19. Trigonometrie

Die in der Elementargeometrie auftretenden Gleichungen sind algebraisch. Für das Dreieck enthalten diese Gleichungen entweder nur Winkel, z.B. im **Satz von der Winkelsumme** im Dreieck, oder **nur Seiten** sowie sonstige Strecken und den Flächeninhalt, z.B. der Satz des Pythagoras.

Der Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln des ebenen Dreiecks ist nicht durch algebraische Gleichungen darstellbar. Hierfür bedarf es eines besonderen Abschnitts der Geometrie:

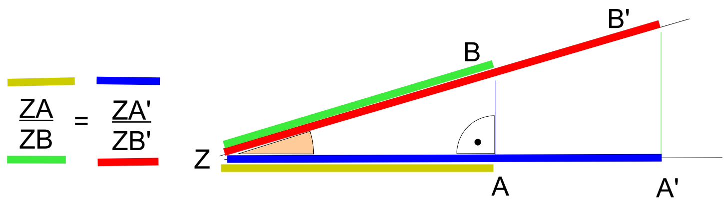
> Die Trigonometrie der Ebene hat die Aufgabe, die **Beziehungen zwischen den Strecken und Winkeln** im ebenen Dreieck und in anderen ebenen, geradlinig begrenzten Figuren herzustellen.

19.1. Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck

Ein Dreieck ist durch die drei Seiten eindeutig festgelegt, deshalb gehört die Beziehung (SSS) auch zu den **Kongruenzsätzen**, dh. Dreiecke, die in allen drei Seiten überein-stimmen sind kongruent – deckungsgleich –.
Dreiecke, bei denen die drei Winkel übereinstimmen sind dagegen nicht deckungs-gleich. Deshalb gehört die Beziehung (WWW) nur zu den **Ähnlichkeitssätzen**.
Dreiecke, die in drei Winkeln übereinstimmen sind ähnlich. In ähnlichen Dreiecken gilt der Strahlensatz, da die Verhältnisse der entsprechenden Seiten immer konstant sind. Dieses konstante Verhältnis der Seitenlängen wird durch die Trigonometrie genutzt.

Da es sich um Verhältnisse handelt kann der Strahlensatz in verschiedenen Varianten aufgeschrieben werden. Hier wird die Variante gewählt, dass auf jeder Seite des Gleichheitszeichens die Seiten ein und desselben Dreiecks stehen.

Aus dem 1. Strahlensatz über die Abschnitte auf den Strahlen, wenn sie durch parallele Geraden geschnitten werden, ergibt sich folgende Beziehung:



Betrachtet man dieses Verhältnis in Beziehung zum rechtwinkligen Dreieck bezüglich des orange eingetragenen Winkels, der in beiden Dreiecken enthalten ist, so kann man sagen:

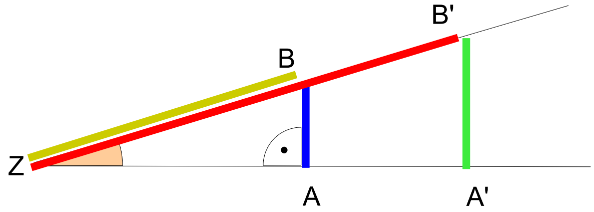
> Das Verhältnis zwischen der anliegenden Kathete und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist konstant.

Dieses Verhältnis bezeichnet man als **cos** (Kosinus) des Winkels:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{ZA}{ZB} = \frac{ZA'}{ZB'} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

Aus dem 2. Strahlensatz über das Verhältnis der Strecken auf den Strahlen und zwischen den Strahlen auf den Parallelen entsteht folgende Beziehung:

$$\frac{AB}{ZB} = \frac{A'B'}{ZB'}$$



Betrachtet man dieses Verhältnis in Beziehung zum rechtwinkligen Dreieck bezüglich des orange eingetragenen Winkels, der in beiden Dreiecken enthalten ist, so kann man sagen:

Das Verhältnis zwischen der gegenüberliegenden Kathete und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist konstant.

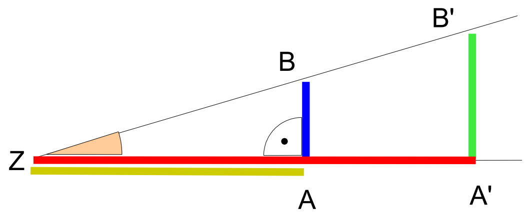
Dieses Verhältnis bezeichnet man als **sin** (Sinus) des Winkels:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{AB}{ZB} = \frac{A'B'}{ZB'} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

In gleicher Weise kann man den 2. Strahlensatz für den anderen Strahl verwenden. Bei diesen Verhältnissen werden zwei Möglichkeiten benutzt, wobei die zweite eine geringe Bedeutung in der Trigonometrie hat.

$$\frac{ZA}{AB} = \frac{ZA'}{A'B'}$$

$$\frac{AB}{ZA} = \frac{A'B'}{ZA'}$$



Betrachtet man dieses Verhältnis in Beziehung zum rechtwinkligen Dreieck bezüglich des orange eingetragenen Winkels, der in beiden Dreiecken enthalten ist, so kann man sagen:

Das Verhältnis zwischen den beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist konstant.

Dabei ist die zweite Formel nur der Kehrwert der ersten Formel. Die erste Formel betrachtet das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete und wird als **tan** (Tangens) des Winkels bezeichnet:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{ZA}{AB} = \frac{ZA'}{A'B'} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}}$$

Die zweite Formel betrachtet das Verhältnis von Ankathete zu Gegenkathete und wird als **cot** (Kotangens) des Winkels bezeichnet:

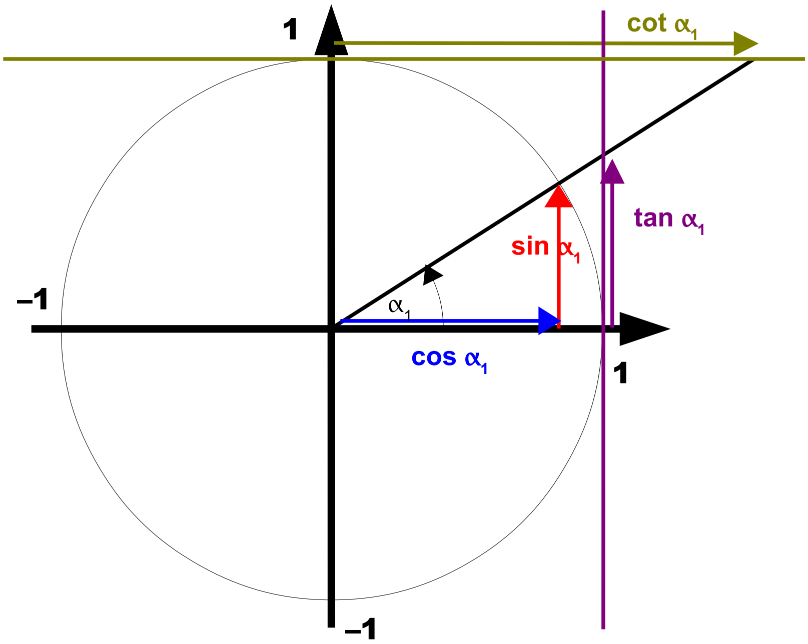
$$\boxed{\cot\alpha = \frac{AB}{ZA} = \frac{A'B'}{ZA'} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}}$$

Auf grund der engen Beziehung zwischen tan und cot wird der cot in der Schule zu Unrecht nicht behandelt, auch wenn er gegenüber den anderen Winkelfunktionen nicht die gleiche Bedeutung hat. Jetzt könnte man mit Recht fragen gibt es die umgekehrten Verhältnisse auch für die Quotienten des sin und des cos. Diese gibt es tatsächlich und werden mit Sekans und Cosekans bezeichnet, besitzen aber auch in der Vermessungstechnik überhaupt keine Bedeutung und werden in keinen Werken genauer behandelt.

Nachdem die Winkelfunktionen als Verhältnisse zweier Seiten definiert sind und festgestellt wurde, dass das Verhältnis in Abhängigkeit vom Winkel immer das gleiche ist, egal, wie groß das rechtwinklige Dreieck ist, kann man auch den absoluten Wert dieses Verhältnisses bestimmen. Man zeichne ein beliebiges Dreieck, messe die Seitenlängen und berechne das Verhältnis. Auf diese Art und Weise wäre es möglich den sin oder cos des Winkels von 23° zu bestimmen. Werden alle die berechneten Werte in einer Kurve angetragen, bei der der jeweilige Winkel die x-Achse ist und das ermittelte Verhältnis die y-Achse, erhält man die Kurve der jeweiligen Winkelfunktion. Da bei den beiden wichtigsten Funktionen sin und cos durch die Hypotenuse geteilt wird eignen sich zur Ermittlung der Funktionswerte solche Dreiecke besonders gut, bei denen die Seitenlänge der Hypotenuse 1 beträgt, das vereinfacht das Dividieren. Aus diesem Grund berechnet man die Funktionswerte der Winkelfunktionen als Werte eines sogenannten Einheitskreises, ein Kreis, bei dem der Radius gleich 1 ist.

19.2. Die Winkelfunktionen am Einheitskreis

Die Untersuchung der Winkelfunktionen am Einheitskreis stellt eine gewisse Normierung dar. Da die betrachteten Verhältnisse für die Winkelfunktionen für alle rechtwinkligen Dreiecke gelten, wenn sie nur den zu untersuchenden Winkel enthalten, ist es unbedeutend, welches von den unendlich vielen möglichen Dreiecken man betrachtet. Deshalb zeichnet man einen Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit dem Radius 1. Dieser Radius ist dann zu dem betrachteten Dreieck die Hypotenuse und die Verhältnisse der Winkelfunktionen können direkt als Streckenlängen abgelesen werden.



