch an Polstellen kann sich das Monotonieverhalten ändern (bei geraden Polstellen) Bei ungeraden Polstellen bleibt links und rechts von der Polstelle das Monotonieverhalten zwar gleich, aber an der Polstelle spring der Wert von – ∞ nach + ∞ oder umgekehrt, so dass über die Polstelle hinweg zur Monotonie keine Aussage gemacht werden sollte. Damit ergeben sich für diese Funktion folgende Trennungen:

	$x < -2-\sqrt{6}$	$-2-\sqrt{6} < x < -2$	$-2 < x < -2+\sqrt{6}$	$-2+\sqrt{6} < x$
f'(x)	> 0	< 0	< 0	> 0
f(x)	streng monoton abnehmend	streng monoton zunehmend	streng monoton zunehmend	streng monoton abnehmend

26.3.8. Wendepunkte

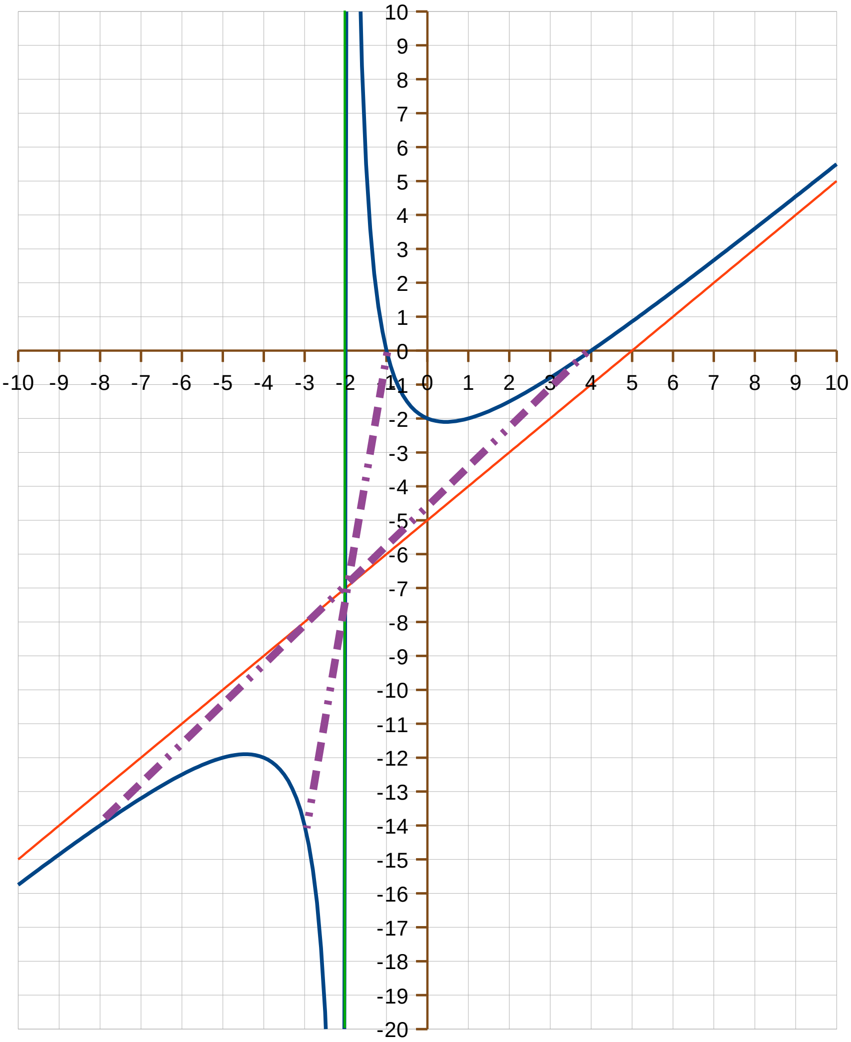
Aus der Funktionsgleichung der 2. Ableitung ist klar, dass es keine Wendepunkte geben kann, da die Zählerfunktion nicht null werden kann.

26.3.9. Krümmungsverhalten

Das Krümmungsverhalten ändert sich an den Wendepunkten. Da hier keine vorhanden sind, kann sich das Krümmungsverhalten nur an den Polstellen ändern. Damit ist nur eine Unterscheidung an der Stelle x = – 2 vorzunehmen:

	$x < -2$	$-2 < x$
f ''(x)	< 0	> 0
f(x)	rechts gekrümmt	links gekrümmt

26.3.10. Graph



Die blaue Linie ist die Funktionskurve, die rote Linie die Asymptote und die grüne Linie die Polstelle. Die in pink eingetragenen Linien zeigen die Punktsymmetrie bezüglich des Punktes (-2|–7): x-Werte im gleichen Abstand von – 2 (hier –1 und 4) haben auf der negativen Seite von –2 (entspricht – 3 und – 6) den gleichen Abstand der y-Werte vom Wert y = –7. Für x = 4 und x = –1 ergibt sich ein y-Wert von y = –7 **+7** = 0, damit ergibt sich für x = – 3 und x = –6 ein y-Wert von y = –7 **–7** = – 14.
Die Verbindungslinien der jeweiligen Kurvenpunkte müssen sich im Punkt (-2|-7) schneiden. Genau das ist die graphische Interpretation der Punktsymmetrie. Man kann den Symmetriepunkt als Brennpunkt einer Linse ansehen.

26.4. Gebrochen – rationale Funktion mit Betragsfunktionen

$$f(x)= \frac{|x + 1|}{|x| - 1}$$

An dieser Stelle muss zunächst etwas allgemein über die Definition der Betragsfunktion geschrieben werden, da das für spätere Untersuchungen noch wichtig wird. Umgangssprachlich „entfernt die Betragsfunktion das Vorzeichen“. Mathematisch wird diese Aussage in folgender Funktionsdefinition zusammengefasst:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Für positive x-Werte ist der Wert der Betragsfunktion der Wert von x selbst. Für negative x-Werte ist der Wert der Betragsfunktion der Wert von x multipliziert mit dem Faktor –1. Genau durch diese Multiplikation wird von negativen Werten „das Vorzeichen entfernt“.

26.4.1. Definitionsbereich

|x| darf nicht gleich 1 sein, da der Nenner für diesen Wert 0 ist und damit undefiniert. Damit ist aus dem Definitionsbereich die Werte –1 und +1 auszuschließen.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1 \,;\, +1\}$$

Für den Wert x = +1 wird der Zähler nicht Null, deshalb handelt es sich um eine Polstelle.

Für den Wert x = –1 wird der Zähler ebenfalls Null. Damit kann noch nicht geklärt werden, um welche Art von Definitionslücke es sich handelt (Polstelle oder behebbar). Diese Stelle bedarf einer weiteren Untersuchung, die später in diesem Abschnitt durchgeführt wird. (An dieser Stelle gibt es noch mehr Eigentümlichkeiten, die den Eigenschaften der Betragsfunktion geschuldet sind.)

Hier soll zunächst die Stelle x = +1 betrachtet werden. Für $x \to +1$ konvergiert der Zähler gegen 2, der Nenner gegen 0. Daher ist x = +1 eine Polstelle, das heißt eine Unendlichkeitsstelle. Da der Exponent des Linearfaktors dieser Polstelle = 1 ist, handelt es sich um eine ungerade Polstelle, die einen Vorzeichenwechsel nach sich zieht.

Um zu erkennen, auf welcher Seite die Funktionswerte gegen $+\infty$ beziehungsweise $-\infty$ gehen, muss man die Vorzeichen von Zähler und Nenner betrachten. Der Zähler hat den positiven Grenzwert 2, während der Nenner gegen 0 geht. Für den Wert x = 1 ist die Betragsfunktion |x| = x und damit der Nenner an dieser Stelle x – 1. Damit wird es möglich den links- und rechtseitigen Grenzwert zu bestimmen.

$$\lim_{x \to +1+h} |x| - 1 = \lim_{x \to +1+h} x - 1 = \lim_{h \to +0} 1 + h - 1 = \lim_{h \to +0} h = +0$$

Der rechtsseitige Grenzwert nähert sich also von der positiven Seite der 0, so dass der Grenzwert der Funktion, da auch der Zähler positiv ist, $+\infty$ ist.

$$\lim_{x \to +1-h} |x| - 1 = \lim_{x \to +1-h} x - 1 = \lim_{h \to +0} 1 - h - 1 = \lim_{h \to +0} -h = -0$$

Der linksseitige Grenzwert nähert sich von der negativen Seite an die 0 an. damit ist der Grenzwert der Funktion – ∞.
Noch eine Bemerkung zu dem dritten Grenzwertausdruck beim linksseitigen Grenzwert. Während bei den ersten beiden Grenzwerten immer der Ausdruck $x \to 1 - h$ steht, wegen der linksseitigen Annäherung steht dann nach dem Einsetzen des Werten 1 – h in die Funktion als Grenzwert $x \to +0$. Das linksseitige Annähern ist bereits in dem Funktionsausdruck 1 ***–h*** – 1 enthalten, da dort der Ausdruck –h auftritt. Bei Grenzwertbetrachtungen ist das h stets als positiver Wert anzusehen und deshalb steht unter dem lim-Zeichen der Ausdruck $h \to +0$: h ist positiv und geht gegen 0.
Der negative Funktionswert -h bewirkt bereits, dass die Funktionswerte für positives h negativ sind und damit der gesamte Quotient negativ ist.

