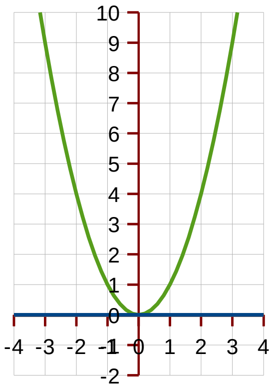
18. Quadratische Funktionen

Im Gegensatz zu den Linearen Funktionen tritt bei quadratischen Funktionen die Variable x auch in der 2. Potenz auf. Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion hat deshalb folgendes Aussehen:
$y = ax^2 + bx + c$
Das Kurvenbild einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Die drei Parameter a, b und c bestimmen das Aussehen der Parabel. Das Aussehen einer Parabel unterscheidet sich markant von einer Geraden.



1. Eine Parabel besitzt einen **Scheitelpunkt**, der den tiefsten oder höchsten Punkte der Parabel darstellt.
2. Der Scheitelpunkt teilt das Funktionsbild in einen steigenden und einen fallenden Kurventeil. Je nachdem, ob der Scheitel der höchste oder tiefste Punkt des Kurvenbilds ist, verlaufen beide Teile nach $+\infty$ oder nach $-\infty$.
3. Eine Parabel hat, wie jede andere Funktion, nur einen Schnittpunkt mit der y-Achse, aber einen, zwei oder keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Die Grundform einer quadratischen Funktion ist $y = x^2$, bei der a=1, b=0, c=0 sind. Deshalb wir diese Funktion als **Normalparabel** bezeichnet.

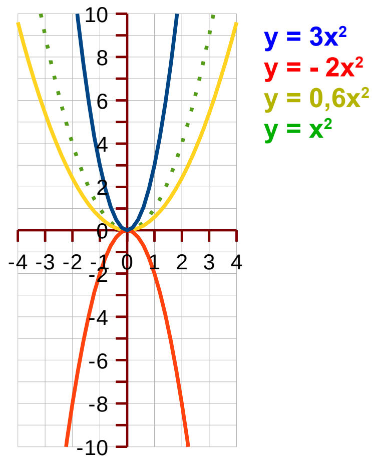
18.1. Bedeutung der Parameter a, b und c

18.1.1 Der Parameter a

Dieser Parameter bestimmt die Öffnung der Parabel. Er bestimmt sowohl, ob die Parabel breiter oder schmaler als eine Normalparabel ist, sowie ob die Öffnung nach oben oder nach unten erfolgt. Der Scheitel einer Parabel, bei der nur der Parameter a von 0 verschieden ist, aber die beiden anderen noch 0 sind, ist immer noch der Koordinatenursprung.

$a > 0$: Parabel nach oben geöffnet, $W = [0, \infty[$
Scheitel ist das Minimum
$a < 0$: Parabel nach unten geöffnet, $W =]-\infty, 0]$
Scheitel ist das Maximum

$|a| < 1$: Parabel gestaucht, breiter als Normalparabel
$|a| = 1$: Normalparabel
$|a| > 1$: Parabel gestreckt, enger als Normalparabel

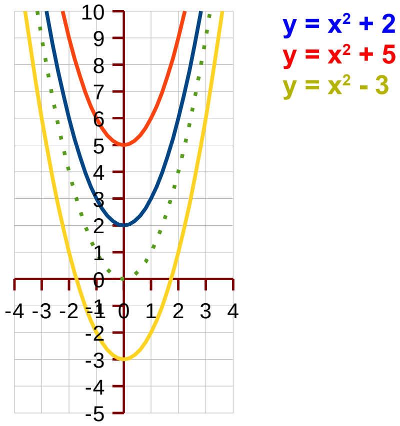


18.1.2 Der Parameter c

Der Parameter c verschiebt die Parabel in positiver oder negativer y Richtung, solange der Parameter b =0 ist. Die x-Koordinate des Scheitels bleibt weiter bei x =0 und die y-Koordinate ist c.

c > 0 : Verschiebung nach oben, W = [c, ∞[

c < 0 : Verschiebung nach unten, W = [c, ∞[



18.1.3 Der Parameter b

Der Parameter b bestimmt eine Verschiebung des Scheitels entlang der x-Achse. Dabei kann man aber vom Parameter b nicht direkt die x-Verschiebung ablesen, da der tatsächliche Wert nicht nur von b, sondern auch von c abhängt. Wie diese beiden Werte den Scheitelpunkt bestimmen wird in späteren Abschnitten genauer untersucht. Die einzige Aussage, die man generell treffen kann: Wenn kein Glied bx in der Funktionsgleichung vorhanden ist, dann liegt der Scheitel auf der y–Achse.

18.2. Die Nullstellen

Unter Nullstellen versteht man die x-Werte, für die der y-Wert gleich 0 ist. Für quadratische Funktionen, bei denen alle Parameter a, b und c ungleich Null sind, existiert eine Formel, die man dafür einsetzen kann. In den Fällen, in denen ein Parameter b oder c gleich Null sind, gibt es einfachere Lösungsmöglichkeiten, die als erstes besprochen werden sollen. Der Wert von a ist natürlich immer ungleich Null, da sonst keine quadratische Funktion vorhanden ist, sondern nur eine lineare Funktion.