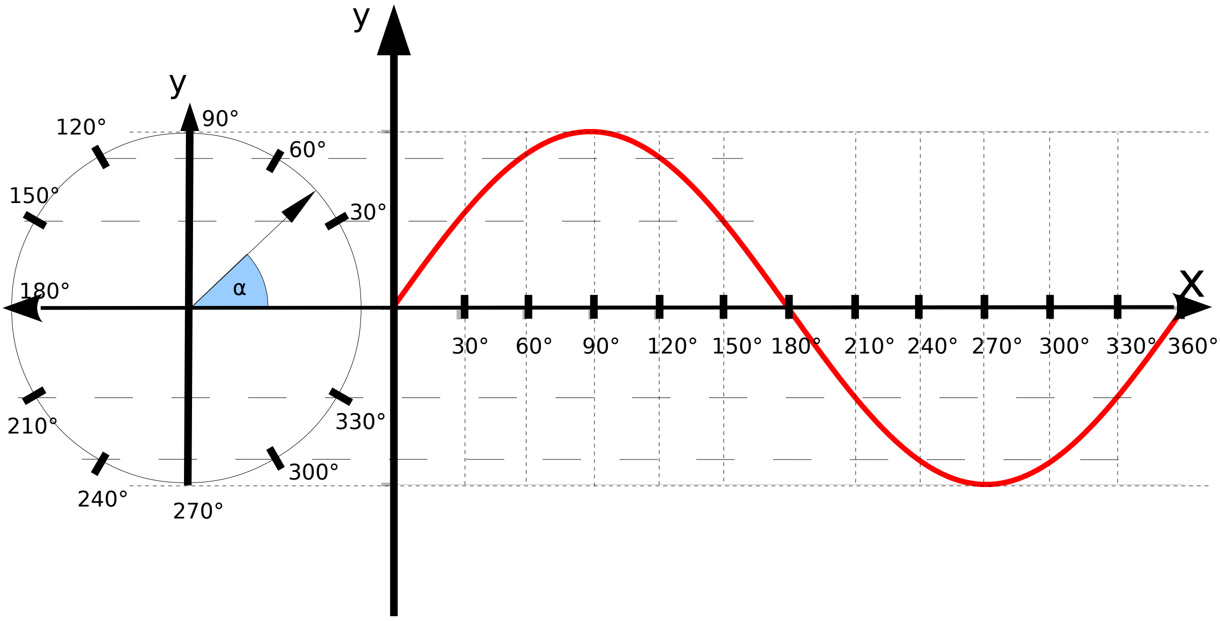
In das Koordinatensystem wird außerdem ein Winkel α_1 eingezeichnet.

- Das Verhältnis für den **sin** des Winkels entspricht dann genau der Länge der Gegenkathete, da die Hypotenuse den Wert 1 hat. In der obigen Zeichnung rot eingetragen. Diese Länge ist der senkrechte Abstand des Schnittpunktes des Winkels mit dem Einheitskreis und der x- Achse oder: von diesem Schnittpunkt ist der y–Wert der Wert des sin des Winkels. In Abhängigkeit vom Winkel wird sich die Länge dieser Strecke verändern.
- Das Verhältnis für den **cos** des Winkels entspricht dann genau der Länge der Ankathete, da die Hypotenuse den Wert 1 hat. In der obigen Zeichnung blau eingetragen. Diese Länge ist der waagerechte Abstand des Schnittpunktes des Winkels mit dem Einheitskreis und der y-Achse oder: von diesem Schnittpunkt ist der x– Wert der Wert des cos des Winkels. In Abhängigkeit vom Winkel wird sich auch die Länge dieser Strecke verändern.

Für die Berechnung des tan und des cot muss die Zeichnung um zwei „Tangenten“ an den Kreis erweitert werden. Einmal wird eine Tangente an den Kreis im Punkt (1|0) (magenta eingezeichnet) und eine Co-Tangente im Punkt (0|1) (braun eingezeichnet) gelegt. Der Strahl der durch den Winkel erzeugt wird, ist so weit zu verlängern, dass er mit den beiden Tangenten einen Schnittpunkt besitzt. Die Länge der Strecken von den jeweiligen Achsen bis zum Schnittpunkt sind die Werte für den tan und den cot des Winkels.

19.3. Der Sinus

Jetzt sollen die Werte des sin betrachtet werden, wenn man den Winkel einmal von 0° bis 360° um den Koordinatenursprung drehen läßt.

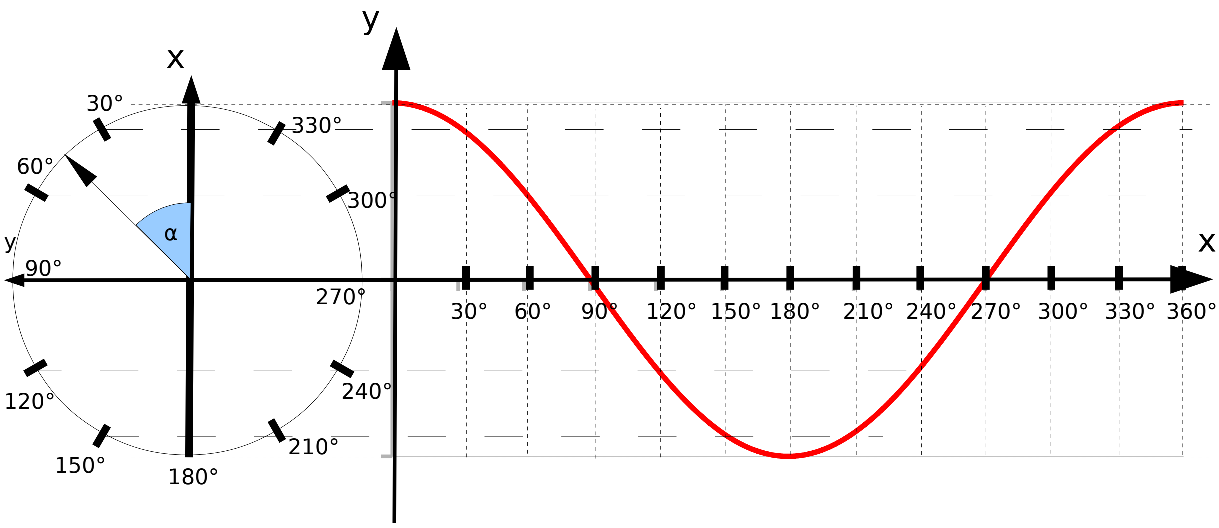


Der Zeiger des Winkels bewegt sich von 0° bis 360°. Der jeweilige Punkt auf dem Kreis wird markiert und waagerecht in das Koordinatensystem an die x–Position des Winkels verschoben. Aus den so konstruierten Punkten entsteht das Funktionsbild er Sinus-funktion. Außer, dass sich das Funktionsbild nach 360° wiederholt und auch in Richtung der negativen x–Achse genau so fortsetzt, gibt es noch andere wichtige Eigenschaften der Funktion:

y = sin(x)	
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-1 \leq y \leq 1$
Nullstelle	$x = k * 180°$
Extrema	$x = 90° + k * 360°$; Maxima $x = 270° + k * 360°$; Minima
Wendepunkte	$x = 180° + k * 180°$
Periode	360°
Monotonie	$-90° + k * 360° \leq x \leq 90° + k * 360°$ monoton wachsend $90° + k * 360° \leq x \leq 270° + k * 360°$ monoton fallend

19.4. Der Cosinus

Für die Untersuchung des cos muss der Einheitskreis um 90° gedreht werden, da der cos die x – Abschnitte darstellt. Dann können die Werte analog waagerecht in das Koordinatensystem gezogen werden. Die x–Achse des Einheitskreises zeigt nach oben!

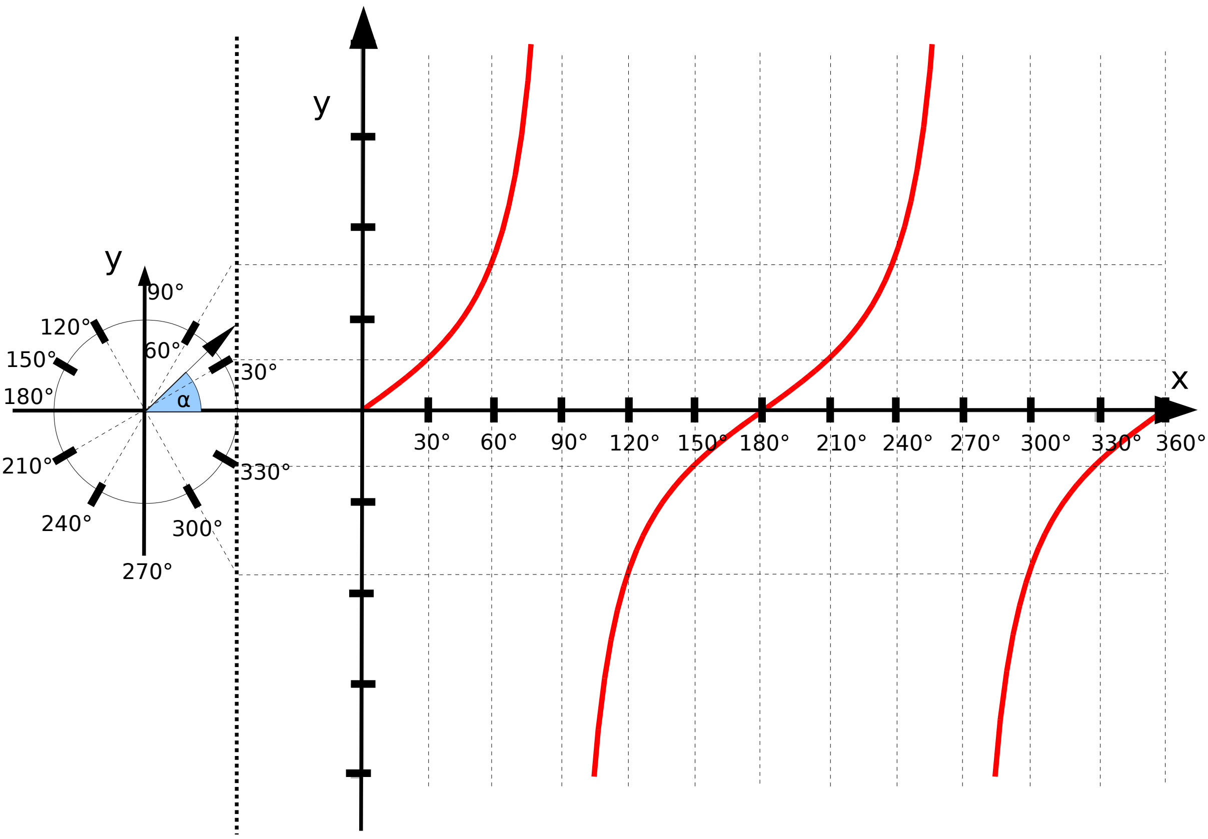


Aus der Projektion des Winkels auf die x–Achse entsteht das Funktionsbild des cos. Es ist zu erkennen, dass das Funktionsbild dem des sin ähnelt, es ist nur in Richtung x–Achse verschoben. Tatsächlich gilt die Beziehung : cos (x) = sin (x + 90°).
Die Eigenschaften der cos Funktion:

y = cos(x)	
Definitionsbereich	- ∞ < x < +∞
Wertebereich	-1 ≤ y ≤ 1
Nullstelle	x = 90° + k * 180°
Extrema	x = 0° + k * 360°; Maxima x = 180° + k * 360°; Minima
Wendepunkte	x = 90° + k * 180°
Periode	360°
Monotonie	0°+ k * 360° ≤ x ≤ 180° + k * 360° monoton fallend 180°+ k * 360° ≤ x ≤ 360° + k * 360° monoton wachsend