Damit besitzt die Funktion an der Stelle x = 1 eine ungerade Polstelle, bei der der Funktionswert von – ∞ nach + ∞ springt (immer in wachsende x-Richtung betrachtet).

26.4.2. Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen

Der Schnittpunkt mit der x-Achse würde bei x =–1 liegen, denn genau für diesen Wert wird die Zählerfunktion gleich 0. Aber genau für diesen Wert wird auch die Nennerfunktion gleich 0. Die genauere Untersuchung dieses Punktes steht noch aus und kann deshalb noch nicht als Nullstelle betrachtet werden.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist wie immer eindeutig und liegt bei y = – 1.

$$S_y\,(0|\,-1)$$

26.4.3. Betragsfreie Schreibweise

Wenn sich im Funktionsterm Absolutbeträge befinden, ist es an gebracht, diesen Term betragsfrei zu schreiben. Dies erfordert eine Fallunterscheidung. Als Intervallgrenzen für diese Fallunterscheidung muss man diejenigen x – Werte betrachten, für die sich zwischen zusammen gehörigen Betragsstrichen der Wert 0 ergibt. Dabei sind in diesem Fall die Zählerfunktion mit x = – 1 und die Nennerfunktion mit x =0 wegen des betrages |x| und die Definitionslücken x = – 1 und x = +1 als Intervallgrenzen zu berücksichtigen. Damit entstehen abschnittsweise definierte Funktionen, bei denen die Intervallgrenzen für die Stetigkeit und Differenzierbarkeit spezielle Untersuchungen verlangen.

1. Fall: $x < -1$
Da in diesem Fall zwischen den Betragsstrichen von |x+1| etwas negatives steht, ist dieser Betrag mit einem negativen Vorzeichen in Klammern zu setzen: – (x+1)
Entsprechendes gilt für den Betrag |x|, der durch – x zu ersetzen ist.

$$f(x) = \frac{\overbrace{|x+1|}^{<0}}{\underbrace{|x|}_{<0} - 1} = \frac{-(x+1)}{-(x) - 1} = \frac{-x-1}{-x-1} = 1$$

(Zur Auflösung von Betragszeichen siehe die Definition der Betragsfunktion am Anfang der Aufgabe.) Für diesen Teil des Definitionsbereiches ist die Funktion:

$$f(x) = 1$$

2. Fall: $-1 < x \leq 0$

Die Zahl 0 wird willkürlich zu diesem Fall gerechnet. Unter der gegebenen Voraussetzung ist x+1 positiv , so dass die Betragsstriche in |x+1| unnötig sind. |x| dagegen ist wie im ersten Falle mit –x zu ersetzen.

$$f(x) = \frac{\overbrace{|x+1|}^{>0}}{\underbrace{|x|}_{<0} - 1} = \frac{x+1}{-(x)-1} = \frac{x+1}{-x-1} = -1$$

In diesem Intervall ist die Funktion identisch mit:

$$f(x) = -1$$

3. Fall: $0 < x < 1$

In diesem Bereich sind beide Beträge größer 0, deshalb können die Betragsstriche bei beiden weggelassen werden.

$$f(x) = \frac{\overbrace{|x+1|}^{>0}}{\underbrace{|x|}_{>0} - 1} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

4. Fall: $1 < x < \infty$

In diesem Bereich gelten die gleichen Vorzeichen, wie im Fall 3. Da die Funktion aber bei x =1 definitiv eine Polstelle hat, ist es ratsam diesen Bereich gesondert aufzuführen, da aufgrund der Polstelle sich z.B. das Monotonieverhalten ändern kann, eventuell auch die Krümmung. Als Funktionsausdruck kommt natürlich der gleiche in Frage, wie im Fall 3:

$$f(x) = \frac{\overbrace{|x+1|}^{>0}}{\underbrace{|x|}_{>0} - 1} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Damit entsteht aus der Ausgangsfunktion eine intervallweise definierte Funktion. Für diese Funktion sind dann insbesondere die Intervallgrenzen zu untersuchen. Die Funktionsdefinition einer solchen stückweise definierten Funktion kann man in folgender Weise darstelle:

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x < -1 \\ -1 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

26.4.4. Verhalten für betragsgroße x-Werte

Für diese Untersuchung sind jetzt nur der 1.Teil und der 4. Teil der Funktion zu untersuchen. Für das Verhalten $x \to -\infty$ ist der Grenzwert y = 1, da in diesem Bereich die Funktion generell eine Konstante ist.

Für das Verhalten x – > + ∞ ist der Bruch der Funktion so umzustellen, dass im Zähler und im Nenner durch die höchste x Potenz dividiert wird.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} f(x) \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

Auch dieser Grenzwert ist 1. Die Division durch die höchste Potenz zur Berechnung von Grenzwerten ist ein übliches Vorgehen bei gebrochen rationalen Funktionen. Damit bleiben nur die Koeffizienten vor der höchsten Potenz stehen und alle anderen Glieder haben für $x \to \infty$ den Grenzwert 0.

Damit besitzt die Funktion für $x \to +\infty$ eine waagerechte Asymptote y = 1.

26.4.5. Ableitungen

Für die Untersuchung von Monotonie- und Krümmungsverhalten benötigt man die ersten beiden Ableitungen . Hier sollte die betragsfreie Schreibweise verwendet werden. Für $x < -1$ und $-1 < x < 0$ ist jeweils eine konstante Funktion zu differenzieren ; hier ist die Ableitung also gleich 0. In den beiden anderen Fällen (0<x<1 und x>1) liefert die Quotientenregel das Ergebnis. Auf grund der einfachen Funktion wird hier auf ein ausführliches Berechnen verzichtet. Für die 1. Ableitung entstehen je nach Intervall folgende Funktionen:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ 0 & \text{für } -1 < x \le 0 \\ \frac{2}{(x-1)^2} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \frac{-2}{(x-1)^2} & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Für die 2. Ableitung kommt wieder die Quotientenregel zum Einsatz. Dabei ist zu beachten, dass danach noch im Zähler und Nenner der Faktor (x–1) gekürzt werden kann, so dass als Endergebnis folgende Funktion entsteht:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ 0 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ \frac{4}{(x-1)^3} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \frac{4}{(x-1)^3} & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Aus den Ableitungen ist zu erkennen, dass es keine Extremwerte oder Wendepunkte geben kann, da die Ableitungen nicht Null werden können.

26.4.6. Monotonie

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
f'(x)	= 0	= 0	< 0	< 0
f(x)	konstant	konstant	streng monoton abnehmend	streng monoton abnehmend

Die 1. Ableitung ist natürlich entweder gleich Null oder negativ. Wenn die 1. Ableitung gleich Null ist, kann die Funktion natürlich nur konstant sein, für kleiner Null ist die Funktion streng monoton abnehmend.

26.4.7. Krümmung

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
f ''(x)	= 0	= 0	< 0	> 0
f(x)	ohne Krümmung	ohne Krümmung	rechts gekrümmt	links gekrümmt

An dieser Tabelle sieht man sehr gut, dass es ratsam ist die Intervalle auch an den Polstellen zu Trennen. Während sich bei der Monotonie kein Unterschied ergeben hat, ist er bei der Krümmung vorhanden.
Der Wechsel der Krümmung fällt auf eine Polstelle, deshalb gibt es einen Krümmungswechsel, aber keinen Wendepunkt, an dem das Wechseln der Krümmung üblicherweise stattfindet.

26.4.8. Symmetrie

da die Funktion im negativen x-Bereich konstante Werte hat, während im positiven x-Bereich ein solches Verhalten nicht auftritt, kann es keine Symmetrie geben. Weitere Untersuchungen sind deshalb nicht notwendig.

26.4.9. Verhalten an den Trennstellen der Funktionsdefinition

Wie bereits mehrfach ausgeführt ist das Verhalten von abschnittsweise definierten Funktionen an den Trennstellen der Abschnitte von besonderer Bedeutung. Dabei interessieren in erster Linie solche Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Die Eigenschaft der Stetigkeit zeigt, dass die Funktion trotzt ihres abschnittsweises definieren an der Trennstelle keinen Sprung hat. Das Kurvenbild also „in einem Zug ohne Absetzen zu zeichnen“ ist.
Die Eigenschaft der Differenzierbarkeit zeigt, dass die steige Fortsetzung der Kurve ohne einen „Knick“ oder eine „Ecke“ existiert. Dh. der Grenzwert der Tangentenanstiege links von der Trennstelle ist gleich dem Grenzwert der Tangentenanstiege rechts von der Trennstelle. Die Fortsetzung ist also nicht nur stetig, sondern auch „glatt“, die Tangente „kippt“ nicht an der Trennstelle.

Klar ist schon, dass an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle existiert, zu deren Eigenschaften nichts weiter zu sagen ist. Eine Polstelle ist eine Unstetigkeitsstelle bei der auch keine Fortsetzung der 1. Ableitung möglich ist. An einer Polstelle besitzt auch die 1. Ableitung einen Grenzwert von $\pm\infty$. Die hier interessanten Stellen sind die Werte $x = -1$ und $x = 0$, die näher untersucht werden müssen.