18.2.1 Kein Linearglied : b = 0

hat der Parameter b den Wert Null, reduziert sich die quadratische Funktion auf den Ausdruck $y = ax^2 + c$. Setzt man den y-Wert Null und löst dann die Gleichung nach x aus, entsteht folgende Gleichung:

$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -c/a$$

Jetzt ist auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel zu berechnen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der berechnete Wert sowohl ein positives wie eine negatives Vorzeichen haben kann, da durch quadrieren das negative Vorzeichen wieder zu einem positiven Vorzeichen wird. Damit besitzt die Gleichung zwei Lösungen:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

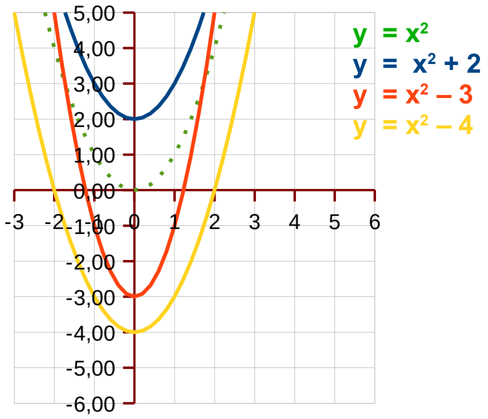
Diese beiden Ausdrücke müssen näher untersucht werden. Es ist bekannt, dass Quadratwurzeln nur existieren, wenn der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist. Deshalb sind die Auswirkungen auf das Kurvenbild zu analysieren, wenn der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist: $-(c/a) > 0$
Dieser Quotient ist größer 0, wenn entweder $a > 0$ und $c < 0$, oder $a < 0$ und $c > 0$. Was bedeutet das für das Kurvenbild.

Fall1: a > 0 und c < 0

In den einführenden Abschnitten wurde die Bedeutung der Parameter bereits erläutert. Damit handelt sich sich in diesem Fall um eine Parabel, die nach oben geöffnet ist (a>0) und deren Scheitelpunkt bei (0/c) liegt. Für c < 0 liegt der Scheitel unterhalb der x-Achse.
Damit liefert die obige Bedingung die Aussage:

> Eine Parabel ohne Lineargleid b hat Nullstellen, wenn sie nach **oben geöffnet** ist und ihr Scheitel **unterhalb der x-Achse** liegt.

Für nach oben geöffnete Parabeln ist diese Bedingung leicht nachvollziehbar: Die beiden Funktionen $y = x^2 - 3$ und $y = x^2 - 4$ besitzen Nullstellen, und ihre Scheitelpunkte liegen unterhalb der x–Achse. Die Funktion $y = x^2 + 2$ besitzt keine Nullstellen, da der Scheitel oberhalb der x-Achse liegt.



Fall 2: a < 0 und c > 0

In diesem Fall handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel deren Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse. Damit ergibt sich als zweite Möglichkeit für Nullstellen:

> Eine Parabel ohne Lineargleid b hat Nullstellen, wenn sie nach **unten geöffnet** ist und ihr Scheitel **oberhalb der x-Achse** liegt.

Für c =0 fallen beide Lösungen zu einer zusammen und die doppelte Nullstelle befindet sich im Koordinatenursprung. Diese doppelte Nullstelle ist dann auch gleichzeitig der Scheitel der Parabel. Ein undefinierter Ausdruck kann durch den Quotienten nicht entstehen, da immer ungleich Null sein muss, sonst handelt es sich nicht um einen quadratische Funktion.

18.2.2 Kein Absolutglied : c = 0

Eine quadratische Funktion ohne Absolutglied c hat die Form $y = ax^2 + bx$. Eine solche Funktion hat mindestens als eine Nullstelle den Wert x=0, da für x =0 auf alle Fälle y=0 folgt. Eine solche Form hat also immer mindestens eine Nullstelle. Zur Bestimmung der beiden Nullstellen kann man als dem rechten Ausdruck der Funktion aus jedem Summanden einen Faktor x ausklammern:

$$0 = ax^2 + bx$$
$$0 = x \bullet (ax + b)$$

In diesem Fall wurde aus der Funktionsgleichung ein Produkt gebildet. Dieses Produkt soll 0 sein. das ist nur möglich, wenn wenigstes ein Faktor der beiden gleich Null ist. Damit gibt es zwei Möglichkeiten, dass das Produkt gleich Null ist.

1. Fall – erster Faktor gleich 0: $x_1 = 0$
2. Fall – zweiter Faktor gleich 0: $ax + b = 0$

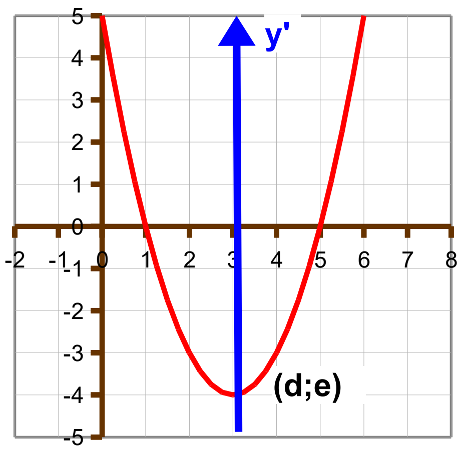
$$x_2 = -b/a$$

Damit gibt es immer zwei Lösungen, solange $b \neq 0$ ist. Für b =0 entsteht wieder eine Parabel, die im Koordinatenursprung eine Doppelnullstelle hat und dort auch ihren Scheitel.