19.5. Der Tangens

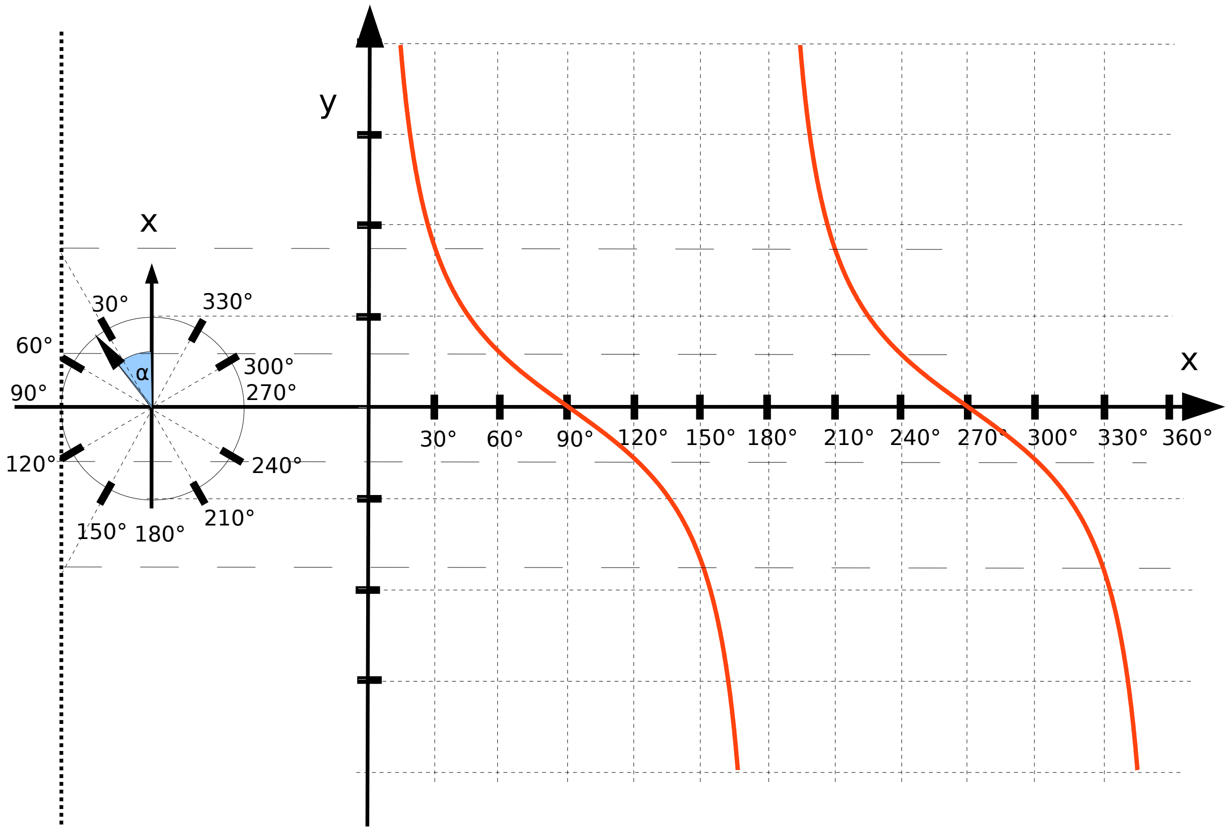
Die eingetragenen Winkel sind bis auf die Tangente zu verlängern und dann der entstandene Wert in das Koordinatensystem zu übertragen. Für die Winkel zwischen 90° und 270°, auf der negativen Seite der x–Achse, sind die Winkel auf die positive Seite der x–Achse zu verlängern, auf der auch die Tangente liegt und auf dieser Seite abzulesen. Es ist keine Tangente auf der Seite der negativen x–Achse zu zeichnen.



y = tan(x)	
Definitionsbereich	$-90° + k * 180° < x < 90° + k * 180°$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 0° + k * 180°$
Extrema	keine
Wendepunkte	$x = 0° + k * 180°$
Polstellen	$x = 90° + k * 180°$
Periode	180°
Monotonie	$-90° + k * 180° \leq x \leq 180° + k * 180°$ monoton wachsend

19.6. Der Cotangens

Für das Funktionsbild des Cotangens ist der Einheitskreis wieder zu drehen, so dass die x–Achse nach oben zeigt. Die Winkel, die nicht auf der Seite sind, auf der sich die Tangente befindet werden wieder über den Koordinatenursprung auf die andere Seite verlängert. Beim Betrachten der Funktion bitte beachten, dass z.B der Winkel 300° nicht gleich dem cot 60° ist, sondern den cot 120°, da die Verlängerung auf die andere Seite des Koordinatensystems erfolgen muss.



y = cot(x)	
Definitionsbereich	0° + k * 180° < x < 180° + k * 180°
Wertebereich	-∞ < y < +∞
Nullstelle	x = 90° + k * 180°
Extrema	keine
Wendepunkte	x = 90° + k * 180°
Polstellen	x = 0° + k * 180°
Periode	180°
Monotonie	0°+ k * 180° ≤ x ≤ 180° + k * 180° monoton fallend

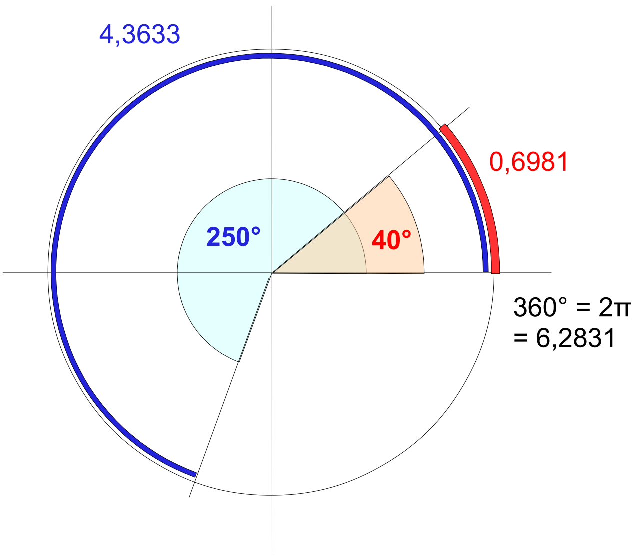
19.7. Angabe von Winkeln im Bogenmass

Die Einteilung der Winkel eines Vollkreises in 360° ist relativ willkürlich entstanden und hat damit zu tun, dass in früheren Zeiten der Zahl 12 eine größere Bedeutung zukam als der Zahl 10, die wieder nur durch unser Stellenwertsystem und die Anzahl der Finger entstanden ist. Es gibt keine fachliche Begründung, warum die Zahl 10 auserwählt ist. Andere Bereiche, wie die EDV z.B. bevorzugen die Zahl 2 oder die Zahl 16. Deshalb wird im Bereich der Vermessung auch nicht mit 360° als voller Kreis gearbeitet, sondern mit 400 Grad. Das hat den Vorteil dass die Teilwinkel 10°, 15°, 20° eines Vollkreises besser angegeben werden können. In der Literatur findet man für die Gradeinteilung in 360 Teile die Bezeichnung „Altgrad“ oder „Grad“ mit dem Symbol „° “ und für die Gradeinteilung in 400 Grad die Bezeichnung „Neugrad“ oder „Gon“ mit dem Symbol „^{g}“ im Unterschied zu Grad. Ein Winkel von 35^g ist also ein Winkel, der in Neugrad angegeben ist. Die Umrechnung von Altgrad in Neugrad ist über den Dreisatz natürlich trivial. Altgrad * (400 / 360) = Altgrad / 0,9 = Neugrad und Neugrad * (360/400) = Neugrad * 0,9 = Altgrad .

Für die Benutzung von Winkelfunktionen wurde aber schon sehr bald auch die Maßeinheit Bogenmass verwendet. Bei dieser Maßeinheit hat man sich an dem Umfang des Kreises orientiert. Die Herleitung der Winkelfunktionen am Einheitskreis ist ein sehr anschaulicher Zugang zur Trigonometrie. Dabei stellt man sehr leicht fest, dass jeder Winkel eindeutig einem Stück des Kreisumfanges entspricht. Die Formel für den Kreisumfang ist $U = 2\pi r$ und ist damit nur vom Radius des Kreises abhängig. Da Trigonometrie aber nur am Einheitskreis betrieben wird, ohne Berücksichtigung des Radius, gilt für diesen Einheitskreis die Umfangsformel $U = 2\pi$. Über diese Beziehung kann man eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen Gradmaß und Bogenlänge herstellen:

$$360° \triangleq 2\pi$$

Der Vorteil gegenüber dem Gradmass liegt darin, dass es sich auch um eine Länge handelt, die eigentlich für das Zeichnen der Funktionen besser geeignet ist. Die Werte der x – Achse sind bei allen Funktionen Längeneinheiten, mit diesem Bogenmass werden sie auch bei den trigonometrischen Funktionen Längeneinheiten. Dass häufig beim Zeichnen der trigonometrischen Funktionen auf der x – Achse Gradzahlen angegeben werden, hängt mit dieser Zuordnung zusammen, dass man jeder Gradzahl gedanklich eine reelle Zahl als x – Wert zuordnen kann und die Gradzahlen geläufiger sind, als die zugehörigen reellen Zahlen des Bogenmaßes.



Aus diesem Grund lassen sich die GTR über eine MODUS Einstellung auch zwischen Gradmass und Bogenmass umstellen. Mitunter muss aber auch in der Bogenmasseinstellung gearbeitet werden, deshalb sollte man genau wissen, wie diese Umstellung vorzunehmen ist. Üblicherweise sind die Bezeichnungen für Gradmass GRD und für Bogenmass RAD (Radiant). Manche GTR können die Umrechnung selbständig durchführen, aber auch die manuelle Berechnung bereitet keine großen Probleme.

Umrechnung von Gradmass in Bogenmass:

$$\boxed{\text{arc}\,\alpha = \frac{\alpha^0}{360} \cdot 2\pi}$$

Umrechnung von Bogenmass in Gradmass

$$\boxed{\alpha^0 = \frac{\text{arc}\,\alpha}{2\pi} \cdot 360}$$

Ein Winkel von 112° liefert im Bogenmass einen Wert von:

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{112}{360} \cdot 6{,}28 = 1{,}9537$$

Ein Bogenmass von 4,78 liefert einen zugehörigen Winkel von:

$$\text{arc}^0 = \frac{4{,}78}{6{,}28} \cdot 360 = 274{,}01^0$$

Anschließend folgen zwei Vergleichstabellen um die eigenen Umrechnungen an Hand einer Tabelle überprüfen zu können.