26.4.9.1. Verhalten an der Stelle x = – 1

Für $x \to -1$ gehen sowohl d er Zähler des Funktionsterms $|x+1|$ als auch der Nenner $|x| - 1$ gegen 0. Die beiden ein seitigen Grenzwerte für $x \to -1$ erhält man mit Hilfe der betragsfreien Schreibweise für den Fall $x < -1$ beziehungsweise $-1 < x \leq 0$. Da beide Funktionen, die an der Stelle $x = -1$ zusammenstoßen Konstant sind, sind natürlich die Grenzwerte der beiden Funktionen leicht zu ermitteln:

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} 1 = 1$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} -1 = -1$

Die Grenzwerte sind verschieden, die Definitionslücke ist nicht behebbar, die Funktion ist an der Stelle $x = -1$ unstetig, damit auch nicht differenzierbar. $x = -1$ ist aber keine Polstelle, da die Grenzwerte nicht gegen $\pm\infty$ verlaufen.

26.4.9.2. Verhalten an der Stelle x = 0

Auch hier verwendet man zweckmäßigerweise die betragsfreie Schreibweise. Zunächst wird durch Vergleich des Funktionswertes mit den beiden einseitigen Grenzwerten die Stetigkeit überprüft.
Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} -1 = -1$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x+1}{x-1} = -1$

Der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert ist gleich, also ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig. Für eine solche Untersuchung wäre auch der Einsatz der Definition der

Stetigkeit möglich und sinnvoll. Die Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0 ist definiert als :

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$$

Definiert ist der Funktionswert für die Stelle x =0 durch den linksseitigen Wert im Intervall von $-1 < x \le 0$ und hat im gesamten Intervall den Wert $f(x_0) = -1$. Also reicht es für die Stetigkeit die Formel für den rechtsseitigen Grenzwert der Stetigkeit zu beweisen, dh. nur für positive h zu untersuchen.

$$\lim_{h\to +0} \frac{(0+h)+1}{(0+h)-1} - (-1) = \lim_{h\to +0} \frac{h+1}{h-1} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Womit ebenfalls die Stetigkeit an der Stelle x = 0 bewiesen ist.

Wenn eine Funktion an einer Stelle stetig ist, braucht sie dort noch lange nicht differenzierbar zu sein. Die Stetigkeit ist Voraussetzung für die Differenzierbarkeit, oder anders ausgedrückt, die Stetigkeit ist eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit. Zur Überprüfung der Differenzierbarkeit ermittelt man die beiden einseitigen Grenzwerte der Ableitungsfunktion.

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to 0-0} f'(x) = \lim_{x\to 0-0} 0 = 0$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to 0+0} f'(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{-2}{(0-1)^2} = -2$

Über die Definition der Differenzierbarkeit $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$

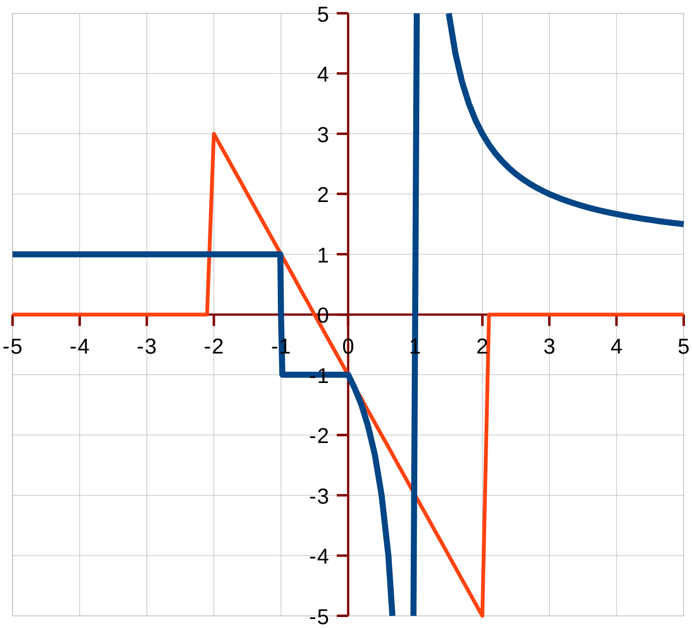
ergibt sich folgende Rechnung:

$$\lim_{h\to +0} \frac{\frac{-2}{(0+h-1)^2} - (-1)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{-2 + (h-1)^2}{h\,(h-1)^2} = \lim \frac{h^2 - 2h - 1}{h\,(h^2-2h+1)} = +\infty$$

Beide Wege zeigen: Die Funktion ist an der Stelle x = 0 nicht differenzierbar. Dabei ist zu beachten, dass es natürlich einen linksseitigen Grenzwert – 1 gibt, so dass die Funktion an allen Stelle mit x < 0 differenzierbar ist. Außerdem gibt es einen rechtsseitigen Grenzwert –2, so dass die Funktion an allen Stellen mit x > 0 differenzierbar ist. da aber die Grenzwerte verschieden sind, ist die Funktion an x =0 nicht differenzierbar.

Die Abweichung zwischen den beiden Grenzwerten beweist, dass der Graph im Punkt x =0 nicht differenzierbar ist. Die Funktion hat dort einen „Knick“ oder eine Spitze, was dazu führt, dass der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten einen andren Wert besitzt, wie der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten. Dieses Beispiel zeigt sehr schön, dass die Stetigkeit und Differenzierbarkeit keine Eigenschaft der Funktion ist, sondern die Eigenschaft eines Punktes der Funktion. Die Ausgangsfunktion ist innerhalb aller notwendigen Intervallgrenzen stetig und differenzierbar, lediglich an den Grenzpunkten, die durch die Betragsfunktionen hervorgerufen werden, ist die Eigenschaft nicht immer gegeben.

26.4.10. Graph



Die blaue Linie zeigt den Verlauf der Funktion, die rote Gerade gibt den rechtsseitigen Grenzwert der 1. Ableitung an der Stelle x =0 . Dass diese Gerade die blaue Linie in (-1|1) berührt ist Zufall und keinen funktionalen Zusammenhang.
Der „knick" der blauen Kurve an der Stelle x =0 ist deutlich zu erkennen und damit auch die vorhandene Stetigkeit (kein Absetzen der Linie), aber keine Differenzierbarkeit. Die Polstelle bei x = 1 bedarf keiner weiteren Untersuchung.

26.5. Kurvenschar gebrochen – rationaler Funktionen

$$f_a(x) = \frac{1-x^2}{2(x-a)}$$

Diskussion einer Kurvenschar bedeutet, dass man zu gleich die Eigenschaften unendlich vieler Kurven untersucht. Zu jedem Wert des Parameters a gehört eine eigene Funktion f_a und damit eine eigene Kurve.

Bei einigen Untersuchungen ist es nötig, eine Fallunterscheidung bezüglich des Parameters a vorzunehmen. Da bei der obigen Funktion der Zähler des Funktionsterms gemäß $1-x^2 = (1+x)(1-x)$ zerlegt werden kann, kürzt sich in den Sonderfällen $a = -1$ und $a = +1$ der im Nenner enthaltene Faktor $x-a$ heraus, so dass es empfehlenswert ist, diese beiden Fälle gesondert zu untersuchen. Damit entstehen folgende zu untersuchende Fälle:

5. $a < -1$
6. $a = -1$
7. $-1 < a < 1$
8. $a = 1$
9. $1 < a$

26.5.1. Definitionsbereich

Die Funktion ist für alle $x \neq a$ definiert.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$$

26.5.2. Verhalten an der Definitionslücke

Die oben erwähnte Fallunterscheidung ist hier wichtig. In den Sonderfällen $a = -1$ und $a = +1$ ergibt sich jeweils eine stetig behebbare Definitionslücke, da man den Linearfaktor $(x-a)$ herauskürzen kann.
In den anderen Fällen liegt jeweils ein ungerader Pol (mit Vorzeichenwechsel) vor.

Zunächst soll der linksseitige Grenzwert der Funktion für $x = a$ betrachtet werden:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1-(a-h)^2}{2(a-h-a)} = \lim_{h \to 0} \frac{1-a^2+2ah-h^2}{2(-h)} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1-a^2}{-2h} + a - \frac{h}{a} \right)$$

Für die Berechnung des linksseitigen Grenzwertes wurde für x der Ausdruck $a-h$ eingesetzt. Damit braucht man nur eine Grenzwertbetrachtung für $h \to 0$ durchzuführen, gleichzeitig kann man voraussetzen h positiv. Beim bearbeiten des Funktionsausdrucks sind drei Summanden entstanden deren erste Summand einen Grenzwert ∞ hat, der zweite Summand ein konstanter Wert ist, der wegen des ersten Summanden für den Grenzwert keine Bedeutung besitzt und ein dritter Summand, der für $h \to 0$ ebenfalls gegen 0 strebt. Damit beschränkt sich die Untersuchung auf den ersten Summanden.