(Die Gleichung $0 = ax^2 + bx$ darf auf keinen Fall durch x dividiert werden. In diesem Fall fällt eine Lösung der Gleichung weg. Außerdem wäre eine solche Division nur für $x \neq 0$ erlaubt, da sonst eine Division durch 0 entsteht, die nicht erlaubt ist. Aber x=0 ist genau die Lösung, die wegfallen würde.)

18.2.3 Die allgemeine Gleichung $y = ax^2 + bx + c$

Als nächstes soll der Fall untersucht werden, dass alle drei Parameter ungleich Null sind. Der Grundgedanke dieser Lösung basiert auf der ersten Fallunterscheidung. Man versucht eine Funktionsgleichung zu erstellen, bei der kein linearer Term mit b auftritt. In diesem Spezialfall hat es sich gezeigt, dass die Nullstellen, wenn sie existieren, symmetrisch zum x-Wert des Scheitelpunktes sind. Wenn man den Scheitelpunkt bestimmen könnte, dann kann man von dieser Stelle aus symmetrisch nach beiden Seiten die Nullstelle bestimmen.



Für eine Parabel, deren Scheitel nicht auf der y-Achse liegt, erzeugt man eine verschobene y-Achse auf der der Scheitel der Parabel liegt. Das neue Koordinatensystem x' – y' hat gegenüber dem Ausgangskoordinatensystem eine Veränderung in der x Koordinate. Während die Werte von y und y' gleich sind, ist die Koordinate von x' = x – d verschoben. Damit hat die Parabel im Koordinatensystem x'-y' die Funktionsgleichung $y' = a(x'-d)^2 + e$. Diese Gleichung kann jetzt genau so behandelt werden, wie die Gleichung $y = ax^2 + c$:

$$0 = a(x'-d)^2 + e$$
$$a(x'-d)^2 = -e$$
$$(x'-d)^2 = -e/a$$

damit ist die Frage zu klären, wie kommt man von $y = ax^2 + bx + c$ zu der Gleichung $y' = a(x'-d)^2 + e$. Dazu soll die gesuchte Gleichungsform genauer untersucht werden.

Der erste Ausdruck, der nach dem Faktor a steht ist ein binomischer Ausdruck. das Ausmultiplizieren erfolgt nach den Binomischen Formeln mit dem Ergebnis $y' = x'^2 + 2dx' + d^2 + e$. Damit steht die Frage : Wie kann man die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ so umformen, dass eine vollständige Binomische Formel entsteht.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = -c$$
$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = -c + \frac{b^2}{4a}$$
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a} \quad | : a$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad | \sqrt{}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \left|\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right|$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Um eine vollständige Binomische Formel zu erzeugen, bringt man das absolute Glied auf die rechte Seite. Dann ist auf der linken Seite eine Konstante zu finden, dass eine Binomische Formel entsteht. Der gleiche Wert ist auf der rechten Seite zu addieren.

Beim Berechnen der Quadratwurzel ist das Ergebnis der Betrag des Wurzelwertes.
Die Wurzel ist immer positiv, aber eine quadratische Gleichung hat zwei Lösungen !
Der Betrag ist immer positiv, aber die Lösung hat nach Betragsdefinition zwei verschiedene Vorzeichen. Eigentlich auf beiden Seiten, aber es entstehen keine weiteren Lösungen.

Aus dem Nenner lässt sich die Wurzel allgemein angeben und mit dem Bruch davor zusammenfassen

Der Vergleich der verschobenen Parabel $y' = a(x'-d)^2 + e$ mit der umgestellten Formel

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a}$$

führt zu folgenden Schlußfolgerungen:

Der x Wert des Scheitels ist $x_S = -\frac{b}{2a}$

Der y Wert des Scheites ist $y_S = c - \frac{b^2}{4a}$

Die Nullstellen sind von der x Koordinate des Scheitels $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ entfernt.

Diese Wurzelausdruck entscheidet auch darüber, ob es eine, zwei oder keine Nullstelle gibt.

1. Wenn der **Wurzelausdruck eine negative Zahl** ergibt, dann kann es keine Nullstellen geben, da aus einer negativen Zahl keine Quadratwurzel berechnet werden kann.
2. Ist der **Wurzelausdruck gleich Null**, dann gibt es keinen Abstand von der x Koordinate des Scheitels. Damit gibt es eine doppelte Nullstelle, die genau im

Scheitelpunkt liegt. Wenn es keinen Abstand zum Scheitel gibt, dann kann die Nullstelle nur der Scheitel selbst sein.

3. Ist der **Wurzelausdruck eine positive Zahl**, dann gibt es auch einen definierten Abstand zur x Koordinate des Scheitels. In diesen Fällen gibt es zwei Lösungen, die zum Scheitel den gleichen Abstand haben.

Auf Grund der Bedeutung des Wurzelausdrucks für die Nullstellen hat der Ausdruck unter der Wurzel einen besonderen Namen erhalten: **Diskriminante**.
Für die Anzahl der Nullstellen ist das Vorzeichen der Diskriminante entscheidend. Da der Nenner des Ausdrucks aber immer positiv ist, ist für das Vorzeichen nur der Zähler verantwortlich. Deshalb ist der Ausdruck für die Diskriminante: $\sqrt{b^2-4ac}$

Reduziert man die allgemeine quadratische Funktion auf die Normalform für Normalparabeln, für die a = 1 ist, dann ergibt sich aus der Lösungsformel folgende Kurzform:

$$x_{1/2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

Da die Normalform häufig in der Form $y = x^2 + px + q$ geschrieben wird, stellt sich dann die Lösungsformel in der Form:

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

dar.