19.7.1 Umrechnung von Bogenmass ins Gradmass

arc	°	arc	°	arc	°	arc	°
0,1	5,7296	1,6	91,6732	3,2	183,3465	4,8	275,0197
0,2	11,4592	1,7	97,4028	3,3	189,0761	4,9	280,7493
0,3	17,1887	1,8	103,1324	3,4	194,8057	5	286,4789
0,4	22,9183	1,9	108,8620	3,5	200,5352	5,1	292,2085
0,5	28,6479	2	114,5916	3,6	206,2648	5,2	297,9381
0,6	34,3775	2,1	120,3211	3,7	211,9944	5,3	303,6676
0,7	40,1070	2,2	126,0507	3,8	217,7240	5,4	309,3972
0,8	45,8366	2,3	131,7803	3,9	223,4535	5,5	315,1268
0,9	51,5662	2,4	137,5099	4	229,1831	5,6	320,8564
1	57,2958	2,5	143,2394	4,1	234,9127	5,7	326,5859
1,1	63,0254	2,6	148,9690	4,2	240,6423	5,8	332,3155
1,2	68,7549	2,7	154,6986	4,3	246,3719	5,9	338,0451
1,3	74,4845	2,8	160,4282	4,4	252,1014	6	343,7747
1,4	80,2141	2,9	166,1578	4,5	257,8310	6,1	349,5043
1,5	85,9437	3	171,8873	4,6	263,5606	6,2	355,2338
		3,1	177,6169	4,7	269,2902	6,3	360,9634

Musterbeispiel: Einem Bogenmass von 0,7 entspricht ein Winkel von 40,107°

19.7.2 Umrechnungen vom Gradmass ins Bogenmass

°	arc	°	arc	°	arc	°	arc
1	0,0174533	31	0,5410521	61	1,0646508	91	1,5882496
2	0,0349066	32	0,5585054	62	1,0821041	92	1,6057029
3	0,0523599	33	0,5759587	63	1,0995574	93	1,6231562
4	0,0698132	34	0,5934119	64	1,1170107	94	1,6406095
5	0,0872665	35	0,6108652	65	1,1344640	95	1,6580628
6	0,1047198	36	0,6283185	66	1,1519173	96	1,6755161
7	0,1221730	37	0,6457718	67	1,1693706	97	1,6929694
8	0,1396263	38	0,6632251	68	1,1868239	98	1,7104227
9	0,1570796	39	0,6806784	69	1,2042772	99	1,7278760
10	0,1745329	40	0,6981317	70	1,2217305	100	1,7453293
11	0,1919862	41	0,7155850	71	1,2391838	105	1,8325957
12	0,2094395	42	0,7330383	72	1,2566371	110	1,9198622
13	0,2268928	43	0,7504916	73	1,2740904	115	2,0071286
14	0,2443461	44	0,7679449	74	1,2915436	120	2,0943951
15	0,2617994	45	0,7853982	75	1,3089969	125	2,1816616
16	0,2792527	46	0,8028515	76	1,3264502	130	2,2689280
17	0,2967060	47	0,8203047	77	1,3439035	135	2,3561945
18	0,3141593	48	0,8377580	78	1,3613568	140	2,4434610
19	0,3316126	49	0,8552113	79	1,3788101	145	2,5307274
20	0,3490659	50	0,8726646	80	1,3962634	150	2,6179939
21	0,3665191	51	0,8901179	81	1,4137167	155	2,7052603
22	0,3839724	52	0,9075712	82	1,4311700	160	2,7925268
23	0,4014257	53	0,9250245	83	1,4486233	165	2,8797933
24	0,4188790	54	0,9424778	84	1,4660766	170	2,9670597
25	0,4363323	55	0,9599311	85	1,4835299	175	3,0543262
26	0,4537856	56	0,9773844	86	1,5009832	180	3,1415927
27	0,4712389	57	0,9948377	87	1,5184364	200	3,4906585
28	0,4886922	58	1,0122910	88	1,5358897	270	4,7123890
29	0,5061455	59	1,0297443	89	1,5533430	275	4,7996554
30	0,5235988	60	1,0471976	90	1,5707963	360	6,2831853

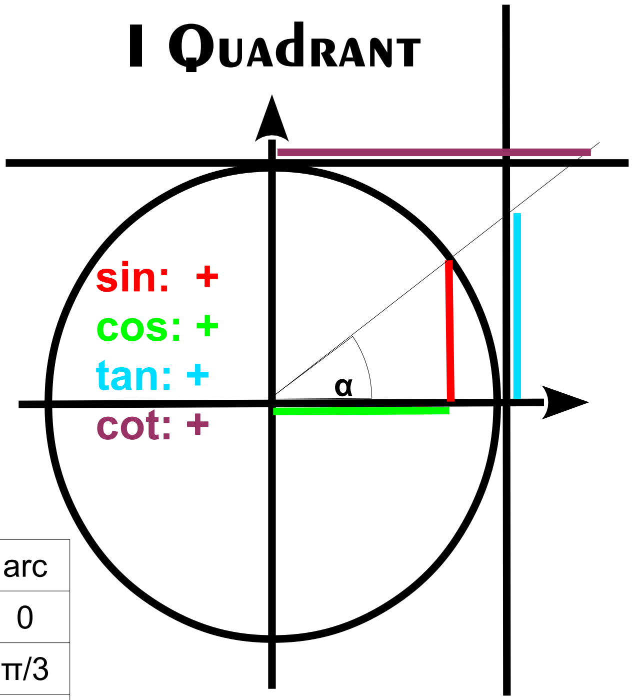
Musterbeispiel: Ein Winkel von 49° liefert ein Bogenmass von 0,8552.
Das Bogenmass ist eine Streckenlänge ! und deshalb nicht als „Grad“ zu bezeichnen, sondern als cm, mm oder m.

19.8. Die Winkelfunktionen in den einzelnen Quadranten

Die Konstruktion der Funktionsbilder der Winkelfunktionen zeigt, dass jeweils zwei Winkel den gleichen Funktionswert besitzen. Dabei ist allerdings festzustellen, dass für jede Winkelfunktion andere Winkel dazu führen.
Außerdem ist zu erkennen, dass es zwei weitere Winkel gibt, die den gleichen Betrag des Funktionswertes liefern, aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Diese Zusammenhänge sind in der folgenden Tabelle gut zu erkennen.

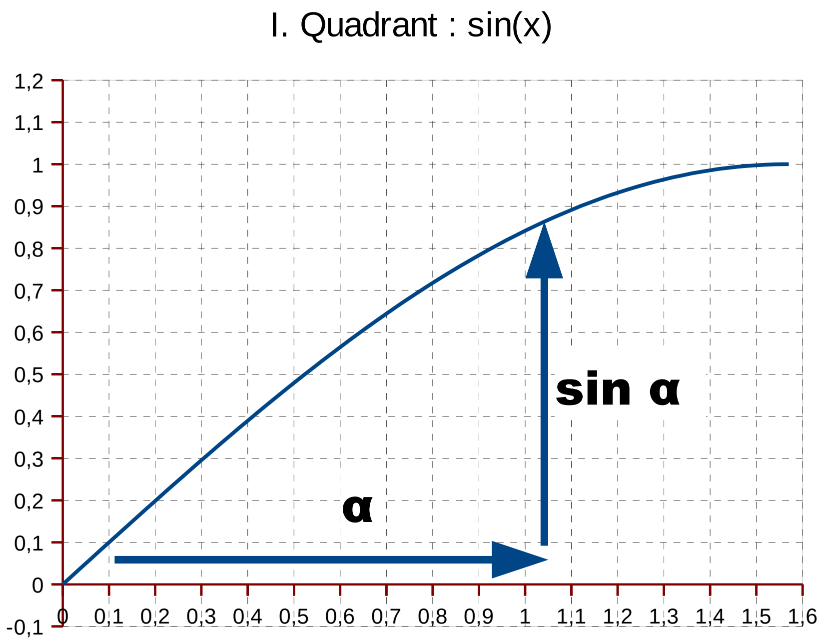
19.8.1 Der I. Quadrant : 0 ≤ x ≤ 90°

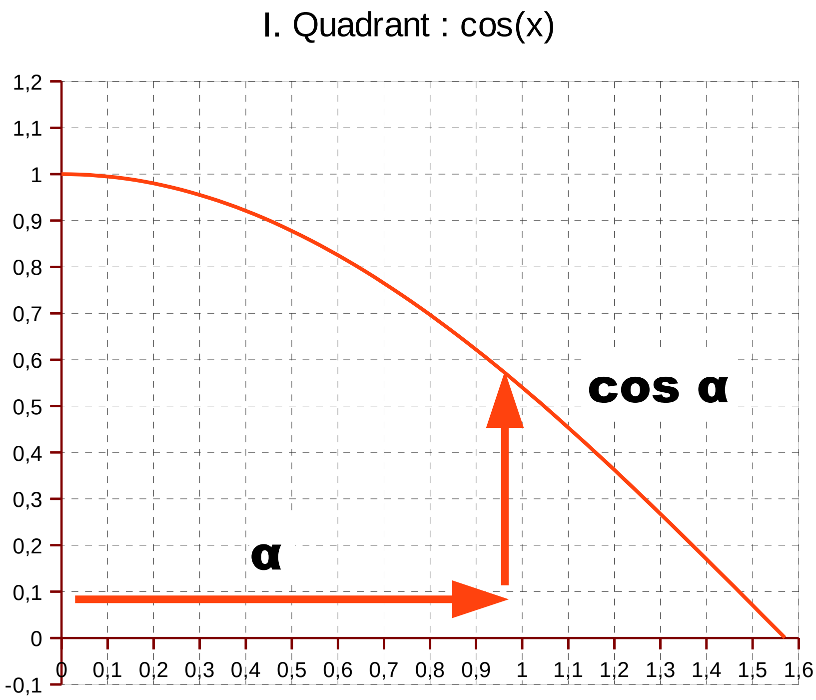
Im ersten Quadranten haben die Winkelfunktionen alle ihren Ausgangswert, alle Werte sind positiv.
Es gibt einige Winkel, die in jedem Quadranten exakt angebbare Werte besitzen. Häufig ist mit diesen Winkelwerten zu rechnen.



	sin	cos	tan	cot	arc
0^0	0	1	0	∞	0
30^0	½	½ √3	⅓ √3	√3	π/3
45^0	½ √2	½ √2	1	1	π/4
60^0	½ √3	½	√3	⅓ √3	π/6
90^0	1	0	∞	0	π/2
$90^0 - \alpha$	cos(α)	sin(α)	cot(α)	tan(α)	

