12. Strahlensatz

Eine **affine Abbildung** ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P umkehrbar eindeutig einen Bildpunkt P` zuordnet und die

- geradengetreu, parallelengetreu und teilverhältnistreu ist.

Bei den **affinen Abbildungen** unterscheidet man zwischen

- Kongruenzabbildungen (z.B. Verschiebung, Spiegelung, Drehung),
- Ähnlichkeitsabbildungen (z.B. zentrische Streckung und Stauchung)
- und flächenmaßtreuen Abbildungen (z.B. Scherung).

- Eine Ähnlichkeitsabbildung ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P umkehrbar eindeutig einen Bildpunkt P` zuordnet und die geradengetreu, parallelengetreu, teilverhältnistreu und winkelmaßtreu ist.

- Eine Kongruenzabbildung ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P umkehrbar eindeutig einen Bildpunkt P` zuordnet und die geradengetreu, parallelengetreu, teilverhältnistreu, winkelmaßtreu und längenmaßtreu ist.

12.1. Kongruenzabbildungen

Als Kongruenzabbildung oder “Bewegung” wird jede Abbildung bezeichnet, bei der die Original-Figur und ihr Abbild in Form und Größe übereinstimmen, sich also nur die Lage der Figur im Raum verändert. Lässt sich eine geometrische Figur durch eine beliebige Anzahl von Bewegungen deckungsgleich in eine andere Figur überführen, so nennt man die beiden Figuren kongruent; kongruente Figuren haben stets gleich lange Strecken und gleich große Winkel.

Die vier möglichen Kongruenzabbildungen werden im Folgenden kurz aufgelistet:

12.1.1 Translation einer geometrischen Figur

Um eine Verschiebung (“Translation”) zu beschreiben, geht man von einem Vektor aus, für deren Länge gelten soll. Trägt man an jedem Punkt einer geometrischen Figur einen ebenso langen, zu parallelen Vektor mit als Anfangspunkt an, so ergibt sich zu jedem Original-Punkt ein zugehöriger Bildpunkt .
Die sich ergebende Bildfigur wird durch den Verschiebungsvektor gegenüber der Original-Figur lediglich um die Länge in Richtung von verschoben; die Größe, Form und Orientierung der Figur bleiben hingegen erhalten.

12.1.2 Rotation einer geometrischen Figur

Um eine Drehung (“Rotation”) zu beschreiben, geht man von einem bestimmten Punkt als Drehzentrum und einem festen Winkel aus. Durch jeden Punkt einer Figur zeichnet man einen Kreis um den Mittelpunkt und bestimmt auf diesem Kreis den zu gehörenden Bildpunkt so, dass der Winkel gleich ist.
Erfolgt die Drehung entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn, so spricht man von einem positiven Drehsinn; bei einer Drehung im Uhrzeigersinn spricht man von einem

negativen Drehsinn. Die Form und Größe der Figur sowie die Reihenfolge ihrer Punkte bleibt bei einer Drehung erhalten.

12.1.3 Spiegelung einer geometrischen Figur an einer Geraden

Um eine Spiegelung an einer Geraden zu beschreiben, geht man von einer festen Gerade als Spiegelachse aus. Durch jeden Punkt einer Figur konstruiert man eine Gerade senkrecht zu und bestimmt auf dieser den Bildpunkt so, dass und von der Spiegelachse den gleichen Abstand haben und auf verschiedenen Seiten von liegen.

Der Punkt wird üblicherweise Spiegelbild von bezüglich bezeichnet. Bei einer Achsenspiegelung bleibt die Form und Größe der Figur erhalten, es ändert sich jedoch der Umlaufsinn ihrer Punkte.

Als Ähnlichkeitsabbildung (oder Ähnlichkeit) wird in der Geometrie, einem Teilgebiet der Mathematik eine Affinität bezeichnet, die

- Streckenverhältnisse und Winkelgrößen unverändert lässt,
- aber im Allgemeinen die Längen von Strecken ändert.

Der Begriff ist daher nur in solchen mathematischen Räumen sinnvoll, in denen ein Winkelbegriff und ein Längenbegriff vorhanden ist. Meist handelt es sich dabei um Punkträume, denen ein reeller euklidischer Raum als Raum der Verbindungsvektoren zugeordnet ist (siehe Euklidischer Raum#Der euklidische Punktraum). Figuren, die durch eine Ähnlichkeitsabbildung aufeinander abgebildet werden können, heißen ähnlich zueinander.