18.3. Scheitelkoordinaten

Eine weitere wichtige Aufgabenstellung ist die Bestimmung des Scheitels. Die Berechnung erfolgt über die gleiche Weise mit quadratischer Ergänzung, wie sie im vergangenen Abschnitt beschrieben wurde.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

$$y - c + \frac{b^2}{4a} = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$y - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$$

Klammere den Faktor vor dem x^2 so aus, dass der Faktor von dem linearen Glied mit ausgeklammert wird.
Bringe c auf die linke Seite.
Ergänze den rechten Ausdruck zu einer Binomischen Formel. Auf der linken Seite ist der gleiche Ausdruck zu addieren, um die Gleichung nicht zu zerstören.
Zusammenfassung der rechten Seite nach Binomischer Formel.

In dieser Form kann an die Koordinaten des Scheitels unmittelbar ablesen:
Der x-Wert des Scheitels ist der Ausdruck in dem Binom auf der rechten Seite:

$$d=x_S=-\frac{b}{2a}$$

Der y-Wert des Scheitels ist von der linken Seite auszulesen.

$$e=y_S=c-\frac{b^2}{4a}$$

Daraus entsteht die Scheitelgleichung

$$\boxed{y-e=a(x-d)^2}$$

Bei der Bestimmung der Scheitelkoordinaten ist zu beachten, dass vor den auszulesenden Koordinaten ein negatives Vorzeichen stehen muss. Ist das im konkreten Fall nicht gegeben und das Vorzeichen ist positiv, dann ist das Vorzeichen für die Scheitelkoordinaten auf eine Minuszeichen zu ändern.

$y + 3 = (x – 4)^2$ => $y – (– 3) = (x – 4)^2$ S(– 3, 4)
$y + 1 = (x + 5)^2$ => $y – (– 1) = (x – (–4))^2$ S(– 1, –4)
$y – 2 = (x + 3)^2$ => $y – 1 = (x – (–3))^2$ S(2, –3)

(Die hier benutzte Schreibweise weicht von denen in Formelsammlungen ab. In Formelsammlungen steht die y-Koordinate mit auf der Seite, auf der auch der Ausdruck von x steht: $y = a(x – d)^2 + e$. Dadurch ist bei der Scheitelkoordinate für y das Vorzeichen nicht zu ändern)

Um Verwechslungen mit anderen Bezeichnern der Quadratischen Funktionen zu vermeiden, werden die Koordinaten des Scheitel zukünftig mit d für die x-Koordinate und e für die y-Koordinate bezeichnet.

18.3.1 Geometrische Interpretation der Scheitelgleichung

Die Berechnung des Scheitels über quadratische Ergänzungen entspricht in keiner Weise den Berechnungen von Extremwerten (der Scheitel ist für die Parabel ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt) oder anderen Möglichkeiten ausgewählte Funktionspunkte zu bestimmen. Die zur Berechnung des Scheitels eingesetzte Verfahrensweise dient einer Koordinatenverschiebung. Aus Zeit – oder wohl eher anderen Gründen, wird diese Zusammenhang aber nicht erklärt. Hier soll dargestellt werden, was eine Koordinatenverschiebung mit der Scheitelbestimmung zu tun hat.

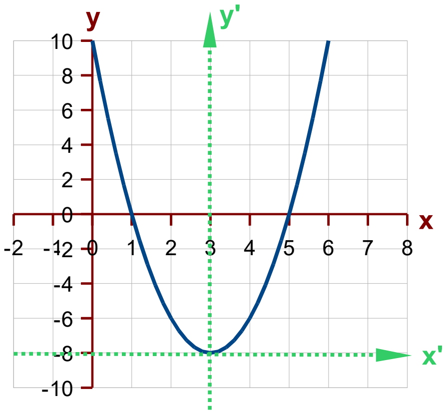
Die Scheitelform einer Parabel hat folgendes Aussehen: $y – e = a(x – d)^2$. In dieser Schreibweise ähnelt die Form schon sehr der Normalform einer Parabel $y = ax^2$.

Deshalb werden zwei neue Variable x' und y' eingeführt mit : $y' = y – e$ und $x' = x – d$. So erhält man eine neue Parabel $y' = ax'^2$. Das ist eine Parabel in einem x'-y'-Koordinatensystem, bei dem der Scheitel im Ursprung des neuen Koordinatensystems liegt. Die Gleichungen $y' = y – e$ und $x' = x – d$ geben die Transformation der alten Koordinaten in die neuen Koordinaten an. Das nutzt man bei der Scheitelbestimmung aus: Im neuen Koordinatensystem $y' = y – e$, $x' = x – d$ sind die Scheitelkoordinaten x' und y' gleich 0, also $0 = y – e$ und $0 = x – d$ oder $y = e$ und $x = d$. Das heißt:

> Der Koordinatenursprung (0|0) des neuen x'-y'-Koordinatensystems hat im alten x-y-Koordinatensystem die Position (d|e).

Dieser Ursprung im neuen Koordinatensystem ist aber gleich die Scheitelposition, die dann im alten Koordinatensystem auch S(d|e) ist. Schreibt man die y-Position des Scheitels auch auf die Seite, auf der der Parameter y steht, dann ist zum Auslesen der Scheitelkoordinaten das Vorzeichen für die x und y Koordinate **immer** zu ändern, da die Formel ein Minuszeichen verlangt. In der Schreibweise der Formelsammlungen oder Mathematikbücher steht die y Koordinaten des Scheitels aber auf der Seite der

Variablen x, deshalb ist in diesen Fällen für die Koordinate y das Vorzeichen nicht zu ändern. Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge sollen dazu zwei Beispiele betrachtet werden.