Für positive h ist der Nenner des ersten Summanden immer negativ, so dass die oben angegebenen fünf Unterscheidungsfälle nur für den Zähler zu untersuchen sind.

1. $a < -1$: Zähler negativ => Grenzwert $+\infty$
2. $a = -1$: Zähler 0, behebbare Definitionslücke
3. $-1 < a < 1$: Zähler positiv => Grenzwert $-\infty$
4. $a = 1$: Zähler 0, behebbare Definitionslücke
5. $1 < a$: Zähler negativ => Grenzwert $+\infty$

Für den rechtsseitigen Grenzwert wird der gleiche Weg beschritten. Dafür wird für den Grenzwert gegen a der Wert für x mit a +h ersetzt.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1-(a+h)^2}{2(a+h-a)} = \lim_{h\to 0} \frac{1-a^2-2ah-h^2}{2(h)} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1-a^2}{2h} - a - \frac{h}{a} \right)$$

Es entstehen ähnliche Ausdrücke, bei denen wieder nur der erste Summand für den Grenzwert entscheidend ist. Der Nenner ist in diesen Fällen immer positiv.

1. $a < -1$: Zähler negativ => Grenzwert $-\infty$
2. $a = -1$: Zähler 0, behebbare Definitionslücke
3. $-1 < a < 1$: Zähler positiv => Grenzwert $+\infty$
4. $a = 1$: Zähler 0, behebbare Definitionslücke
5. $1 < a$: Zähler negativ => Grenzwert $-\infty$

Damit entstehen für $a \neq +1$ oder -1 folgende Grenzwerte:

1. $a < -1$: linksseitiger Grenzwert $+\infty$; rechtsseitiger Grenzwert $-\infty$
2. $a = -1$:
3. $-1 < a < 1$: linksseitiger Grenzwert $-\infty$; rechtsseitiger Grenzwert $+\infty$
4. $a = 1$:
5. $1 < a$: linksseitiger Grenzwert $+\infty$; rechtsseitiger Grenzwert $-\infty$

Die beiden Sonderfälle $a = -1$ und $a = +1$ haben an der Stelle $x = a$ eine behebbare Definitionslücke – keine Polstelle – und spielen deshalb in dieser Betrachtung keine Rolle.

26.5.3. Nullstellen

Nullsetzen des Zählers $1 - x^2$ ergibt, dass als Nullstellen nur $x = -1$ und $x = +1$ in Frage kommen, mit den Sonderfällen $a = -1$ und $a = +1$ stimmt allerdings einer dieser Werte mit der Definitionslücke a überein, so dass dann nur eine Nullstelle vorliegt.

1. $a < -1$: zwei Nullstellen; $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$
2. $a = -1$: eine Nullstelle $x_1 = 1$
3. $-1 < a < 1$: zwei Nullstellen; $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$
4. $a = 1$: eine Nullstelle $x_1 = -1$
5. $1 < a$: zwei Nullstellen; $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$

26.5.4. Verhalten im Unendlichen

Das Zählerpolynom ist vom Grad 2, das Nennerpolynom vom Grad 1. Weil der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad, muss es eine schiefe Asymptote geben, deren Gleichung sich durch Polynomdivision bestimmen lässt. Da der Unterschied zwischen Zählergrad und Nennergrad genau 1 ist, ist die Asymptote eine Gerade.

$$
\begin{array}{l}
\quad(-x^2 + 0x \quad + 1) : (2x - 2a) = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2} + \frac{1-a^2}{2(x-a)} \\
-(-x^2 + ax) \\
\qquad\quad - ax \quad + 1 \\
\qquad -(- ax + a^2 \\
\qquad\qquad\quad 1 - a^2
\end{array}
$$

Damit ergibt sich als Asymptotengleichung $y = \frac{1}{2} x - {}^{a}/_{2}$

In den Sonderfällen a = – 1 und a = +1 stimmt der Graph sogar – abgesehen von der Definitionslücke – mit der Asymptote überein. Auch die Grenzwerte von $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$ lassen sich aus der Asymptotengleichung entnehmen.
Für positive x geht der Grenzwert gegen $+\infty$ und für negative x geht der Grenzwert gegen $-\infty$, da der Koeffizient vor den x ein positives Vorzeichen hat.

26.5.5. Ableitung

Für die 1. Ableitung erhält man:

$$
\begin{aligned}
f_a'(x) &= \frac{2(x-a)\cdot(-2x) - (1-x^2)\cdot 2}{[2(x-a)]^2} \\
&= \frac{-4x^2 + 4ax - 2 + 2x^2}{[2(x-a)]^2} \\
&= \frac{-2x^2 + 4ax - 2}{[2(x-a)]^2} \\
&= \frac{2(-x^2 + 2ax - 1)}{[2(x-a)]^2} \\
&= \frac{-x^2 + 2ax - 1}{2(x-a)^2}
\end{aligned}
$$

Für die 2. Ableitung folgt

$$
\begin{aligned}
f''_a(x) &= \frac{2(x-a)^2\,(-2x+2a) - (-x^2+2ax-1)\cdot 2\cdot 2\cdot(x-a)}{(2(x-a)^2)^2} \\
&= \frac{4(x-a)\,[(x-a)(-2x+2a) - (-x^2+2ax-1)]}{4(x-a)^4} \\
&= \frac{(x-a)(-x+a) - (-x^2+2ax-1)}{(x-a)^3} \\
&= \frac{1-a^2}{(x-a)^3}
\end{aligned}
$$

26.5.6. Monotonie

Zur Untersuchung der Monotonie werden als erstes die Trennstellen der Monotonie gesucht. Diese Trennung erfolgt dort, wo die Funktion Extremwerte hat. Dazu wird die 1. Ableitung gleich Null gesetzt. Für das Null setzen der Ableitung reicht es, wenn m an den Zähler des Bruches gleich Null setzt: $0 = -x^2 + 2ax - 1$

Nach der quadratischen Lösungsformel erhält man folgenden Ausdruck:

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Für $a = \pm 1$ existieren keine Punkte mit waagrechter Tangente, da die Lösung mit der Definitionslücke übereinstimmt. Auch für $-1 < a < +1$ gibt es keine Punkte mit waagerechter Tangente, weil die angegebene Lösung in diesem Fall nicht definiert ist. Beim Aufstellen der Monotonietabelle muss auch die Definitionslücke $x = a$ als Intervallgrenze berücksichtigt werden.

1. $a < -1$:

	$x < a-\sqrt{a^2-1}$	$a-\sqrt{a^2-1} < x < a$	$a < x < a+\sqrt{a^2-1}$	$a-\sqrt{a^2-1} < x$
f'(x)	< 0	> 0	> 0	< 0
f(x)	fallend	wachsend	wachsend	fallend

2. – 4. $(-1 \le a \le +1)$

	$x < a$	$a < x$
f'(x)	< 0	> 0
f(x)	fallend	wachsend

5. $1 < a$:

	$x < a-\sqrt{a^2-1}$	$a-\sqrt{a^2-1} < x < a$	$a < x < a+\sqrt{a^2-1}$	$a-\sqrt{a^2-1} < x$
f'(x)	< 0	> 0	> 0	< 0
f(x)	fallend	wachsend	wachsend	fallend

26.5.7. Extremwerte

Extremwerte gibt es dort, wo die Monotonie wechselt und keine Polstelle vorhanden ist. Für die notwendigen y-Werte an diesen Stellen sind die x-Werte in die Ausgangsfunktion einzusetzen.

$$\underset{2(a\pm\sqrt{a^2-1}-a)}{\cancel{1-(a\pm\sqrt{a^2-1})^2}} = \underset{\pm 2\sqrt{a^2-1}}{\cancel{1-a^2\mp 2a\sqrt{a^2-1})-a^2+1}} = \underset{\pm 2\sqrt{a^2-1}}{\cancel{2-2a^2\mp 2a\sqrt{a^2-1})}}$$

$$\frac{-2(a^2-1) \mp 2a\sqrt{a^2-1})}{\pm 2\sqrt{a^2-1}} = \pm\sqrt{a^2-1} - a$$

1. $a < -1$:

Tiefpunkt: $\left(a-\sqrt{a^2-1} / -a+\sqrt{a^2-1} \right)$
Hochpunkt: $\left(a+\sqrt{a^2-1} / -a-\sqrt{a^2-1} \right)$

2. – 4. Keine Extrempunkte

5. $a > +1$

Tiefpunkt: $\left(a-\sqrt{a^2-1} / -a+\sqrt{a^2-1} \right)$
Hochpunkt: $\left(a+\sqrt{a^2-1} / -a-\sqrt{a^2-1} \right)$

26.5.8. Ortskurve der Hoch- und Tiefpunkte

Aus den berechneten Koordinaten der für $a < -1$ und $a > +1$ existierenden Extrempunkte ist sofort zu erkennen, dass die x- und y- Koordinaten gleich sind. Die Punkte liegen also auf der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten
Ortskurve der Hoch und Tiefpunkte: $y = -x$