12.2. Ähnlichkeit von Figuren

Definition:Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn es für alle Punkte P1 und P2 aus dem Original einen Faktor k gibt, so dass für die Bildpunkte P1' und P2' die Gleichung gilt:

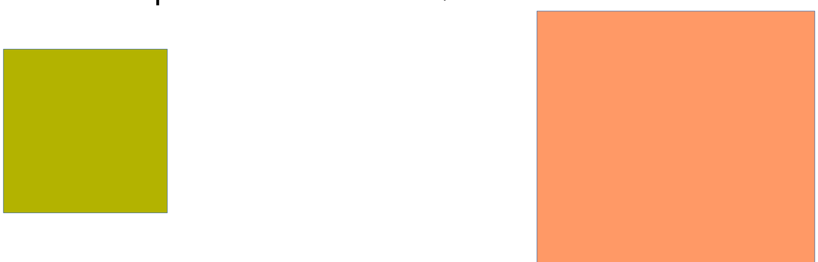
$$|P_1P_2| = k\,|P_1'P_2'|$$

Dabei sollen die Betragszeichen die Länge der Strecken bezeichnen. Aus dieser Definition folgt, daß zwei Figuren ähnlich sind, wenn sie

- in den entsprechenden Winkeln übereinstimmen
- das Verhältnis der entsprechenden Seiten gleich ist.

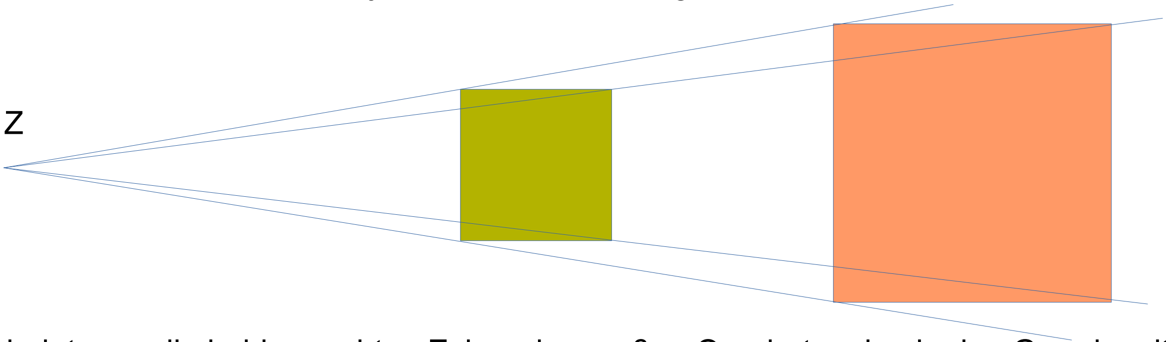
Bei einer Ähnlichkeitsabbildung werden Geraden wieder auf Geraden und Parallelen wieder auf Parallelen abgebildet.

Es sollen als Beispiel zunächst zwei Quadrate betrachtet werden.



Diese beiden Quadrate sind ähnlich, da die Seitenlängen mittels eines Faktors vergrößert wurden, die Winkel gleich geblieben sind und parallele Seiten wieder parallel

sind.
Diese beiden Quadrate sollen jetzt etwas anders angeordnet werden.