Funktionsgleichung im x-y System

$y = (x - 3)^2 - 8$

$y + 8 = (x - 3)^2$

$y' = y + 8$

$x' = x - 3$

Koordinatenursprung:

$y' = 0$; $x' = 0$ liefert

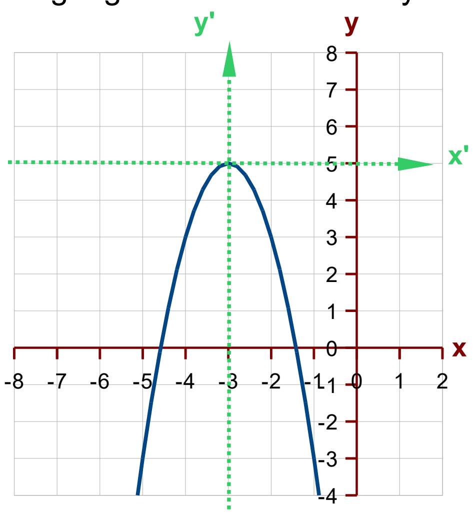
$0 = y + 8$ oder $y = -8$

$0 = x - 3$ oder $x = 3$

Funktionsgleichung im x'-y' System

$y' = x'^2$

Gesucht ist die Gleichung einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Öffnungsfaktor 2 und dem Scheitel im Punkt (-3|5). Die Funktionsgleichung wird so aufgebaut, dass x' und y' Null gesetzt werden und dann die Funktionsgleichung in x'-y' durch die Ausgangskoordinaten x und y ersetzt werden.



$y = 5$

$x = -3$

x'-y' -Koordinatenursprung:

$0 = y - 5$

$0 = x + 3$

x'-y'- Koordinatenssystem mit obigen Ursprung:

$y' = y - 5$

$x' = x + 3$

Parabelgleichung im x'-y' System:

$y' = -2x'^2$

Parabelgleichung im x-y System:

$y - 5 = -2(x + 3)^2$

Die Herleitung des neuen Koordinatensystems als dasjenige, bei dem der Scheitel der Parabel im Ursprung liegt, führt zu den Koordinaten des Scheitels im ursprünglichen Koordinatensystem, indem der Ursprung des neuen Koordinatensystems in Koordinaten des alten Koordinatensystems angegeben wird. Es ist auch ersichtlich, wie und warum der Vorzeichenwechsel zustande kommt.
Da es sich hier also um eine Koordinatentransformation handelt, ist auch zu erkennen, dass der Skalierungsfaktor a der Parabel keinen Einfluss hat und deshalb bei allen Berechnungen ausgeklammert werden muss.

18.4. Formen quadratischer Funktionen

Für das Aufstellen einer quadratischen Funktionsgleichung gibt es drei Möglichkeiten. Je nachdem, welche Punkte der Kurve gegeben sind, benutzt man die zugehörige Form.

18.4.1 Die Polynomform

Das ist die Grundform einer quadratischen Funktion.

Polynomform $\boxed{y = ax^2+bx+c}$ $\boxed{y=x^2+px+q}$

Um aus dieser Form die Nullstellen und den Scheitel zu bestimmen wird das weiter oben beschriebene Vorgehen mittel quadratischer Ergänzung benutzt. Der erste Teil der Nullstellenberechnung führt auf die Scheitelform, aus der die Scheitelkoordinaten bestimmt werden können.

Nullstellen:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Scheitelpunkt:

$$S\left(-\frac{b}{2a}\ /\ c-\frac{b^2}{4a}\right) \qquad S\left(-\frac{p}{2}\ /\ \left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)$$

Eine Polynomform der allgemeinen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ kann man aus drei gegebenen Punkten erstellen. Diese drei Punkte müssen die Funktionsgleichung erfüllen. Deshalb wird aus jedem Punkt eine Gleichung erzeugt, bei dem der x-Wert des Punktes für die Variable x eingesetzt wird und der y Wert des Punktes als y-Wert auf die linke Seite geschrieben wird:

Von einer Parabel kennt man die drei Punkte P(2 | 8), Q(−1|−1), R(−4|−4).
Bestimmen Sie ihre Gleichung.

$P(2 \mid 8) \in p$: $8 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad \Rightarrow \quad 8 = 4a + 2b + c \quad (1)$

$Q(-1|-1) \in p$: $(-1) = a \cdot (-1)^2 + b\,(-1) + c \quad \Rightarrow \quad -1 = a - b + c \quad (2)$

$R(-4|-4) \in p$: $(-4) = a \cdot (-4)^2 + b\,(-4) + c \quad \Rightarrow \quad -4 = 16a - 4b + c \quad (3)$

Sie erhalten genau drei Gleichungen für drei Unbekannte!

Meistens wird man zuerst c eliminieren: $(1) - (2) \quad 9 = 3a + 3b \quad (4)$

$(2) - (3) \quad 3 = -15a + 3b \quad (5)$

Subtraktion der Gleichungen führt direkt auf: $6 = 18a \quad \Rightarrow \quad a = ⅓$

Das Resultat wird in (4) eingesetzt: $9 = 1 + 3b \quad \Rightarrow \quad b = 8/3$

a und b in (2) einsetzen: $-1 = ⅓ - 8/3 + c \quad \Rightarrow \quad c = 4/3$

Die Gleichung der gesuchten Parabel heißt: $y = ⅓\, x^2 + 8/3x + 4/3$

Da bei der Funktionsgleichung $y = x^2 + px + q$ nur zwei Parameter p und q bestimmt werden müssen, reicht es, wenn zwei Punkte der Funktion bekannt sind.