Sinus und Kosinus Funktion im I. Quadranten



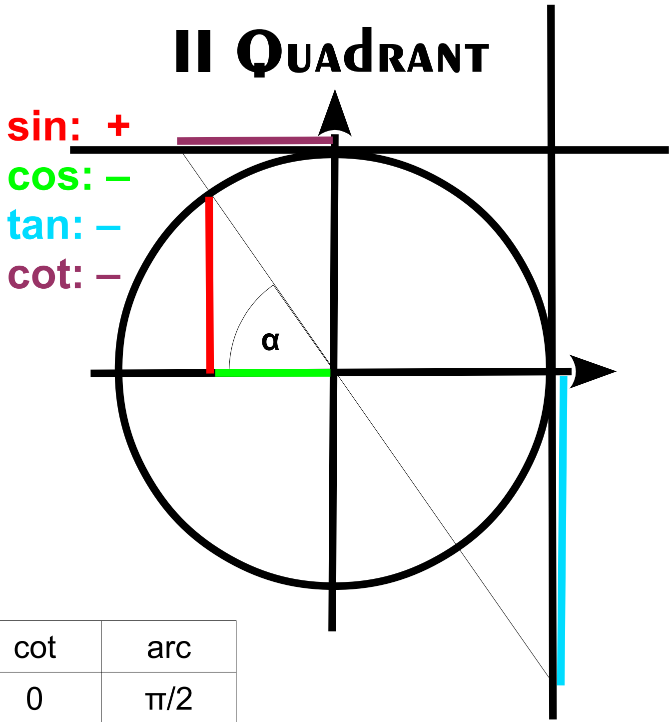


19.8.2 Der II. Quadrant : 90° ≤ x ≤ 180°

Entsprechend der Definition der Winkelfunktionen wechseln einige das Vorzeichen.

- Die Winkel die die gleichen Werte wie Winkel im I. Quadranten besitzen sind jeweils diejenigen, die den Winkelwert von 180 subtrahieren, dh. bis auf Vorzeichen haben die Winkel α und 180° – α die gleichen Zahlenwerte.

- Die Winkel 90° + α haben die Werte der jeweils komplementären Funktion, dh. sin (90° + α) = cos α und cos (90° + α) = sin α

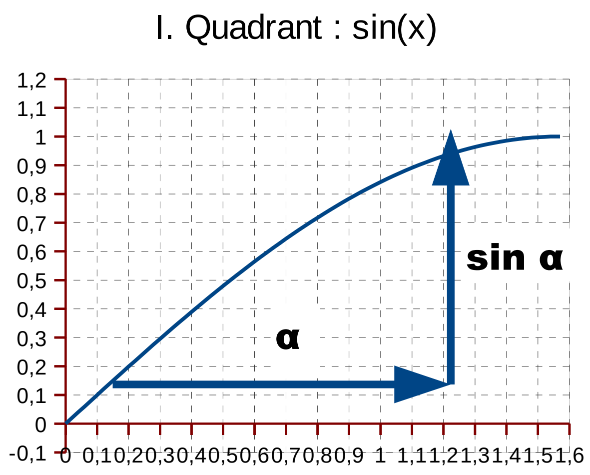
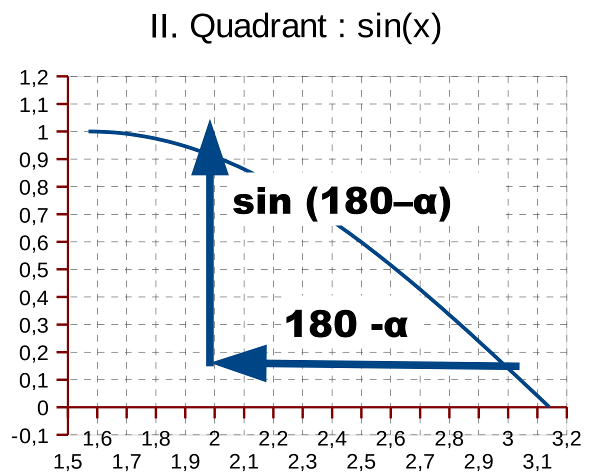
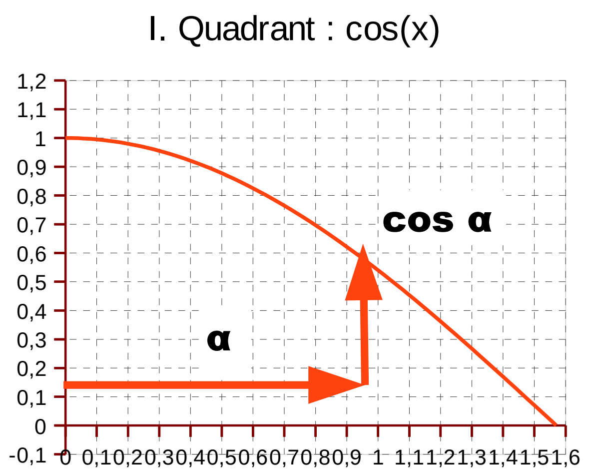
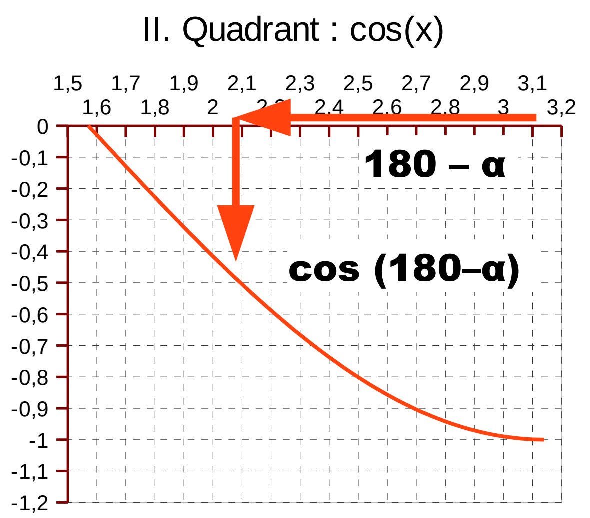


	sin	cos	tan	cot	arc
90^0	1	0	∞	0	π/2
120^0	½√3	– ½	–√3	–⅓√3	2π/3
135^0	½√2	–½√2	– 1	– 1	3π/4
150^0	½	–½√3	–⅓ √3	–√3	5π/6
180^0	1	0	0	∞	π
90 + α	cos(α)	– sin(α)	– cot(α)	– tan(α)	
180 - α	sin(α)	– cos(α)	– tan(α)	– cot(α)	

Gibt man den Winkel im II. Quadranten auf diese Weise an, dann sind die Streckenlängen der Winkelfunktionen identisch mit den Streckenlängen des gleichen Winkels im I. Quadranten. Sucht man den Funktionswert einer Winkelfunktion für den Winkel 165° , dann kann man den Winkel 180° – 165° = 15° benutzen und die Werte für die Winkelfunktion berechnen. Es sind lediglich die Vorzeichen zu beachten:

sin (165°) = sin (15°)
cos (165°) = – cos (15°)
tan (165°) = – tan (15°)
cot (165°) = – cot (15°)

Sinus und Kosinus Funktion im II. Quadranten

<table>
<tr><td>Sinus im I. Quadranten</td><td>Funktion im II. Quadranten</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>sin (α)
cos (90–α)</td><td>sin(180 – α)
= sin (α) = – cos (90 + α)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>cos (α)
sin (90 – α)</td><td>cos (180 – α)
= – cos (α) = – sin (90+α)</td></tr>
</table>

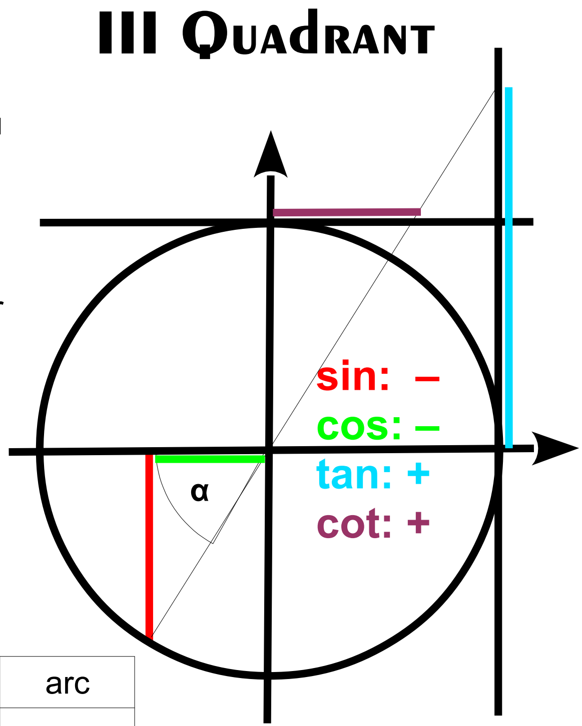
Die Sinus-Funktion von 90 bis 180 hat den gleichen Kurvenverlauf wie die Kosinus-Funktion zwischen 0 und 90.
Die Kosinus-Funktion von 90 bis 180 hat den gleichen Kurvenverlauf wie die Sinus-Funktion zwischen 0 und 90 , aber gespiegelt an der x – Achse, also negatives Vorzeichen.

19.8.3 Der III. Quadrant : 180° ≤ x ≤ 270°

Entsprechend der Definition der Winkelfunktionen wechseln die Winkelfunktionen wieder die Vorzeichen

- Die Winkel die die gleichen Werte wie Winkel im I. Quadranten besitzen sind jeweils diejenigen, die den Winkelwert zu 180 addieren, dh. bis auf Vorzeichen haben die Winkel α und 180° + α die gleichen Zahlenwerte.