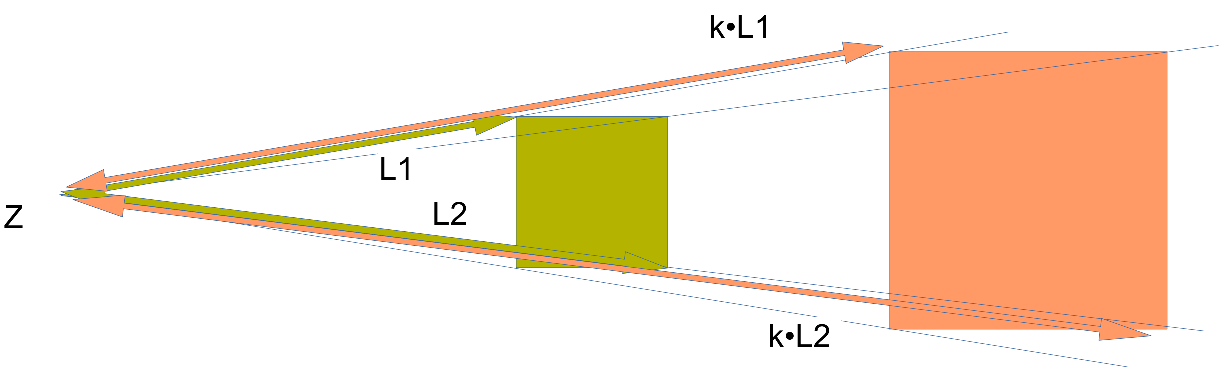
Verbindet man die beiden rechten Ecken des großen Quadrates durch eine Gerade mit einem Punkt Z, und verbindet die beiden linken Ecken der großen Quadrates mit dem gleichen Punkt Z, dann gibt es eine Möglichkeit, das kleine Quadrat so in die Figur einzubauen, dass die rechten Ecken des kleinen Quadrates auf der entsprechenden Geraden des großen Quadrates liegen und die linken Ecken auf den Geraden der linken Ecken des großen Quadrates. Das ist die Konstellation der.....

Es gibt zwei Typen von echten Ähnlichkeiten, also Ähnlichkeiten, die keine Kongruenzabbildungen sind:

- **Drehstreckungen** sind orientierungstreu (d.h. sie belassen den Umlaufsinn von Vielecken unveränderlich). Sie bestehen aus einer zentrischen Streckung und einer Drehung, und sie werden durch den Streckungsfaktor und den Drehwinkel charakterisiert. Ist der Streckungsfaktor gleich 1, so entsteht eine reine Drehung.
- **Klappstreckungen** kehren die Orientierung um und bestehen aus einer Spiegelung an einer Hyperebene (einer Geradenspiegelung, falls der affine Raum zweidimensional, einer Ebenenspiegelung, falls er dreidimensional ist) und einer zentrischen Streckung. Ist der Streckungsfaktor gleich 1, so handelt es sich um eine reine Geradenspiegelung.

12.3. Zentrische Streckung

Bei der zentrischen Streckung handelt es sich um eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der in erster Linie die Streckenlängen von Streckzentrum Z betrachtet werden.



Sind der Abstand der linken Ecken des kleinen Quadrates vom Punkt Z L1 und der Abstand der rechten Ecken des kleinen Quadrates Z2, dann ist der Abstand der linken Ecken des Großen Quadrates zu Z und der rechten Ecken des großen Quadrates k•L1 bzw. k•L2, wobei der Faktor k in beiden Fällen der gleiche ist.

Einen solchen Vorgang nennt man zentrische Streckung. Es gibt ein Streckzentrum Z und von diesem ausgehend Geraden, auf denen die zugehörigen Punkte der ähnlichen Figuren liegen. Dabei ist leicht einzusehen, dass es sich keineswegs nur um die Eckpunkte handeln kann. Das gilt auch für alle Punkte auf den Kanten, oder im Inneren der Figuren.
Eine zentrische Streckung ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

a) Jeder Punkt P und sein Bildpunkt P' liegen auf einer Geraden, die durch das Streckzentrum Z geht.
(Die Verbindung von Originalpunkt und Bildpunkt geht durch das Streckzentrum)

b) Der Abstand des Bildpunktes P' von Z wird durch den Betrag des Streckfaktors k bestimmt.
Es gilt: P'Z = k | PZ |
(Der Abstand des Bildpunktes von Z ist k mal länger als der Abstand des Originalpunktes zu Z)

c) Das Bild einer Geraden g ist eine parallele Gerade g'.

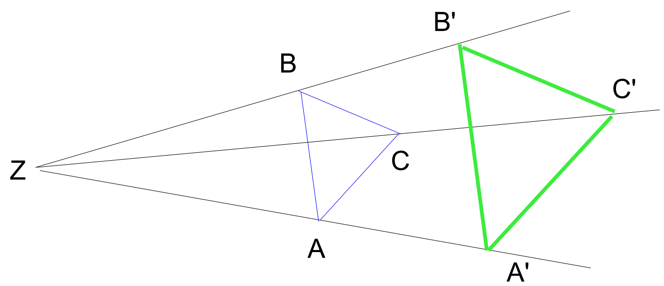
d) Die Länge der Bildstrecke wird durch die Länge der Originalstrecke und den Streckfaktor k bestimmt.
(Die Bildstrecke ist k mal länger als die Originalstrecke)

e) In zentrisch gestreckten Figuren bleiben alle Winkel erhalten.

f) Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, dann liegt sein Bildpunkt P' auf der Bildgeraden g'

g) Die durch zentrische Streckung erzeugten Figuren sind zueinander ähnlich *(formgleich, proportional)*
h) Alle Kreise sind zueinander ähnlich. Alle Quadrate sind zueinander ähnlich. Alle gleichseitigen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass nicht nur die Abstände der Eckpunkte zum Streckzentrum sich um den Faktor k verändern, sondern auch die die Abstände zwischen den geraden, in dem obigen Beispiel die Seiten der Quadrate.
Zumindest durch die senkrechten Quadratseiten entstehen im Zusammenhang mit den Geraden ähnliche Dreiecke. Diese Dreiecke haben alle die gleichen Winkel, und damit sind sie ähnlich. Außerdem ist die Proportionalität von zwei Seiten gesichert (die beiden Seiten auf den Geraden) damit muss dann auch die dritte Seite mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor existieren.



Damit gelten für eine solche Figur folgende Beziehungen:

$$\boxed{\begin{array}{l} ZA' = k * ZA \\ ZB' = k * ZB \\ ZC' = k * ZC \end{array}}$$

Als Gleichungen lassen sich alle Gleichungen nach k auflösen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{ZA'}{ZA} = k \\ \frac{ZB'}{ZB} = k \\ \frac{ZC'}{ZC} = k \end{array}}$$

oder als fortlaufende Gleichung:

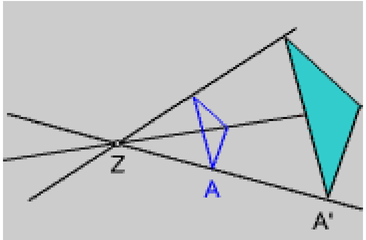
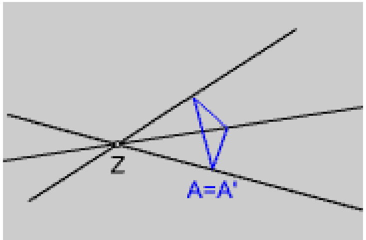
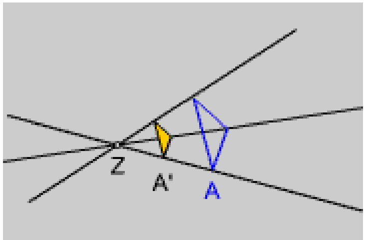
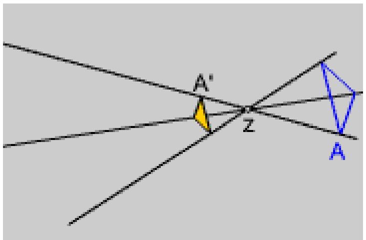
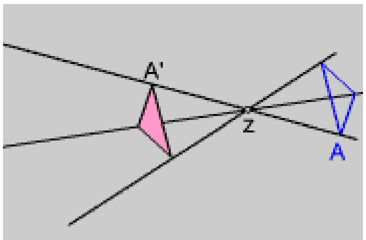
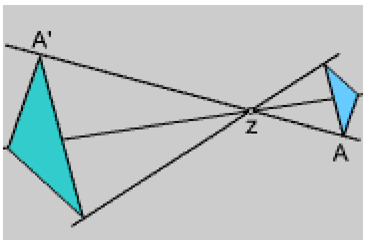
$$\boxed{\frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZC'}{ZC}}$$

In dieser Schreibweise spielt der Streckfaktor k keine Rolle mehr, es werden nur noch die Streckenlängen in das Verhältnis gesetzt und die Aussage dieser Gleichung bedeutet:

> Die Streckenlängen von Z zum Bildpunkt ins Verhältnis gesetzt zur Strecke von Z zum Originalpunkt ist für alle Punkte der Figur gleich.

Damit ist man bei den wichtigsten Formeln für Ähnlichkeitsabbildungen angelangt.