18.4.2 Die Scheitelform

Für die Scheitelform gibt es ebenfalls zwei Gleichungen, je nachdem, ob die allgemeine quadratische Funktion oder die Normalparabel gefragt ist.

Scheitelform $\boxed{y-e=a(x-d)^2}$ $\boxed{y-e=(x-d)^2}$

Die Formen unterscheiden sich darin, dass der Parameter a bei einer Normalparabel den Wert 1 hat und deshalb nicht geschrieben werden braucht. Aus dieser Form kann man direkt den Scheitelpunkt ablesen, aber man kann auch unter Verwendung der Scheitelkoordinaten die beiden Nullstellen angeben.

Nullstellen

$$x_1=d+\sqrt{-\frac{e}{a}} \qquad x_1=d+\sqrt{-e}$$

$$x_2=d-\sqrt{-\frac{e}{a}} \qquad x_1=d-\sqrt{-e}$$

Die Nullstellenformel zeigt, dass es für positives a oder eine Normalparabel nur eine Nullstelle geben kann, wenn – e > 0 ist, denn sonst ist der Wurzelausdruck eine negative Zahl. Wenn – e > 0 sein muss, dann heißt das, dass e < 0 sein muss. e < 0 bedeutet aber, dass die y Koordinate des Scheitels kleiner Null sein muss. Dieser Zusammenhang ist anschaulich sofort einleuchtend: Eine nach oben geöffnete Parabel (a>0) kann nur dann Nullstellen haben, wenn ihr Scheitel unterhalb der x-Achse liegt.

Die Scheitelform einer quadratischen Funktion benutzt man am besten, wenn man den Scheitelpunkt kennt oder aus dem Kurvenbild ablesen kann.

Wenn man nicht weiß, ob es sich um eine Normalparabel mit dem Koeffizienten a = 1 handelt, muss man noch einen Punkt kennen, der nicht der Scheitel ist. Entweder muss dieser Punkt gegeben sein, oder man muss ihn aus dem Kurvenbild ablesen.

Von einer Parabel kennt man den Scheitelpunkt S und einen weiteren Punkt. Bestimmen Sie ihre Gleichung:

$S(-3/\ 2)$, $P(1/\ 10)$

Wir setzen den Scheitelpunkt ein: $y - 2 = a(x + 3)^2$
P liegt auf der Parabel;
unsere Gleichung muss für P(1/10) stimmen: $10 - 2 = a(1 + 3)^2$
Damit lässt sich a mit Leichtigkeit berechnen: $8 = a \cdot 4^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$
Wir erhalten die Parabelgleichung: $y - 2 = \frac{1}{2}\,(x+3)^2$

18.4.3 Nullstellenform

Neben den bisher genannten beiden Formen gibt es noch eine Form, die die Kenntnis der Nullstellen voraussetzt. Diese Form ist auf den italienischen Mathematiker Vieta zurückzuführen und wird häufig als „Vietascher Wurzelsatz“ bezeichnet. Vieta hat nämlich herausgefunden, dass bei einer quadratischen Funktion $y = x^2 + px + q$ für die beiden Nullstellen x_1 und x_2 folgende interessante Beziehung gilt:

$$q = x_1 \cdot x_2 \quad \text{und } p = -(x_1 + x_2)$$

Dieser Zusammenhang kann an Beispielen leicht nachvollzogen werden, aber auch allgemein über die Summe und das Produkt der beiden Nullstellen bewiesen werden.

Nullstellenform $\boxed{y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$ $\boxed{y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$

Zur Umrechnung auf die Polynomform muss man die beiden Klammern ausmultiplizieren und erhält dann folgende Gleichung:

$$y = a(x^2 + (-(x_1 + x_2))x + x_1 \cdot x_2)$$

Wenn man mit dieser Funktionsgleichung die Berechnung des Scheitelpunktes durchführt erhält man folgende Wert des Scheitels in Abhängigkeit von den Nullstellen:

Scheitelpunkt $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2a}$ $y_S = -\frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2$

Das der x Wert des Scheitels unter Berücksichtigung von a in der Mitte der beiden Nullstellen liegt, ist bereits bekannt. Je größer a ist, desto tiefer liegt der Scheitelpunkt und die Nullstellen rücken näher aneinander, weil für große a die Parabeln schmaler werden.
Die Nullstellenform benutzt man natürlich dann, wenn man die Nullstellen der Funktion kennt, oder sie aus dem Kurvenbild ablesen kann. Für die Berechnung des Faktors a benötigt man wieder einen Punkt, der diesmal nicht die Nullstelle sein darf. Hier ist auch der Scheitelpunkt, sofern man ihn kennt oder ermitteln kann, möglich. Das Vorgehen ist analog zur Scheitelgleichung. Man setzt die Koordinaten des Punktes für x und y in die Funktionsgleichung ein.

18.5. Schnittpunkte Parabel und Gerade

Die Bestimmung von Schnittpunkten, gleichgültige welcher Funktionen, bedeutet immer:

> Gesucht ist ein (oder mehrere) Punkte S, die auf beiden Funktionen liegen, dh. die Koordinaten der Punkte müssen beide Funktionsgleichungen erfüllen.