- Die Winkel 270° – α haben die Werte der jeweils komplementären Funktion, dh. – sin (270° – α) = cos α und cos (270° – α) = – sin α

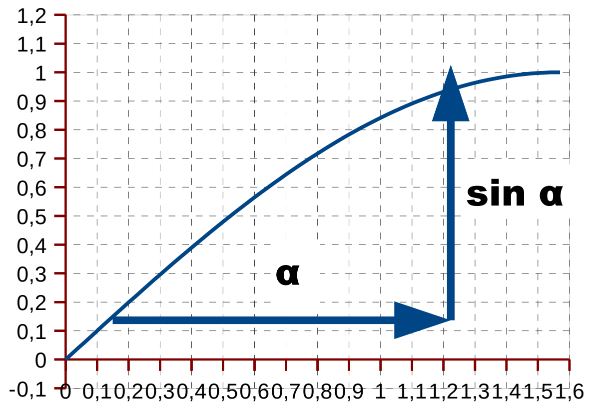
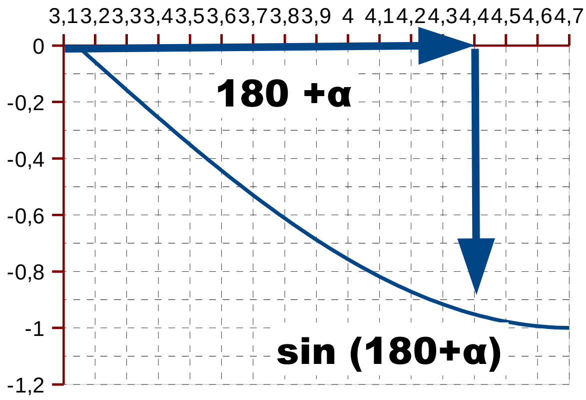
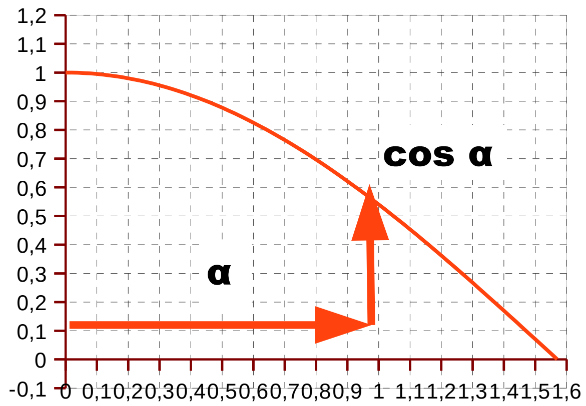
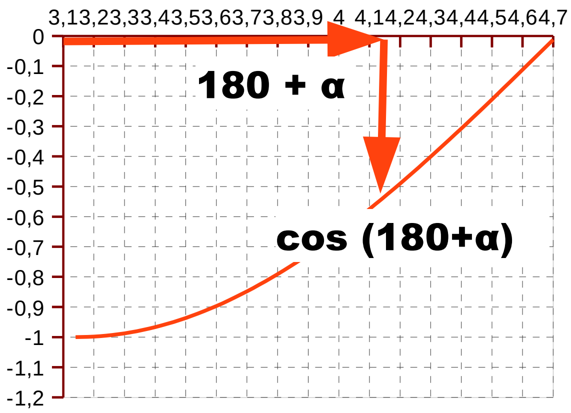


	sin	cos	tan	cot	arc
180^0	0	–1	0	∞	π
210^0	–½	– ½√3	⅓√3	√3	7π/6
225^0	–½√2	–½√2	1	1	5π/4
240^0	–½√3	–½	√3	⅓√3	4π/3
270^0	–1	0	∞	0	3π/2
180 + α	– sin(α)	– cos(α)	tan(α)	cot(α)	
	– cos(α)	– sin(α)	cot(α)	– tan(α)	

Gibt man den Winkel im III. Quadranten auf diese Weise an, dann sind die Streckenlängen der Winkelfunktionen identisch mit den Streckenlängen des gleichen Winkels im I. Quadranten. Sucht man den Funktionswert einer Winkelfunktion für den Winkel 215° , dann kann man den Winkel 180° + 35° = 215° benutzen und die Werte für die Winkelfunktion berechnen. Es sind lediglich die Vorzeichen zu beachten:

sin (215°) = – sin (15°)
cos (215°) = – cos (15°)
tan (215°) = tan (15°)
cot (215°) = cot (15°)

Sinus und Kosinus Funktion im III. Quadranten

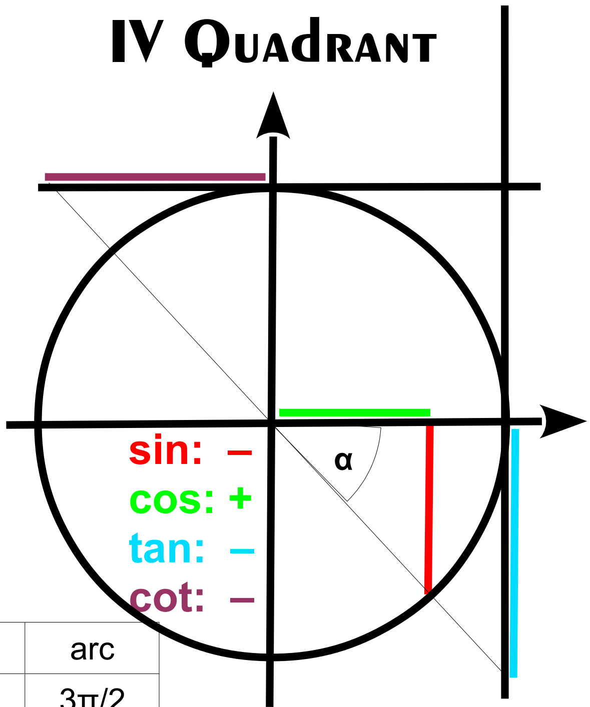
<table>
<tr><th>Sinus im I. Quadranten</th><th>Funktion im III. Quadranten</th></tr>
<tr><td>I. Quadrant : sin(x)
</td><td>III. Quadrant : sin(x)
</td></tr>
<tr><td>sin (α)
cos (90–α)</td><td>sin(180 + α)
= – sin (α) = cos (270 – α)</td></tr>
<tr><td>I. Quadrant : cos(x)
</td><td>III. Quadrant : cos(x)
</td></tr>
<tr><td>cos (α)
sin (90 – α)</td><td>cos (180 + α)
= – cos (α) = sin (270–α)</td></tr>
</table>

19.8.4 Der IV. Quadrant : 270° ≤ x ≤ 360°

Entsprechend der Definition der Winkelfunktionen wechseln die Winkelfunktionen wieder die Vorzeichen

- Die Winkel die die gleichen Werte wie Winkel im I. Quadranten besitzen sind jeweils diejenigen, die den Winkelwert von 360 zu subtrahieren, dh. bis auf Vorzeichen haben die Winkel α und 360° – α die gleichen Zahlenwerte.

- Die Winkel 270° + α haben die Werte der jeweils komplementären Funktion, dh. – sin (270° + α) = cos α und cos (270° + α) = sin α



	sin	cos	tan	cot	arc
270^0	–1	0	∞	0	3π/2
300^0	–½√3	½	–√3	–⅓√3	5π/3
315^0	–½√2	½√2	–1	–1	7π/4
330^0	–½	½√3	–⅓√3	–√3	11π/6
360^0	0	1	0	∞	2π
270 + α	– cos(α)	cos(α)	– cot(α)	– tan(α)	
360 – α	– sin(α)	sin(α)	– tan(α)	– cot(α)	

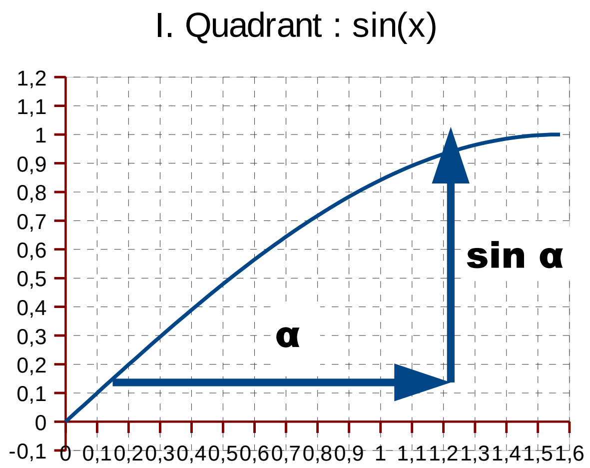
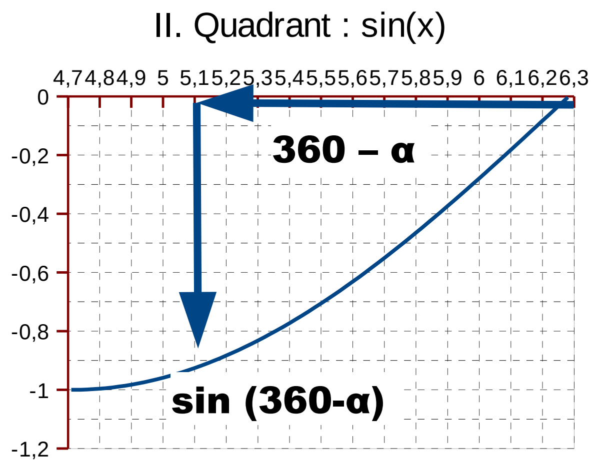
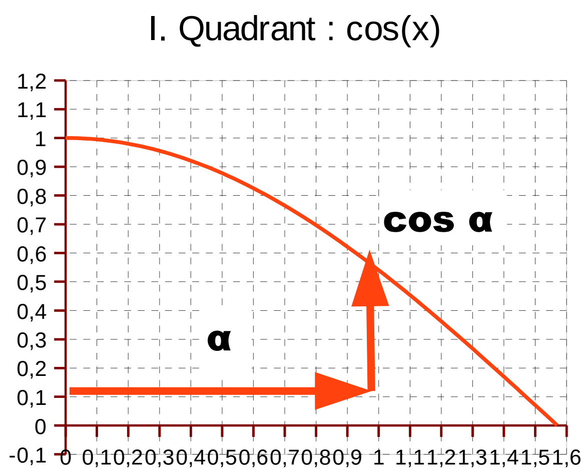
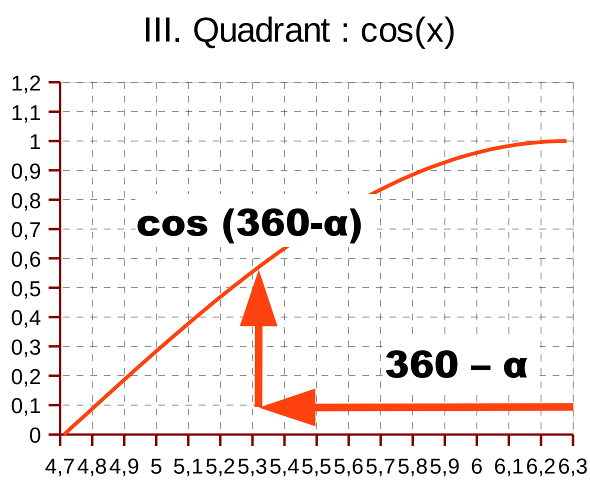
Gibt man den Winkel im IV. Quadranten auf diese Weise an, dann sind die Streckenlängen der Winkelfunktionen identisch mit den Streckenlängen des gleichen Winkels im I. Quadranten. Sucht man den Funktionswert einer Winkelfunktion für den Winkel 305° , dann kann man den Winkel 360° – 55° = 305° benutzen und die Werte für die Winkelfunktion berechnen. Es sind lediglich die Vorzeichen zu beachten:

sin (305°) = – sin (55°)
cos (305°) = cos (55°)
tan (305°) = – tan (55°)
cot (305°) = – cot (55°)

Die Winkel im IV. Quadranten kann man auch als negative Winkel sehen, indem man den Kreis im Uhrzeigersinn durchläuft. Damit gelten für die Winkelfunktionen folgende Beziehungen zu ihren negativen Winkeln.

sin (α) = – sin (–α)
cos (α) = cos (–α)
tan (α) = – tan (–α)
cot (α) = – cot (–α)

Sinus und Kosinus Funktion im IV. Quadranten

Sinus im I. Quadranten	Funktion im IV. Quadranten
	
sin (α) **cos (90–α)**	**sin(360 – α)** **= – sin (α) = –cos (270+α)**
	
cos (α) **sin (90 – α)**	**cos (360 – α)** **= cos (α) = – sin (270+α)**

Die rot markierten Zeilen besitzen die größere Bedeutung bei der Umrechnung der Winkel in die einzelnen Quadranten, da sie die Winkelfunktion beibehalten. Die Umrechnung kann auch in umgekehrter Weise benutzt werden und früher ohne GTR, mussten die Werte aus Tabellen abgelesen werden. Diese Tabellen geben nur Werte zwischen 0 und 90° an. Man muss sogar sagen, mit den richtig aufbereiteten Tabellen reichen sogar 0 bis 45°.