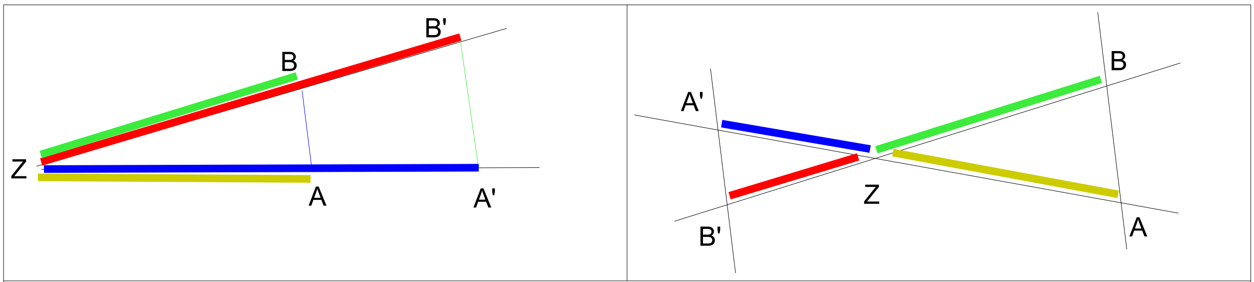
Jede Ähnlichkeitsabbildung lässt sich aus einer zentrischen Streckung und/oder einer oder mehreren Kongruenzabbildungen zusammensetzen.

Streckungs-faktor	Abbildungsart	Lage einander entsprechender Punkte bezüglich des Zentrums	
k > 1	Vergrößerung	A liegt zwischen A' und Z	
k = 1	Identität	A und A' sind identisch	
0 < k < 1	Verkleinerung	A' liegt zwischen A und Z	
-1 < k <0	Verkleinerung	Z liegt zwischen A und A' AZ > A'	
k = -1	Punkt-spiegelung	Z liegt zwischen A und A' AZ = A'Z	
k < -1	Vergrößerung	Z liegt zwischen A und A' AZ < A'Z	

12.4. Der 1. Strahlensatz

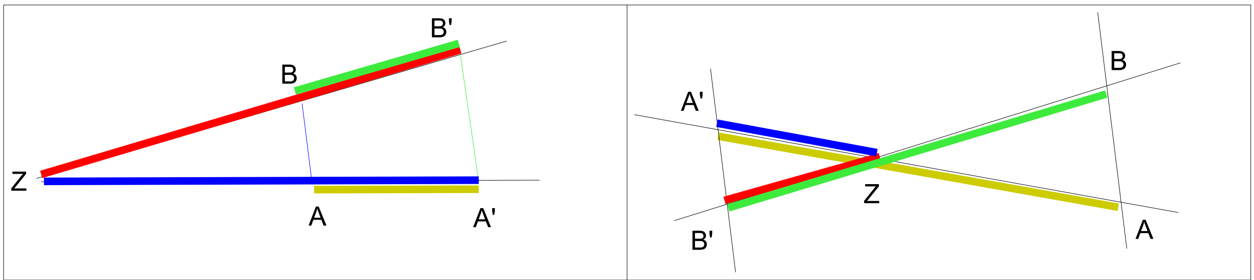
1. Strahlensatz:
Werden zwei von einem Punkt ausgehende Halbgeraden (oder deren entgegengesetzte Halbgeraden) von parallelen Geraden geschnitten, dann verhalten sich die Längen der Abschnitte auf der einen Halbgeraden, wie die Längen der Abschnitte auf der anderen Halbgeraden.

1. Form



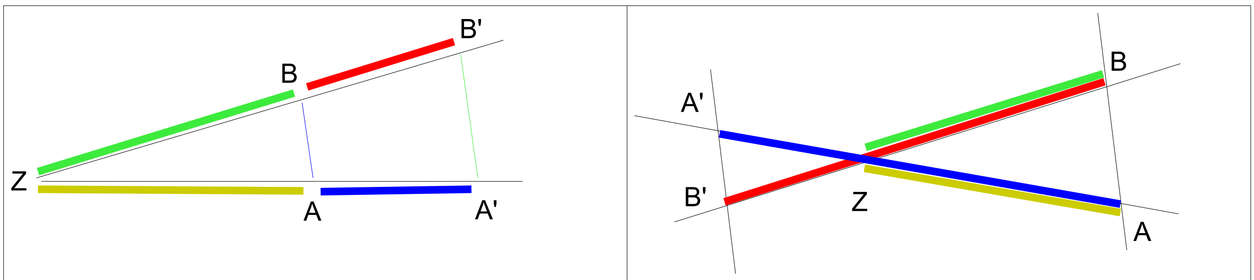
$$\frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$$