Die Tatsache, dass die gesuchten Punkte beide Funktionsgleichungen erfüllen müssen, nutzt man der bei der Berechnung aus. Ein Parabel hat eine Funktionsgleichung von $y = ax^2 + bx + c$ und eine Gerade hat eine Funktionsgleichung $y = mx + b$. Für die gesuchten Schnittpunkte mit den Koordinaten $S(x_S,y_S)$ heißt das:

$$y_S = a\, x_S^{\,2} + b\, x_S + c$$
$$y_S = m\, x_S + b$$

Es entsteht ein Gleichungssystem, bei dem die linken Seiten gleich sind, da auf beiden linken Seiten der Wert y_S steht. Damit müssen auch die rechten Seiten gleich sein, da es sonst keine Gleichung ergibt. Aus der Theorie der Gleichungssysteme kann man hier sagen: Beide Gleichungen sind nach einer Variablen aufgelöst, also kann man das Gleichsetzungsverfahren anwenden. Setzt man jetzt die rechten Seiten gleich, erhält man eine Gleichung mit einer Variablen:

$$a\, x^2 + b\, x + c = m\, x + b$$

Eine solche Berechnung eines Schnittpunktes von einer Parabel mit einer Geraden führt immer zu einer quadratischen Gleichung. Damit ist auch klar, dass man mit den drei verschiedenen Lösungsmöglichkeiten rechnen muss, die bei Lösen quadratischer Gleichungen auftreten: zwei Lösungen, eine Lösung, keine Lösung.

Die Zusammenfassung der obigen Gleichung führt zu einer Nullstellenbestimmung der Differenzfunktion. Nur der geometrische Interpretation ist eine andere:

$$ax^2 + (b-m)\, x + c - n = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(b-m) \pm \sqrt{(b-m)^2 - 4a(c-n)}}{2a}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist größer 0:

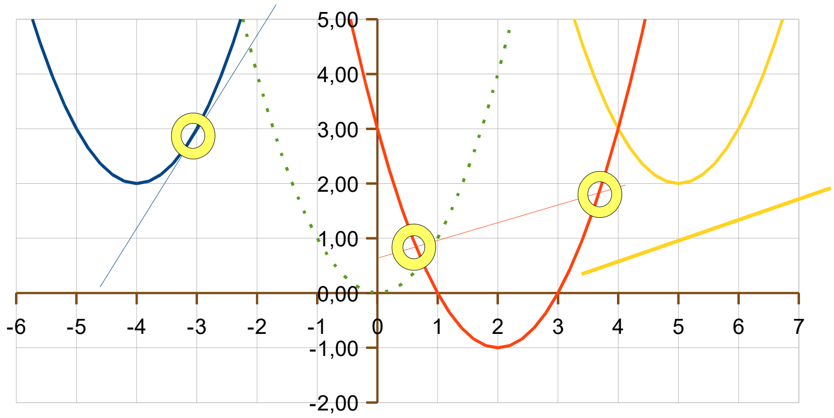
Es gibt zwei Schnittpunkte von Gerade und Parabel.

Der Ausdruck der Wurzel ist kleiner als 0:

Es gibt keinen Schnittpunkt zwischen Gerade und Parabel

Der Ausdruck unter der Wurzel ist =0

Die Gerade berührt die Kurve, sie ist Tangente an einem Kurvenpunkt



18.5.1 Tangente an einen Parabelpunkt

In diesem Zusammenhang wird immer wieder ein Aufgabentyp formuliert: Bestimme die Tangente im Punkt $P(x_0/y_0)$ an die Parabel p. Im vorangehenden Abschnitt wurde bereits geklärt, dass eine Tangente immer dann entsteht, wenn es nur einen Schnittpunkt zwischen Parabel und Gerade gibt. Ein Schnittpunkt einer quadratischen Gleichung bedeutet aber, dass der Ausdruck der Diskriminante Null sein muss. Das Ziel dieser Aufgabenstellung ist es, die Parameter m und b einer Geradengleichung so zu bestimmen, dass die Gerade eine Tangente ist. Dazu werden die beiden Formeln näher betrachtet.

$$ax^2 + (b-m)\,x + c - n = 0$$

$$x_{1/2}=\frac{-(b-m)}{2a}\pm\frac{\sqrt{(b-m)^2-4a(c-n)}}{2a}$$

Für eine Tangente muss der Ausdruck unter der Wurzel gleich Null sein, außerdem ist bekannt, dass die x Koordinate der Doppellösung genau der Wert -(p/2) einer quadratischen Gleichung ist. In diesem Fall ist die x Koordinate also

$$x_0=\frac{-(b-m)}{2a}$$

Aber genau dieses x_0 ist bekannt, da ja der Punkt, an dem die Tangente angelegt werden soll, bekannt sein muss, denn jeder Punkt hat eine andere Tangentengleichung. Was aus dieser Formel interessiert ist also nicht das x_0, sondern dass m, denn alle anderen Werte sind bekannt. Löst man diese Formel nach m auf erhält man für die Steigung:

$$\boxed{m=2a\,x_0+b}$$

Als zweites muss der Wurzelausdruck Null sein. Unter der Wurzel stehen zunächst zwei Unbekannt: m und n. Aus der x Koordinate des Berührungspunktes konnte aber der Wert für m bereits bestimmt werden, so dass mit diesem Wert jetzt der Wert für n berechnet werden kann.

$$\begin{aligned}
&(b-m)^2-4a(c-n)=0\\
&(b-(2ax_0+b))^2-4a(c-n)=0\\
&(2ax_0)^2-4ac+4an=0\\
&4a^2x_0^2-4ac+4an=0 \qquad |:4a\\
&a\,x_0^2-c+n=0
\end{aligned}$$

$$\boxed{n=c-a\,x_0^2}$$

Damit lassen sich für jede Parabel p und jeden Punkt P die Parameter für die Tangente bestimmen. Dieser Rechenweg kann natürlich auch an jedem Beispiel selbst durchgeführt werden. Es ist nicht angeraten, die Formeln auswendig zu lernen, da sie so oft nicht gebraucht werden. Man sollte aber den Lösungsweg für solche Aufgaben kennen.