Beispiel:
- Gesucht ist der Wert für cos (245°).
- Dieser Wert liegt im III. Quadranten. Dazu benutzt man die rote Spalten für den III. Quadranten (180° + α).
- Für den Ergebniswinkel 245° ist der dazu notwendige Ergänzungswinkel 65° = 245° – 180° .
- Der in der Spalte eingetragene Wert ist – cos (α).
- Damit folgt: cos (245°) = – cos (65°)

Beispiel 2
- Gesucht ist der Wert für tan (165°).
- Dieser Wert liegt im II. Quadranten. Dazu benutzt man die rote Spalten für den III. Quadranten (180° – α).
- Für den Ergebniswinkel 165° ist der dazu notwendige Ergänzungswinkel 15° = 180° – 165° .
- Der in der Spalte eingetragene Wert ist – tan (α).
- Damit folgt: tan (165°) = – tan (15°)

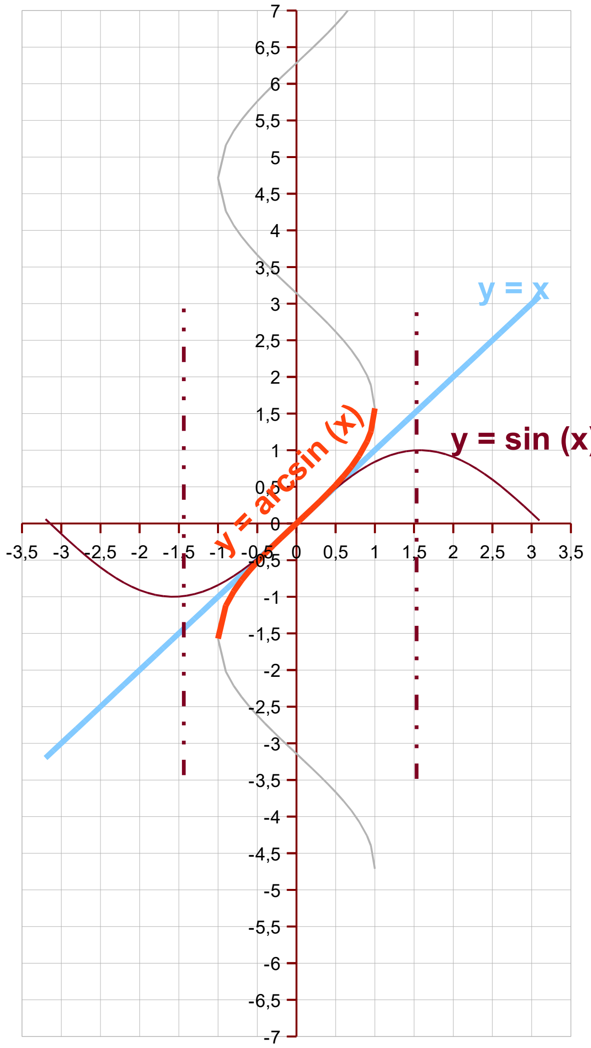
Beispiel 3:
- Gesucht ist der cos (65°)
- Nach der Umrechnungstabelle für den I. Quadranten ist cos α = sin (90° – α)
- Damit ist der cos (65°) = sin (25°)
- Damit lassen sich die Werte aller Winkelfunktionen von Winkel über 45° auf Winkel unter 45° zurückführen. das ist der Grund, weshalb es völlig ausreicht die Winkelfunktionen bis 45° zu tabellieren. Professionelle Tabellen, die auf grund der Genauigkeit sehr umfangreich sind nutzen das auch aus, um Druckseiten und Papier zu sparen.
- Ab dem Winkel von 45° ist der Kurvenverlauf des sin identisch mit dem des cos, wenn man den cos rückwärts von 45° bis 0° geht und der Kurvenverlauf des cos nach 45° entspricht dem des sin, wenn man den sin von 45° nach 0° rückwärts geht. In Formeln läßt sich das ausdrücken in der Form: sin (45°–α) = cos (45°+α) und sin (45°+α) = cos (45°–α)

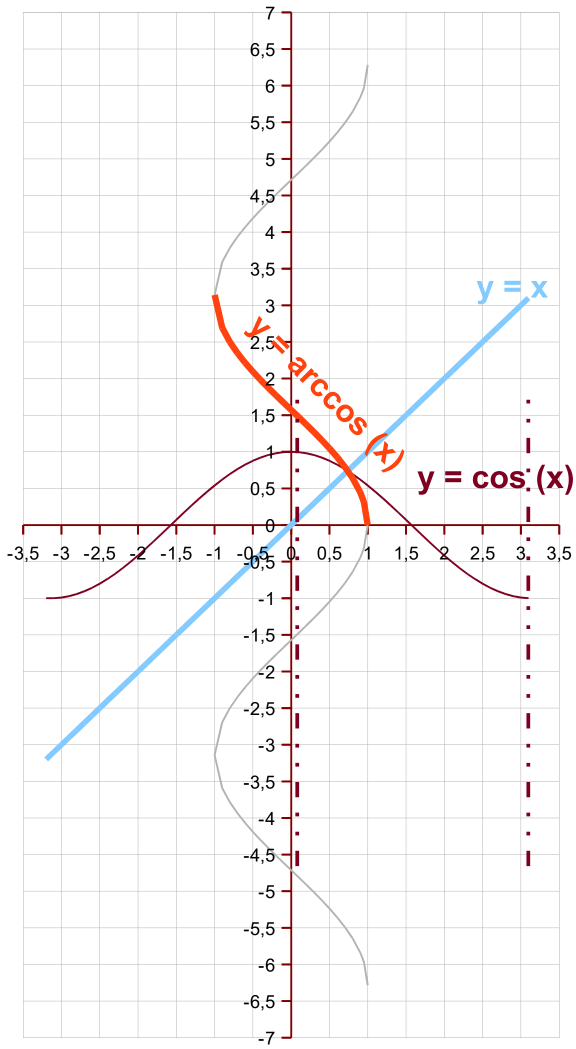
Mit den heute benutzen GTR besteht dieses Problem nicht mehr. Die GTR rechnen automatisch in die richtigen Winkel um. Allerdings wird diese Umrechnung noch gebraucht, wenn man von einem bekannten Winkelfunktionswert der zugehörige Winkel bestimmt werden soll. Grundsätzlich gibt es zu jedem Funktionswert zwei Winkel, der GTR kann aber nur einen der beiden Winkel anzeigen. Der zweite Winkel ist manuell über diese Umrechnungstabelle zu bestimmen. Diese Zusammenhänge werden im nächsten Kapitel behandelt.

19.9. Winkel zu vorgegebenen Winkelfunktionswerten

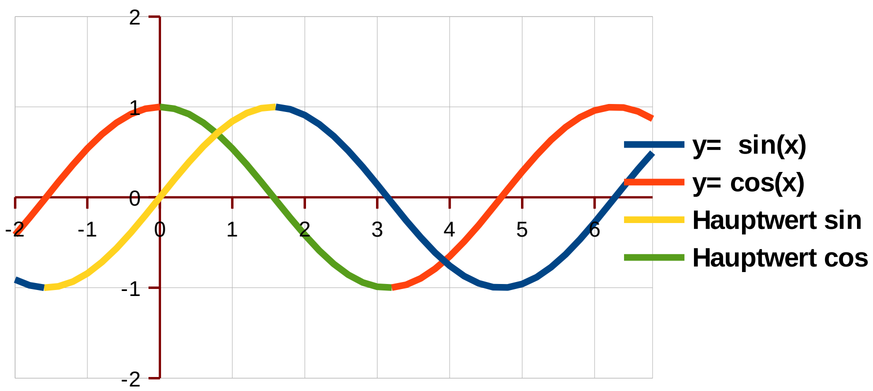
Die Umrechnungen der Winkel in die einzelnen Quadranten werden gebraucht, wenn man zu einem vorgegebenen Funktionswert den entsprechenden Winkel sucht. Das Problem dabei liegt in der Umkehrfunktion begründet. Um zu einem Funktionswert den Winkel zu suchen benötigt man die Umkehrfunktion der entsprechenden Winkelfunktion. Im Kapitel über Funktionen wurde bereits die Problematik der Umkehrfunktionen aufgezeigt: Umkehrfunktionen existieren nur für die Bereiche, in denen die Ausgangsfunktion ein einheitliches Monotonieverhalten hat. Dieses Monotonieverhalten wechselt bei den trigonometrischen Funktionen ständig in einem Intevallabstand von 180°. Damit entsteht die Frage: Für welchen Bereich soll man die Umkehrfunktion definieren. Deshalb wurden für die einzelnen Winkelfunktionen Bereiche festgelegt, in denen die Funktion nur ein Monotonieverhalten haben und für diesen Bereich auch die Umkehrfunktion definiert. Diese Bereiche bezeichnet man als **Hauptwerte** der trigonometrischen Funktionen. Das bedeutet gleichzeitig, dass man bei der Suche nach dem Winkel für einen Funktionswert nur einen Wert zurückgeliefert bekommt, und man muss den zweiten Wert, der ebenfalls den gleichen Funktionswert hat, manuell berechnen.

Der Sachverhalt soll an den folgenden Funktionsbildern verdeutlicht werden.