2. Form



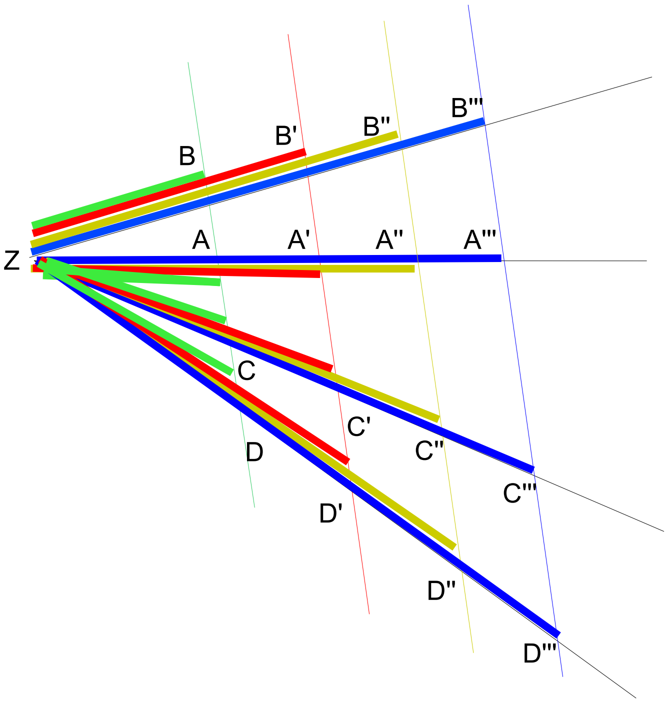
$$\frac{\overline{ZB'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{AA'}}$$

3. Form



$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}}$$

Die Aussage des Strahlensatzes gilt aber nicht nur für zwei Strahlen mit zwei Parallelen, sondern für beliebig viele Strahlen und beliebig viele Parallele.



$$\frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZC'}{ZC} = \frac{ZD'}{ZD}$$

$$\frac{ZB''}{ZB} = \frac{ZA''}{ZA} = \frac{ZC''}{ZC} = \frac{ZD''}{ZD}$$

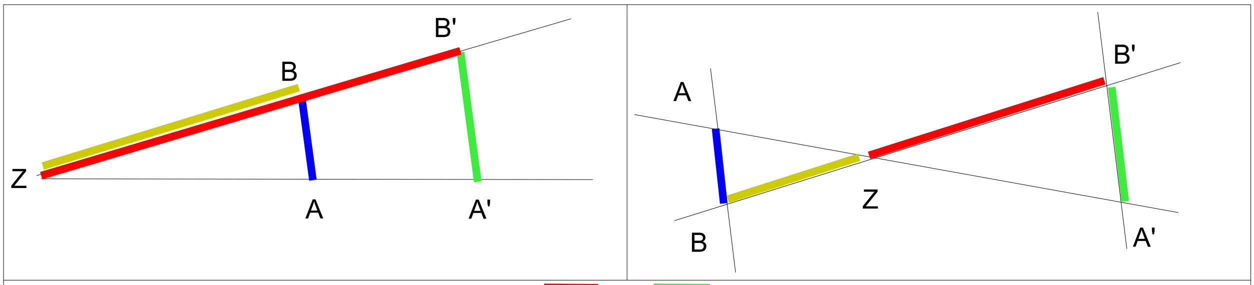
$$\frac{ZB'}{ZB'''} = \frac{ZA'}{ZA'''} = \frac{ZC'}{ZC'''} = \frac{ZD'}{ZD'''}$$

Je zwei Strahlen und je zwei Parallelen bilden immer ein Paar. Zwischen diesen beiden kann man jeweils ein Verhältnis in der Aussage des 1. Strahlensatzes formulieren. Wichtiges Merkmal für den 1. Strahlensatz ist es, dass sowohl die Gesamtstrecken, als auch die Teilstrecken auf den Strahlen ins Verhältnis gesetzt werden können.