26.5.9. Krümmung

Sofern nicht $a = -1$ und $a = +1$ hat der Graph von f_a keine Wendepunkte, also keine Punkte, an denen die 2. Ableitung gleich Null wird. Für $a = -1$ und $a = +1$ gibt es ebenfalls keine Wendepunkte. Das Vorzeichen der Ableitung ist ohne Probleme zu ermitteln und ändert sich an der vorhandenen Definitionslücke

1. Fall: $a < -1$

	x < a	x > a
f ''(x)	> 0	< 0
f(x)	Links gekrümmt	Rechts gekrümmt

2. Fall $a = -1$

	x < a	x > a
f ''(x)	= 0	= 0
f(x)	nicht gekrümmt	nicht gekrümmt

3. Fall $-1 < a < +1$

	x < a	x > a
f ''(x)	< 0	> 0
f(x)	rechts gekrümmt	links gekrümmt

4. Fall $a = +1$

	$x < a$	$x > a$
$f''(x)$	$= 0$	$= 0$
$f(x)$	nicht gekrümmt	nicht gekrümmt

5. Fall $a > +1$

	$x < a$	$x > a$
$f''(x)$	> 0	< 0
$f(x)$	Links gekrümmt	Rechts gekrümmt

26.5.10. Symmetrie

Da die Graphen der Scharfunktionen schiefe (also nicht waagrechte) Asymptoten besitzen, ist höchstens Punktsymmetrie möglich. Nur im Fall a =0 liegt Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs vor – erkennbar an der Bedingung $f_a(-x) = f_a(x)$. Das Kriterium für Punktsymmetrie bezüglich eines beliebigen Punktes $(x_0|y_0)$ lautet:

$$f_a(x_0+h) + f_a(x_0 - h) = 2y_0 \text{ .}$$

Als Wert für x_0 kommt nur a in Frage, da die einzige senkrechte Asymptote durch das Symmetriezentrum gehen muss, sofern dieses existiert. Diese Überlegungen führen zu folgendem Ansatz:

$$\begin{aligned} f_a(a+h) + f_a(a-h) &= \frac{1-(a+h)^2}{2(a+h-a)} + \frac{1-(a+h)^2}{2(a-h-a)} \\ &= \frac{1-a^2-2ah-h^2}{2h} + \frac{1-a^2+2ah+h^2}{-2h} \\ &= \frac{-4ah}{2h} \\ &= -2a \end{aligned}$$

Punktsymmetrie bezüglich des Punktes (a /–a)

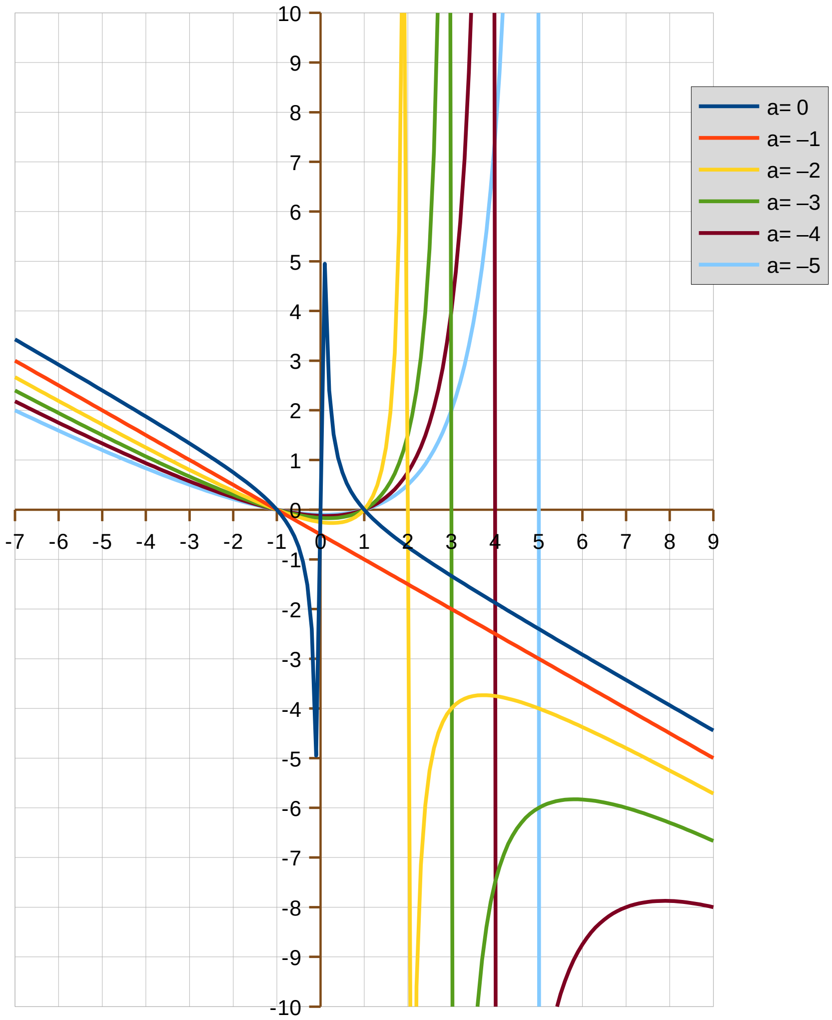
26.5.11. Funktionsgraph der Kurvenschar

$$f_a(x) = \frac{1 - x^2}{2(x-a)}$$

Kurvenschar für a ≤ 0

Wertetabelle für a { 0, –1, –2, –3, –4, –5, –6, –7}

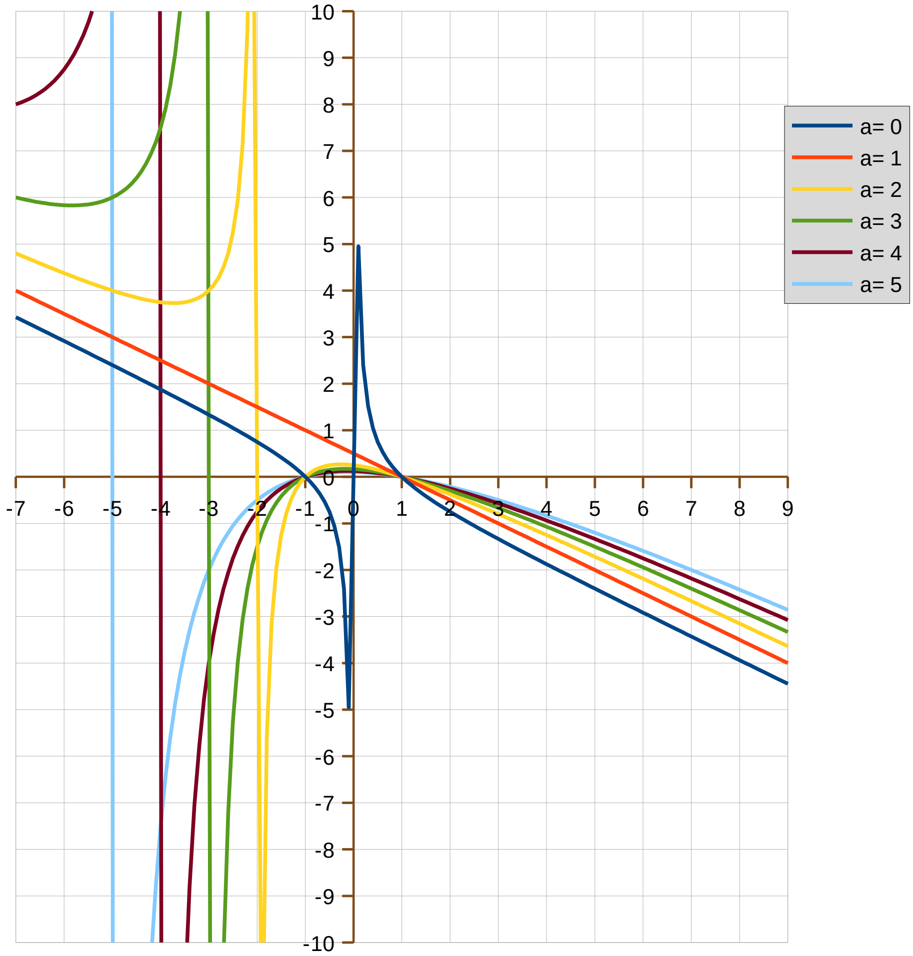
x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f_{-3}(x)$	6	5,83	6	7,5	–	-1,5	0	0,17
$f_{-2}(x)$	4,8	4,38	4	3,75	4	–	0	0,25
$f_{-1}(x)$	4	3,5	3	2,5	2	1,5	–	0,5
$f_{0}(x)$	3,43	2,92	2,4	1,88	1,33	0,75	0	–
$f_{+1}(x)$	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	-0,5
$f_{+2}(x)$	2,67	2,19	1,71	1,25	0,8	0,38	0	-0,25
$f_{+3}(x)$	2,4	1,94	1,5	1,07	0,67	0,03	0	-0,17



Kurvenschar für a ≥ 0

Wertetabelle für a { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_{-3}(x)$	0,17	0	-0,3	–0,67	–1,07	–1,5	–1,94	–2,4
$f_{-2}(x)$	0,25	0	-0,38	–0,8	–1,25	–1,71	–2,19	–2,67
$f_{-1}(x)$	0,5	0	-0,5	–1	–1,5	–2	–2,5	–3
$f_{0}(x)$	–	0	-0,75	–1,33	–1,88	–2,4	–2,92	–3,43
$f_{+1}(x)$	-0,5	–	-1,5	–2	–2,5	–3	–3,5	–4
$f_{+2}(x)$	-0,25	0	–	–4	–3,75	–4	–4,38	–4,8
$f_{+3}(x)$	-0,17	0	1,5	–	–7,5	–6	–5,83	–6



26.6. e – Funktion

Folgende Funktion: $f(x)=e^{2x}-5e^{x}+6$.