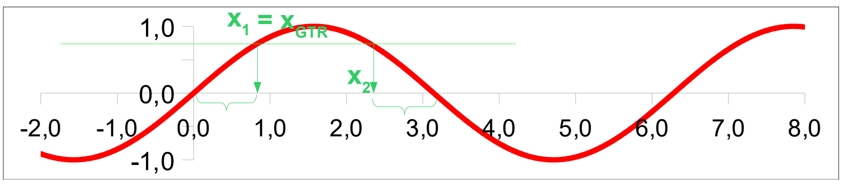




Würde man die sin und cos Funktion an der Geraden y = x spiegeln, entsteht eine solche Schlangenlinie um die y-Achse. Das bedeutet, dass zu einem x-Wert unendlich viel y-Werte existieren würden. Nach der Definition einer Funktion darf aber zu einem x-Wert nur ein y-Wert existieren (zu einem y–Wert aber beliebig viele x–Werte). Deshalb muss die Linie so eingeschränkt werden, dass zu einem x–Wert nur ein y–Wert existiert. Genau diese notwendige Einschränkung führte zur Festlegung der Hauptwerte.

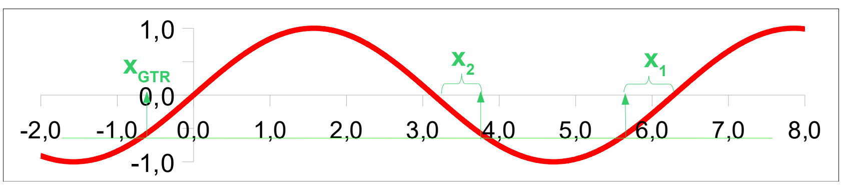


Der Hauptwert des sin ist für den Bereich – 90° ≤ x ≤ 90° festgelegt – die gelb gezeichnete Kurve – Das bedeutet zum Beispiel, wenn man in einen GTR für den sin eines Winkels den Wert 0,8 eingibt, dass der GTR den Wert 53,13° zurückliefert. Dabei wird völlig unberücksichtigt gelassen, dass dieser Wert auch für einen Winkel im II. Quadranten gilt. Dieser Wert ist aber nicht im Bereich des Hauptwertes vorhanden, da in dem Fall ein Widerspruch zur Funktionsdefinition auftreten würde. Dieser zweite mögliche Winkel ist dann manuell über die Quadrantenbeziehungen zu bestimmen, die im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurden. Einen Winkel im zweiten Quadranten berechnet man mit der Formel 180 – α , wenn α der Winkel des I. Quadranten ist. Damit ist der korrespondierende Winkel im II. Quadranten 126,87°.



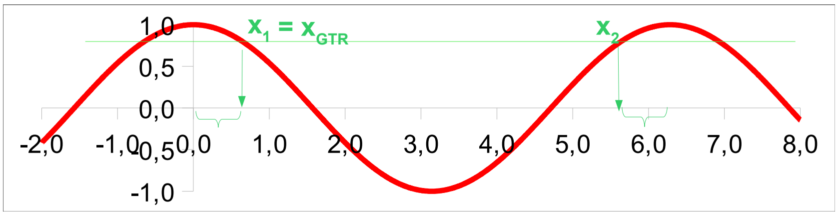
(Die Dezimalschreibweise auf der x-Achse entspricht dem Bogenmass.)

Das gleiche trifft für einen sin Wert von – 0,6 zu. Der GTR wird immer einen Wert von – 36,87° liefern. Umgerechnete in einen positiven Winkel führt das zu dem Winkel 323,13° im IV. Quadranten (Die Summe der beiden Winkel ohne Vorzeichen muss 360 ergeben). Aber der sin ist auch im III. Quadranten negativ. Für diesen Winkel ist der angezeigte Wert von 36,87° (ohne Vorzeichen) zu dem Wert 180° zu addieren. Der zweite Winkel mit dem gleichen sin Wert ist damit 216,87°.

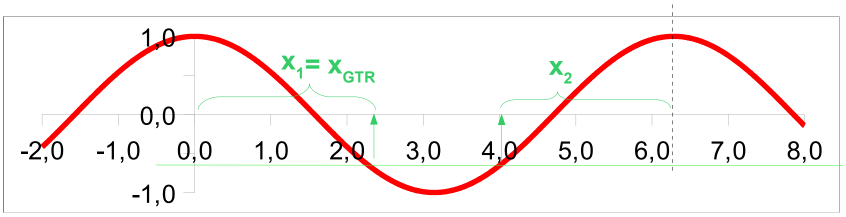


In der gleichen Weise ist für den Cosinus zu verfahren. Die Hauptwerte des cos sind für das Intervall 0° ≤ x ≤ 180° definiert – grüne Kurve – . In diesem Bereich ist die cos Funktion monoton fallend, was aber auf die Definition der Umkehrfunktion keinen Einfluß hat, es muss nur ein einheitliches Monotonieverhalten vorhanden sein. Damit werden alle über den GTR berechneten Winkel im I. und II. Quadranten zurückgegeben und die entsprechenden Winkel im III. und IV. Quadranten sind manuell zu berechnen.

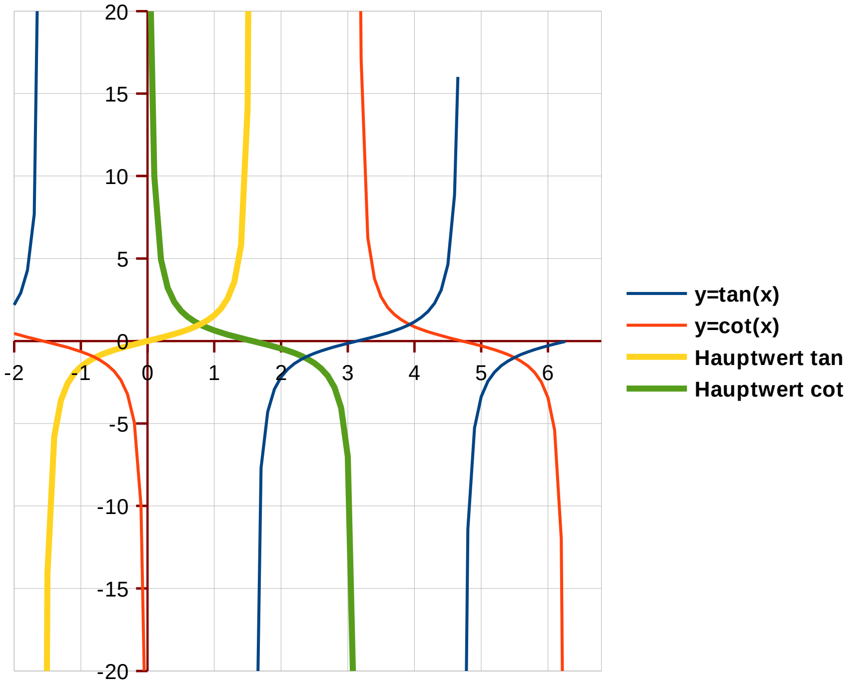
Für einen cos Wert von 0,8 liefert der GTR somit den Winkel 36,87° zurück. Der gleiche cos Wert tritt aber auch im IV. Quadranten bei – 36,87° bzw. 323,13° (= 360° – 36,87°) auf.



Für negative Werte des cos gelten folgende Beziehungen: Für einen cos Wert von – 0,6 liefert der GTR einen Wert von 126,87°, was einem Winkel im II. Quadranten entspricht. Was fehlt ist der entsprechende Winkel im III. Quadranten. Der ist zu berechnen über 360° – 126,87° = 233,13°, oder man berechnet den Winkel im I. Quadranten, der dem positiven Wert 0,6 entspricht. Dieser Winkel ist 53,13°. Für Winkel im III. Quadranten gilt für den cos: cos (α) = – cos (180 + α). Damit ergibt sich der gesuchte Winkel 180° + 53,13° = 233,13°.



Für den tan und cot gilt das Gleiche.



Die Hauptwerte des tan liegen im Intervall $-90° \leq x \leq 90°$ – gelbe Kurve – und die des cot im Intervall $0° \leq x \leq 180°$ – grüne Kurve – . Damit werden die Winkel für positive tan Werte im I. Quadranten zurückgegeben und für negative tan Werte im IV. Quadranten, aber als negative Winkel ! Für den cot werden die positiven Werte als Winkel im I. Quadranten und die negativen Werte als Winkel im II. Quadranten zurückgegeben.
Die Umrechnung in die anderen Quadranten erfolgt in der gleichen Weise, wie beim sin und cos.

$\tan \alpha = 2{,}4$; Gesucht: $\alpha \in [0° ; 360°]$
„Taschenrechnerlösung“: $\alpha = 67{,}4°$
Lösung: $\alpha_1 = 67{,}4°$
und $\alpha_2 = 180° + 67{,}4° = 247{,}4°$

(Bei Winkel im III. Quadranten ist bei Beibehaltung der Winkelfunktion immer der Winkel 180 + α derjenige, der den gleichen Winkelfunktionswert wie α liefert, eventuell mit anderem Vorzeichen)

$\tan \alpha = -0{,}6$; Gesucht: $\alpha \in [0° ; 360°]$

„Taschenrechnerlösung“: $\alpha = -30{,}96°$
Lösung: $\alpha_1 = 360° - 30{,}96° = 329{,}04°$
und $\alpha_2 = 180° - 30{,}96° = 149{,}04°$

Für den Wert $\tan \alpha = 0{,}6$ würde der Winkel von 30,96° im I. Quadranten die Lösung sein.
(Bei Winkel im II. Quadranten ist bei Beibehaltung der Winkelfunktion immer der Winkel 180 – α derjenige, der den gleichen Winkelfunktionswert wie α liefert, eventuell mit anderem Vorzeichen))

19.10. Nutzen der Trigonometrie

Die Trigonometrie schließt die Lücke bei rechtwinkligen Dreiecken zwischen den Seiten und den Winkeln. Der Pythagoras sichert, dass bei der Kenntnis von zwei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks die dritte Seite berechnet werden kann. Aussagen über die zugehörigen Winkel können nicht gemacht werden. Die Trigonometrie schafft die Verbindung zwischen Seiten und Winkeln. Nur durch die Trigonometrie ist es möglich:

> Die Kenntnis von zwei Werten eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem wenigstens ein Wert eine Seitenlänge ist, reicht aus, um alle drei Seiten und die beiden verbleibenden Winkel berechnet werden können.

Die Berechnungen der Trigonometrie sind sehr einfach, deshalb sollte man bei Berechnungen von Winkel und Seiten alle Werte über die trigonometrischen Beziehungen berechnen und die Möglichkeiten des Pythagoras und der konstanten Winkelsumme von 180° im Dreieck als Kontrollmöglichkeiten lassen. Deshalb nicht, wenn man einen Winkel kennt, „schnell“ den anderen über Rückrechnen von der Winkelsumme im Dreieck bestimmen. So können Rechenfehler nicht erkannt werden.