12.5. Der 2. Strahlensatz

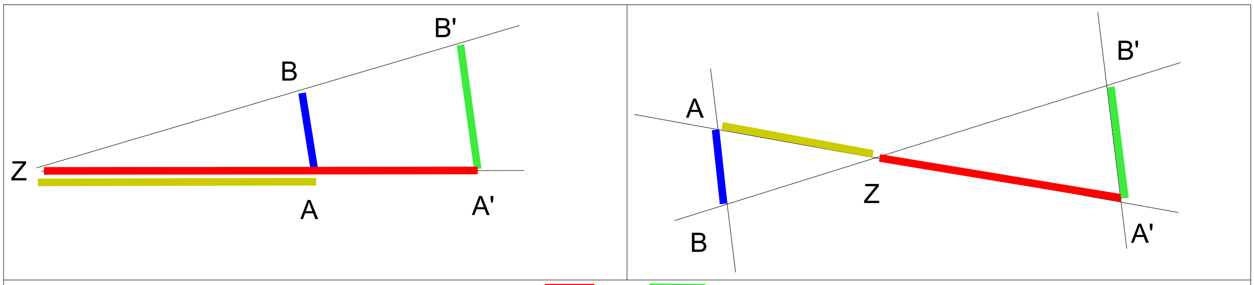
2. Strahlensatz:
Werden zwei von einem Punkt ausgehende Halbgeraden (oder deren entgegengesetzte Halbgeraden) von parallelen Geraden geschnitten, dann verhalten sich die Längen der Abschnitte auf den Parallelen wie die Längen der Abschnitte auf einer Halbgeraden.

1. Form



$$\frac{ZB'}{ZB} = \frac{A'B'}{AB}$$

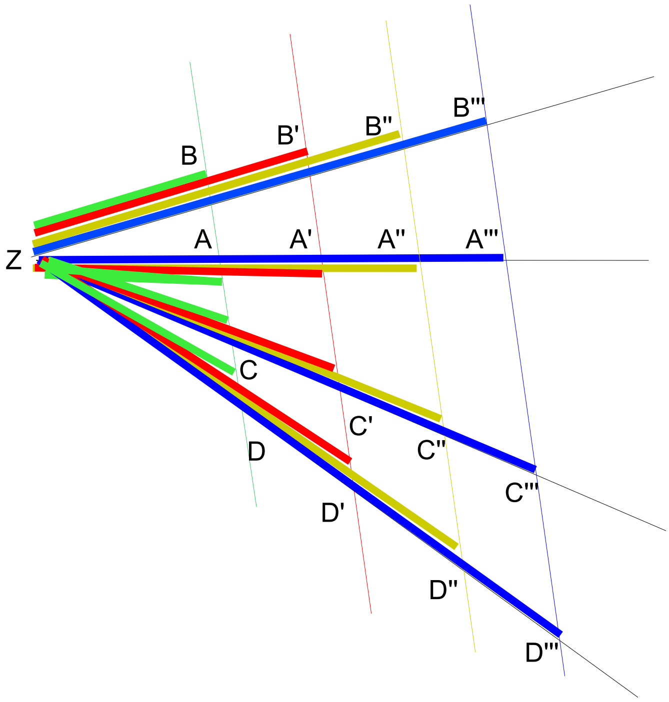
2. Form



$$\frac{ZA'}{ZA} = \frac{A'B'}{AB}$$

Für den zweiten Strahlensatz dürfen auf den Strahlen nur die Strecken vom Zentrum bis zu den Bild – oder Urbildpunkten benutzt werden, keine Teilstrecken für den linken Fall und keine Gesamtstrecken für den rechten Fall.

Auch der zweite Strahlensatz gilt für mehrere Strahlen und für mehrere Parallelen.



$$\frac{ZB}{BA} = \frac{ZB'}{B'A'} = \frac{ZB''}{B''A''} = \frac{ZB'''}{B'''A'''}$$

$$\frac{ZA}{AD} = \frac{ZA'}{A'D'} = \frac{ZA''}{A''D''} = \frac{ZA'''}{A'''D'''}$$