26.6.1. Definitionsbereich:

$D=\mathbb{R}$, da man alle x aus der Menge der reellen Zahlen einsetzen darf und es keine Einschränkung gibt.

26.6.2. Symmetrie:

Wir haben die Vermutung (durch Anschauen des Graphen im Taschenrechner), dass der Graph weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch ist.

Für Achsensymmetrie müsste gelten: $f(-x)=f(x)$.

Also zum Beispiel $f(-1)=f(1)$:

$$f(-1)=f(1)$$

$$e^{-2}-5e^{-1}+6=e^{2}-5e+6$$

4,295=-0,202353043... Dies ist eine **falsche Aussage.**

Der Graph von f ist also nicht achsensymmetrisch.

Für Punktsymmetrie müsste gelten: $f(-x)=-f(x)$.

Also zum Beispiel $f(-1)=-f(1)$:

$$e^{-2}-5e^{-1}+6=-e^{2}+5e-6$$

0,2023...=4,295 Dies ist eine **falsche Aussage.**

Der Graph von f ist also nicht achsensymmetrisch.
Daraus folgt, dass der Graph von f weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch ist.

26.6.3. Verhalten für betragsgroße x:

Für $x\to+\infty$, geht $f(x)\to+\infty$, da

$$e^{2x}-5e^{x}+6=e^{2x}(1-\frac{5}{e^{x}}+\frac{6}{e^{2x}})$$

$\frac{5}{e^{x}}$ strebt gegen 0.

$\frac{6}{e^{2x}}$ strebt ebenfalls gegen 0.

1 strebt gegen 1, somit strebt die ganze Klammer gegen 1.
e^{2x} strebt gegen $+\infty$.

e^{2x} damit folgt f(x) gegen $+\infty$.

Für $x \to -\infty$, geht $f(x) \to 6$, da

$e^{2x} - 5e^{x} + 6$

e^{2x} und $5e^{x}$ streben gegen 0.
6 strebt gegen 6.
Also strebt $f(x) \to 6$.

26.6.4. Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:

y-Achsenabschnitt x=0 $f(0) = e^{0} - 5e^{0} + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

$S_y(0/2)$

Nullstellen f(x)=0

$$0 = e^{2x} - 5e^{x} + 6$$
$$0 = (e^{x})^2 - 5e^{x} + 6$$

$$0 = z^2 - 5z + 6$$
$$Anwendung: p,q-Formel:$$
$$z_{1,2} = 2,5 +- \sqrt{6,25-6} = 2,5 + -0,5$$
$$z_1 = 3$$
$$z_2 = 2$$

Substitution $z = e^{x}$:

$$e^{x_1} = 2 \vee e^{x_2} = 3$$
$$\to x_1 = \ln 2 \vee x_2 = \ln 3$$

Rücksubstitution: $e^{x} = z$: $N_1(\ln 3/0)$ und N_2 $(\ln 2/0)$

26.6.5. Ableitungen:

$$f(x) = e^{2x} - 5e^{x} + 6; f'(x) = 2e^{2x} - 5e^{x}; f''(x) = 4e^{2x} - 5e^{x}; f'''(x) = 8e^{2x} - 5e^{x}$$

26.6.6. Extrema:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrema $f'(x) = 0$:

$$0 = 2e^{2x} - 5e^{x} = e^{x}(2e^{x} - 5)$$

$$0 = 2e^{x} - 5 \mid +5 : 2$$
$$2,5 = e^{x} \mid \ln$$
$$x = \ln 2,5$$

Da (nach Definition) beschränke ich mich auf den 2. Faktor:

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrema $f'(x)=0 \wedge f''(x) \neq 0$:

$$f''(\ln 2,5) = 4e^{(\ln 2,5)^2} - 5e^{\ln 2,5} = 4 \bullet 6,25 - 12,5 = 25 - 12,5 = 12,5 > 0 : Minimum$$

Berechnung des Tiefpunktes:

$$f(\ln 2,5) = e^{(\ln 2,5)^2} - 5e^{\ln 2,5} + 6 = 6,25 - 12,5 + 6 = \frac{1}{4} \qquad T(\ln 2,5 / \frac{1}{4})$$

26.6.7. Wendestellen:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer Wendestelle $f''(x)=0$:

$$0 = 4e^{2x} - 5e^x = e^x(4e^x - 5)$$

$$0 = 4e^x - 5 \mid +5 : 4$$
$$\frac{5}{4} = e^x \mid \ln$$
$$x = \ln\frac{5}{4}$$

Da $e^x > und e^x \neq 0$ (nach Definition) beschränke ich mich auf den 2. Faktor:

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer Wendestelle $f''(x)=0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''(\ln\frac{5}{4}) = 8e^{(\ln\frac{5}{4})^2} - 5e^{\ln\frac{5}{4}} = 8 \bullet \frac{25}{16} - \frac{25}{4} = 6,25 \neq 0$$

:

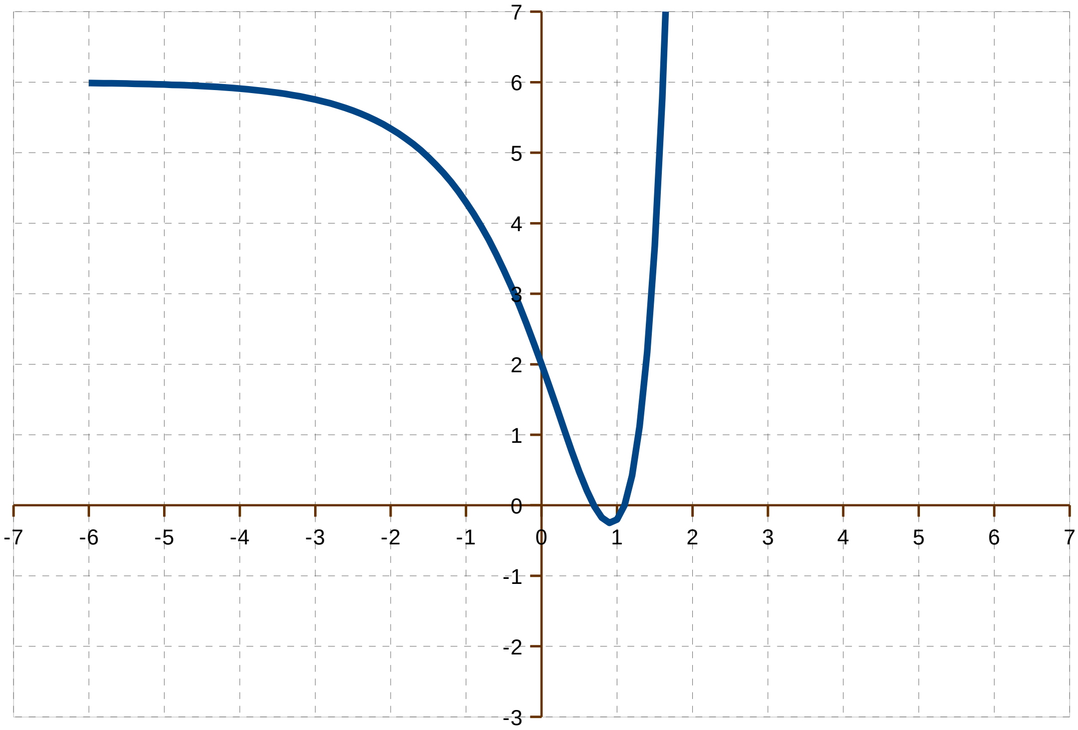
$$f(\ln\frac{5}{4}) = 1,3125$$
$$W(\ln\frac{5}{4} / 1,3125)$$

Berechnung des Wendepunktes:

26.6.8. Wertebereich:

$$W = \{y \mid y \geq \frac{1}{4}\}$$

26.6.9. Graph zeichnen:



26.7. e – Funktion – Schar

Hier möchte ich eine Abituraufgabe aus Hessen verwenden:

Für jedes k $(k \in \mathbb{R}; k > 1)$ ist eine Funktion $f_k(x) = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$ und deren 2. Ableitungsfunktion $f_k''(x) = \frac{x}{2k^2} \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Untersuche den Graphen der Funktion f_k bezüglich Definitionsbereich, Verhalten für betragsgroße x-Werte, Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkten sowie Wertebereich.