Beispiel:

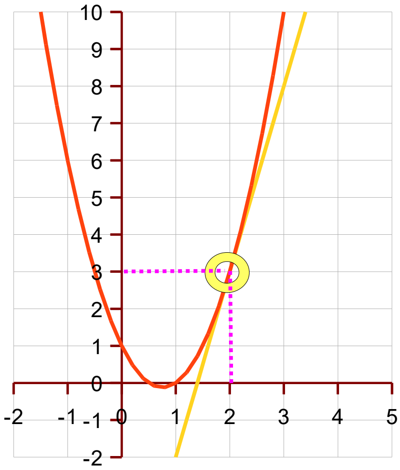
Gesucht ist an die Parabel $y = 2x^2 - 3x + 1$ die Tangente im Punkt P(2,3).

$$2x^2 - 3x + 1 = mx + n$$
$$2x^2 - (3+m)x + 1 - n = 0$$

$$x^2 - \frac{3+m}{2}x + \frac{1-n}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{3+m}{4} \pm \sqrt{\frac{(3+m)^2}{16} - \frac{(1-n)}{2}}$$

$$2 = \frac{3+m}{4} \Rightarrow \underline{\underline{m = 5}}$$



y = 2x² – 3x +1
y = 5x – 7

$$(3+m)^2 - 8(1-n) = 8^2 - 8 + 8n = 56 + 8n = 0 \Rightarrow 56 = -8n$$
$$\underline{\underline{-7 = n}}$$

$$\boxed{y = mx + n = 5x - 7}$$

18.5.2 Tangente mit vorgegebener Steigung an eine Parabel

Die Aufgabestellung kann auch in anderer Weise gestellt werden. Gesucht ist die Tangente an einen Punkt der Parabel, die die vorgegebene Steigung m besitzt. In diesem Fall ist nicht der Punkt gegeben, an den die Tangente angelegt werden soll, sondern der Tangentenanstieg und es ist der Punkt gesucht, in dem die Tangente genau diesen Anstieg hat. Dazu benutzt man den Ausdruck der quadratischen Lösungsformel direkt.

$$x_0 = \frac{-(b-m)}{2a}$$

Im vorherigen Abschnitt wurde dieser Zusammenhang zwischen Punkt und Tangenten-anstieg hergeleitet. In dem jetzigen Fall ist m bekannt und es kann über diese Formel der x–Wert des Punktes berechnet werden, in dem die Tangente den vorgegebenen Anstieg hat. Den y–Wert des Punktes erhält man, wenn man den x–Wert in die Funktionsgleichung der Parabel einsetzt. Der Wert für n ist dann wie im vorhergehenden Kapitel zu berechnen.

Beispiel:
Gesucht ist die Tangente an die Parabel $y = 2x^2 - 3x + 1$ die parallel zu $y = 5x - 7$ ist.

$a = 2$; $b = -3$; $m = 5$ $$x_0 = -\frac{(b-m)}{2a} = -\frac{((-3)-5)}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Der y Wert zu diesem x–Wert ist: $y_0 = 3$.
Der Punkt (2|3) ist derjenige, an dem die Tangente parallel zu $y = 5x - 7$ ist.

18.6. Schnittpunkte einer Parabel mit einer anderen Parabel

Prinzipiell gilt hier das Gleiche, wie bei Schnittpunkten mit einer Geraden. Es existieren hier aber zwei Parabelgleichungen:

$$y_S = a_1 x_S^2 + b_1 x_S + c_1$$
$$y_S = a_2 x_S^2 + b_2 x_S + c_2$$

Man kann wieder davon ausgehen, dass die linken Seiten gleich sind, also müssen die rechten Seiten auch gleich sein. Das führt zu einer Gleichung

$$a_1 x_S^2 + b_1 x_S + c_1 = a_2 x_S^2 + b_2 x_S + c_2$$

Fasst man bei dieser Gleichung die quadratischen, linearen und absoluten Glieder zusammen entsteht folgende Gleichung:

$$(a_1 - a_2) x_S^2 + (b_1 - b_2) x_S + (c_1 - c_2) = 0$$

Das ist zunächst wieder eine quadratische Gleichung, die die Differenzfunktion der beiden ursprünglichen Parabeln darstellt. Hier berechnet man die Nullstellen der Differenzfunktion. Natürlich sind die Nullstellen der Differenzfunktion genau dort, wo die Ausgangsfunktionen ihren Schnittpunkt haben, denn genau dort sind die y Werte gleich und die Differenz ist 0.
Aus der Gleichung ist sehr einfach zu schlußfolgern: Wenn die beiden Koeffizienten a gleich sind, dann kann es nur einen Schnittpunkt geben und aus der quadratischen Gleichung wird eine lineare Gleichung. Damit ist auch keine p – q – Formel zum Lösen der Gleichung notwendig.