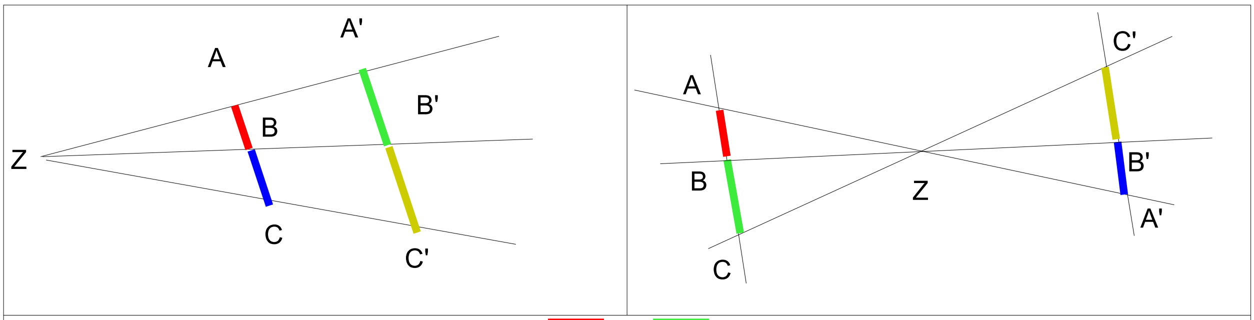
$$\frac{ZD}{AD} = \frac{ZD'}{A'D'} = \frac{ZD''}{A''D''} = \frac{ZD'''}{A'''D'''}$$

Dazu sind jeweils die Strecken vom Streckzentrum bist zur Parallelen und die Abschnitte zwischen den Strahlen ins Verhältnis zu setzen.

12.6. Der 3. Strahlensatz

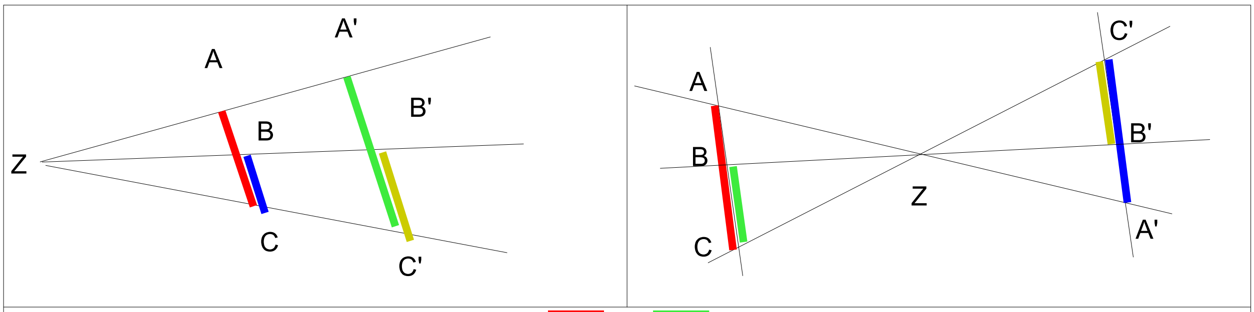
3. Strahlensatz:
Werden von einem Punkt Z ausgehende Strahlen von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Parallelen wie die Abschnitte auf der anderen Parallelen

1. Form



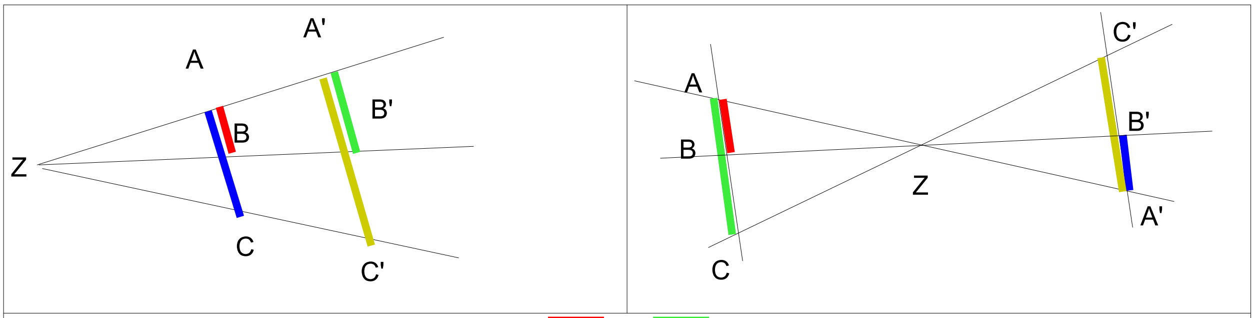
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

2. Form



$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

2. Form



$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