26.7.1. Definitionsbereich:

$D = \mathbb{R}$, da ich für x alle Zahlen einsetzen darf.

$$(\frac{1}{2}x - k) \to \infty$$

$$e^{\frac{1}{k}x} \to \infty$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} \to \infty$$

26.7.2. Verhalten für betragsgroße x:

Für $x \to \infty$, geht $f(x) \to \infty$, da

$$(\frac{1}{2}x - k) \to -\infty$$

$$e^{\frac{1}{k}x} \to 0$$

Für $x \to -\infty$, geht $f(x) \to 0$, da

Da aber $e^{\frac{1}{k}x}$ schneller gegen 0 wächst, als $(\frac{1}{2}x - k)$ gegen – unendlich, strebt der

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} \to 0$$

Funktionsterm gegen 0.

26.7.3. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkte mit der y-Achse: x=0

$$f_k(0) = (\frac{1}{2} \bullet 0 - k) \bullet e^{\frac{1}{k} \bullet 0} = -k$$

$$S_y(0/-k)$$

Nullstellenberechnung: f(x)=0

$0 = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x}$ Da $e^{\frac{1}{k}x}$ nicht 0 werden kann, beschränke ich mich zur Nullstellenberechnung auf den 1. Faktor, denn ein Produkt wird 0, wenn einer der Faktoren 0 wird.

$$0 = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x}$$

$$0 = \frac{1}{2}x - k$$

$$x = 2k$$

$$N(2k/0)$$

26.7.4. Ableitungen:

$$f_k(x)=(\frac{1}{2}x-k)\bullet e^{\frac{1}{k}x}\,(x\in\mathbb{R})$$

$$f_k'(x)=\frac{1}{k}\bullet e^{\frac{1}{k}x}\bullet(\frac{1}{2}x-k)+\frac{1}{2}\bullet e^{\frac{1}{k}x}$$

$$f_k'(x)=e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x-1+\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x-\frac{1}{2})$$

$$f_k''(x)=\frac{1}{k}\bullet e^{\frac{1}{k}x}\bullet(\frac{1}{2k}x-\frac{1}{2})+e^{\frac{1}{k}x}\bullet\frac{1}{2k}$$

$$f_k''(x)=e^{\frac{1}{k}x}\bullet(\frac{1}{2k^2}x-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k})=e^{\frac{1}{k}x}\bullet\frac{1}{2k^2}x=e^{\frac{1}{k}x}\bullet\frac{x}{2k^2}$$

$$f_k'''(x)=\frac{1}{k}\bullet e^{\frac{1}{k}x}\bullet\frac{x}{2k^2}+e^{\frac{1}{k}x}\bullet\frac{1}{2k^2}=e^{\frac{1}{k}x}(\frac{x}{2k^3}+\frac{1}{2k^2})$$

26.7.5. Extrempunkte:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: f'(x)=0

$$0=e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x-\frac{1}{2})\,|:e^{\frac{1}{k}x}, zulässig, da\, e^{\frac{1}{k}x}\neq 0(Definition)$$

$$0=\frac{1}{2k}x-\frac{1}{2}\,|+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2k}x\,|\bullet 2k$$

$$x=k$$

mögliche Extremstelle!

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes:

$f'(x)=0\wedge f''(x)\neq 0$:

$$f_k''(x)=e^{\frac{1}{k}x}\bullet(\frac{1}{2k^2}x-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k})=e^{\frac{1}{k}x}\bullet\frac{1}{2k^2}x=e^{\frac{1}{k}x}\bullet\frac{x}{2k^2}$$

$$f''(k)=e^{\frac{1}{k}\bullet k}\bullet\frac{k}{2k^2}=e\bullet\frac{1}{2k}>0, da\, k>1: Minimum$$

$$Berechnung Des Tiefpunktes:$$

$$f_k(x)=(\frac{1}{2}x-k)\bullet e^{\frac{1}{k}x}\,(x\in\mathbb{R})$$

$$f(k)=(\frac{1}{2}k-k)\bullet e^{\frac{1}{k}\bullet k}=-\frac{1}{2}ek$$

$$T(k/-\frac{1}{2}ek)$$

26.7.6. Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes: f''(x)=0

$$f_k''(x) = \frac{1}{k} \bullet e^{\frac{1}{k}x} \bullet (\frac{1}{2k}x - \frac{1}{2}) + e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{1}{2k} = e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2}$$

$$0 = e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2} \,|: e^{\frac{1}{k}x}, zulässig, da e^{\frac{1}{k}x} \neq 0 (Definition)$$

$$0 = \frac{1}{2k^2}x \,|: \frac{1}{2k^2}, zulässig, da k > 1$$

$$x = 0$$

mögliche Wendestelle!

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes:

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{k} \bullet e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2} + e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{1}{2k^2} = e^{\frac{1}{k}x} (\frac{x}{2k^3} + \frac{1}{2k^2})$$

$$f_k'''(0) = e^{\frac{1}{k} \bullet 0} \bullet \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2k^2} \neq 0, da k > 1$$

$$Berechnung Des Wendepunktes:$$

$$f_k(x) = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$$

$$f_k(0) = -k$$

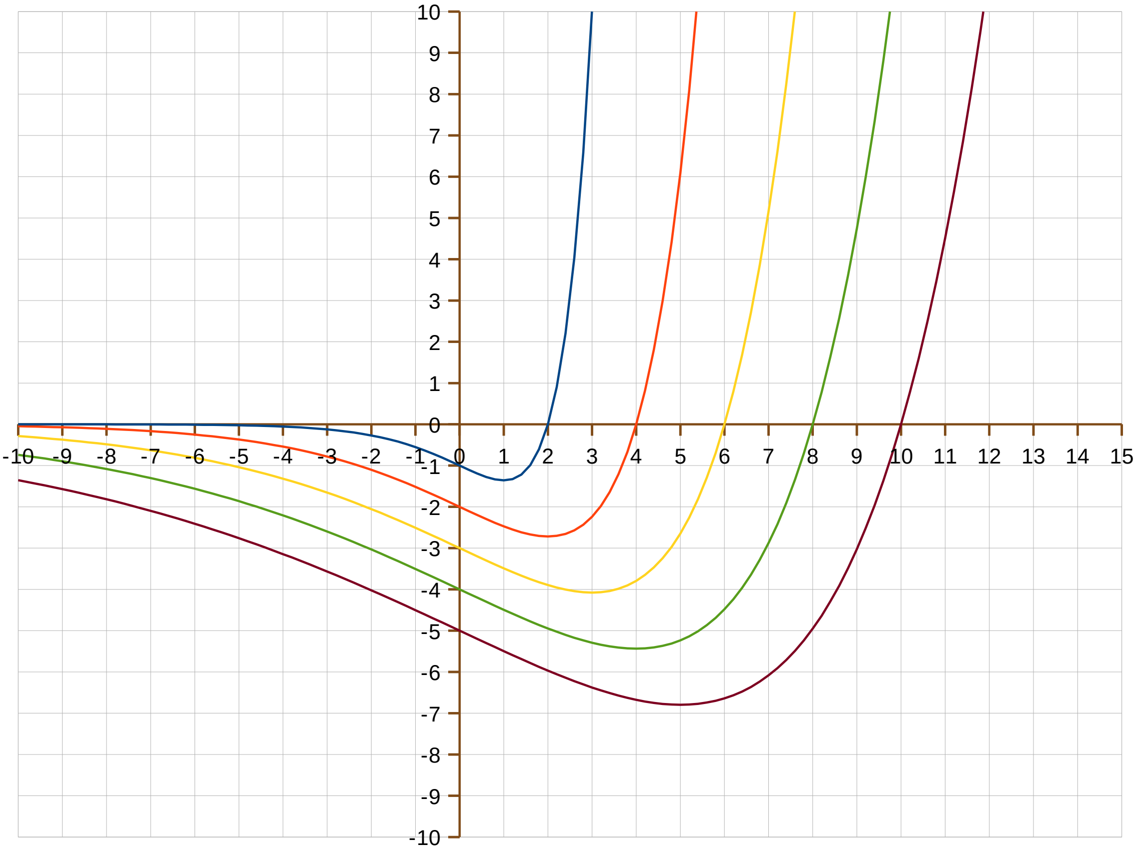
$$W(0/-k)$$

26.7.7. Wertebereich:

$W = \{y \mid y \geq -\frac{1}{2}ek\} = \mathbb{R}$

Denn der Tiefpunkt ist von k abhängig, das heißt, dass dieser in Richtung der y-Achse nach unten beliebig verschoben werden, denn k>1, somit kann der Tiefpunkt nur einen negativen y-Wert annehmen und somit ist die Wertemenge die Menge aller reellen Zahlen!

26.7.8. Graph


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

26.8. ln – Funktion

Folgende Funktion: $f(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 1)$.

26.8.1. Definitionsbereich:

Da $\ln x$ nur für x>0 definiert ist, und da negative Wurzeln in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert sind, ist $D = \mathbb{R}^{+}$.

26.8.2. Verhalten für betragsgroße x:

Für $x \to +\infty$ geht $f(x) \to +\infty$, da

$2\sqrt{x}(\ln x - 1)$ gegen $+\infty$ strebt.

26.8.3. Symmetrie:

Für Achsensymmetrie müsste gelten f(-x)=f(x)
Prüfen von f(-1)=f(1):

$$2\sqrt{-1}(\ln -1 - 1) = 2\sqrt{1}(\ln 1 - 1)$$

Dies ist eine **falsche Aussage, außerdem ist nicht alles definiert.**

Somit liegt keine Achsensymmetrie vor.

Für Punktsymmetrie müsste gelten f(-x)=-f(x)
Prüfen von f(-1)=-f(1):

$$2\sqrt{-1}(\ln -1 - 1) = -2\sqrt{1}(\ln 1 - 1)$$

Dies ist eine **falsche Aussage, außerdem ist nicht alles definiert.**

Somit liegt keine Punktsymmetrie vor.
Daraus kann man schließen, dass der Graph weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch ist.

26.8.4. Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:

a) x=0

$$f(0) = 2\sqrt{0}(\ln 0 - 1) = 0$$
$$S(0/0)$$

b) y = 0

$$-f(x) = 0$$
$$0 = 2\sqrt{x}(\ln x - 1) \mid : 2\sqrt{x}$$
$$0 = \ln x - 1 \mid +1$$
$$1 = \ln x \mid e$$
$$x = e = 2,72$$

26.8.5. Ableitungen:

$$f(x)=2\sqrt{x}(\ln x-1)$$
$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\bullet(\ln x-1)+2\sqrt{x}\bullet\frac{1}{x}$$
$$f''(x)=2\sqrt{x}\bullet(\ln x-1)+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\bullet\frac{1}{x}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\bullet\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\bullet(-\frac{1}{x^2})$$
$$f''(x)=2\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\bullet\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\bullet(\ln x-1-\frac{1}{x^2})$$
$$f''(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\bullet\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\bullet(\ln x-1-\frac{1}{x^2})$$
$$f'''(x)=4\sqrt{x}\bullet\frac{1}{x}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\bullet(-\frac{1}{x^2})+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\bullet(\ln x-1-\frac{1}{x^2})+2\sqrt{x}\bullet(\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^3})$$

26.8.6. Extrema:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrema: $f'(x)=0$:

$$0=\frac{4}{3}x\bullet\sqrt{x}\bullet(\ln x-1)+2\sqrt{x}\bullet\frac{1}{x}\,|:\sqrt{x}$$
$$0=\frac{4}{3}x\bullet(\ln x-1)+2\bullet\frac{1}{x}\,|\bullet x$$
$$0=\frac{4}{3}x^2\bullet(\ln x-1)+2\,|-2$$
$$-2=\frac{4}{3}x^2\bullet(\ln x-1)\,|\bullet\frac{3}{4}$$
$$-\frac{3}{2}=x^2\bullet(\ln x-1)\,|\,e\,|:x^2$$
$$e^{-\frac{3}{2}\bullet x^{-2}}=e^{(\ln x-1)}$$
$$e^{-\frac{3}{2}\bullet x^{-2}}=x-1$$

$x=0,37$

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrema: $f'(x)=0\wedge f''(x)\neq 0$:

$$f''(0,37)>0:Minimum$$
$$T(0,37/-2,43)$$

26.8.7. Wendestellen:

$$0=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\bullet\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\bullet(\ln x-1-\frac{1}{x^2})\,|:\sqrt{x}$$

$$0=\frac{8}{3}x\bullet\frac{1}{x}+2\bullet(\ln x-1-\frac{1}{x^2})$$

$$0=\frac{8}{3}+\ln x^2-2-\frac{2}{x^2}\,|+2+\frac{2}{x^2}$$

$$2+\frac{2}{x^2}=\frac{8}{3}+\ln x^2\,|-\frac{8}{3}$$

$$-\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2}=\ln x^2\,|\,e$$

$$e^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2}}=x^2$$

$$x=2,72$$

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrema: $f''(x)=0$:

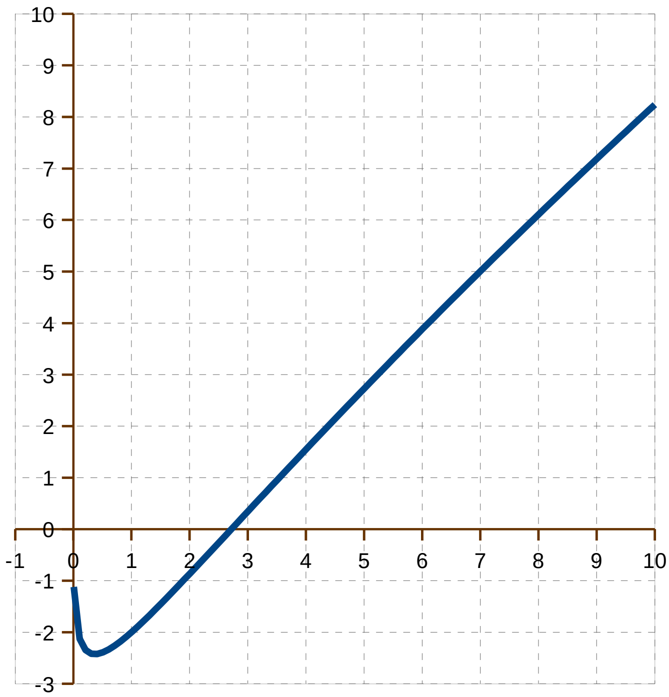
Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrema: $f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$:

$$\boxed{\begin{array}{l} f'''(2,72)\neq 0 \\ W(2,72/6) \end{array}}$$

26.8.8. Wertebereich:

$$W=\{y\,|\,y>-2,43\}$$

26.8.9. Graph



26.9. Natürliche Logarithmusfunktionsschar

Folgende Funktion $f_k(x) = \ln(x^2 + k); k > 0$.

26.9.1. Definitionsbereich:

$D = \mathbb{R}$

26.9.2. Symmetrie:

Wir haben die Vermutung, dass **Achsensymmetrie** vorliegt. Somit müssten wir f(-x)=f(x) nachweisen:

$$f_k(-x) = f_k(x)$$
$$\ln((-x)^2 + k) = \ln(x^2 + k)$$
$$\ln(x^2 + k) = \ln(x^2 + k)$$

Daraus folgt, dass der Graph **achsensymmetrisch** ist.

26.9.3. Verhalten für betragsgroße x:

Für $x \to +\infty$ geht $f(x) \to +\infty$, da

$x^2 + k$ gegen $\to +\infty$ geht und somit geht $\ln(x^2 + k)$ ebenfalls gegen $\to +\infty$.

Für $x \to -\infty$ geht $f(x) \to +\infty$, da

$x^2 + k$ gegen $\to +\infty$ geht und somit geht $\ln(x^2 + k)$ ebenfalls gegen $\to +\infty$.
Oder man verweist auf die Achsensymmetrie.

26.9.4. Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:

a) x=0

$$f(0) = \ln(x^2 + k) = \ln k$$
$$S_y(0/\ln k)$$

b) Nullstellen: y = 0

$$0 = \ln(x^2 + k) \,|\, e$$
$$1 = x^2 + k$$
$$1 - k = x^2 \,|\, \sqrt{\ldots}$$
$$x_{1,2} = +- \sqrt{1-k}$$
$$Fürk = 1 : eineNullstellebeix = 0$$
$$Für 0 < k < 1 : 2 Nullstellenbeix_{1,2} = +- \sqrt{1-k}$$
$$Fürk > 1 : keineNullstellen$$

26.9.5. Ableitungen:

$$f_k(x) = \ln(x^2 + k); f'(x) = \frac{1}{x^2 + k} \bullet 2x = \frac{2x}{x^2 + k}$$
$$f''(x) = \frac{2(x^2 + k) - 2x \bullet 2x}{(x^2 + k)^2} = \frac{2(x^2 + k) - 4x^2}{(x^2 + k)^2} = \frac{2x^2 + 2k - 4x^2}{(x^2 + k)^2} = \frac{-2x^2 + 2k}{(x^2 + k)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{(-4x)(x^2 + k) - (-2x^2 + 2k) \bullet 2(x^2 + k) \bullet 2x}{(x^2 + k)^4}$$
$$f'''(x) = \frac{-4x(x^2 + k) - 4x(-2x^2 + 2k)}{(x^2 + k)^3}$$

26.9.6. Extrema:

$$0 = \frac{2x}{x^2 + k}$$
$$0 = 2x$$
$$x = 0$$

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes $f'(x) = 0$:

$$f''(0) = \frac{2k}{k^2}, dak > 0 :> 0 : Minimum$$
$$f(0) = \ln k$$
$$T(0/\ln k)$$

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$:

26.9.7. Wendestellen:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes $f''(x)=0$:

$$0=\frac{-2x^2+2k}{(x^2+k)^2} \mid \bullet (x^2+k)^2$$
$$0=-2x^2+2k$$
$$x=+-\sqrt{k}$$

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes
$f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$:

$$f'''(\sqrt{k})=\frac{-4\sqrt{k}\bullet 2k}{(2k)^3}\neq 0$$
$$f'''(-\sqrt{k})=\frac{4\sqrt{k}\bullet 2k}{(2k)^3}\neq 0$$
$$W_1(\sqrt{k}/\ln 2k);W_2(-\sqrt{k}/\ln 2k)$$

26.9.8. Wertebereich:

$$W=\{y \mid y\geq \ln k\}$$

26.9.9. Graph