1. Zahlenrechnen

1.1. Die Grundrechenarten

Die Grundrechenarten sind die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Die Addition

Ein Rechenausdruck der Form $\boxed{a + b}$ heißt Summe.

Es gilt: **1. Summand plus 2. Summand = Wert der Summe** Beispiel: $5 + 3 = 8$

Die Subtraktion

Ein Rechenausdruck der Form $\boxed{a - b}$ heißt Differenz.

Es gilt: **Minuend minus Subtrahend = Wert der Differenz** Beispiel: $5 - 3 = 2$

Die Multiplikation

Ein Rechenausdruck der Form $\boxed{a \bullet b}$ heißt Produkt.

Es gilt: **1. Faktor mal 2. Faktor = Wert der Produktes** Beispiel: $5 \cdot 3 = 15$

Die Division

Ein Rechenausdruck der Form $\boxed{a : b}$ heißt Quotient.

Es gilt: **Dividend durch Divisor = Wert des Quotienten** Beispiel: $15 : 3 = 5$

Neben den Grundrechenarten gibt es

Das Potenzieren

Ein Rechenausdruck der Form $\boxed{a^n}$ heißt Potenz. a heißt Basis (=Grundzahl) und b Exponent (=Hochzahl).

Es gilt: $\boxed{a^n = \underbrace{a\ a \ldots a}_{n-\text{mal}}}$ Beispiel: 53 = $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

> **Hinweis:**
> Die Rechenarten Addition und Subtraktion nennt man **Strichrechnungen**, die Rechenarten Multiplikation und Division **Punktrechnungen**.

1.2. Rechnen in der Menge der natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die Zahlen 1; 2; 3; ... .
Man schreibt dafür: IN = {1; 2; 3; ...}

Hinweis:
Die Zahl 0 gehört nicht zur Menge der natürlichen Zahlen. Ergänzt man IN um die Zahl 0, so erhält man IN_0 = {0; 1; 2; 3; ...} gelesen: N null

Besondere Zahlen sind:

- die **geraden Zahlen** 2; 4; 6; 8; 10; ...
- die **ungeraden Zahlen** 1; 3; 5; 7; ...
- die **Quadratzahlen** 1; 4; 9; 16; 25; ... , d.h. die Zahlen, die durch Multiplikation einer natürlichen Zahl mit sich selbst entstehen. Z. B. ist 1=12; 4=22; 9=32 usw.
- die **Primzahlen** 2; 3; 5; 7; 11; 13; ... , d.h. die natürlichen Zahlen, die nur durch 1 oder sich selbst teilbar sind.
  Beachte: 1 ist keine Primzahl!

Hinweise zu besonderen Begriffen:

- Oft soll man eine **Zahl zerlegen**, d. h. überprüfen, ob sich eine Zahl als Produkt zweier Zahlen schreiben lässt. Eine besondere Bedeutung hat dabei die Zerlegung einer Zahl in Primzahlen (Primfaktorisierung)
  Beispiele: Die Zahl 24 lässt sich zerlegen in $1 \cdot 24$, $2 \cdot 12$, $3 \cdot 8$, $4 \cdot 6$ usw.. Diese Zerlegung ist als nicht eindeutig, dagegen gibt es genau eine Primfaktorisierung, nämlich: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
- Als **Vielfachenmenge V_a** einer Zahl a bezeichnet man die Menge aller Vielfachen von a.
  Beispiele: V_2 = {2; 4; 6; ...} = Menge der geraden Zahlen; V_{12} = {12; 24; 36; ..} = „12er Einmaleins“
- Als **Teilermenge T_a** einer Zahl a bezeichnet man die Menge aller Teiler einer Zahl, also aller Zahlen durch die a ohne Rest teilbar ist.
  Beispiele: T_{24} = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12}, vgl. Zerlegungen von 12; T_2 = {1; 2}, vgl. 2 ist Primzahl.

1.3. Rechnen in der Menge der ganzen Zahlen

1.3.1. Ganze Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen enthält die Zahlen ... ; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ... .

Man schreibt dafür: $\mathbb{Z}$ = {... ; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...}

Teilmengen von # sind u. A. $\mathbb{Z}^+$ = # = Menge der positiven ganzen Zahlen;
$\mathbb{Z}^-$ = {... ; -3; -2; -1} = Menge der negativen ganzen Zahlen

Hinweis zu ganzen Zahlen:

- Die ganzen Zahlen werden benötigt, damit Gleichungen wie x + 7 = 3 lösbar werden, denn die Lösung ist die ganze Zahl –4.
- Eine Zahl b, die sich nur durch das Vorzeichen von der Zahl a unterscheidet, heißt Gegenzahl zu a. Zum Beispiel sind –3 und 3 Gegenzahlen.
- Den Abstand einer Zahl zur Null nennt man Betrag |a| der Zahl. Beispiele: | 2 | = 2; | -3 | = 3; | 0 | = 0.

Hinweis zum Rechnen mit ganzen Zahlen:

- Bei Rechnungen mit ganzen Zahlen sind stets die Vorzeichen der Zahlen zu berücksichtigen. Prinzipiell klärt man zuerst die Frage des Vorzeichens des Ergebnisses der Rechnung und rechnet dann mit den Zahlen ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, also so, als hätte man nur natürliche Zahlen gegeben.
- Das Rechnen mit ganzen Zahlen wird somit auf das (bekannte) Rechnen mit natürlichen Zahlen zurück geführt.
- Das Vorzeichen einer Zahl wird ggfs. als Rechenzeichen gedeutet bzw. umgekehrt.

1.3.2. Rechenregeln für die ganzen Zahlen

1.3.2.1. Addition ganzer Zahlen:

- Haben **beide Summanden gleiches Vorzeichen**, so hat der Summenwert das gemeinsame Vorzeichen und man addiert die Beträge der beiden Summanden.
- Haben **beide Summanden verschiedenes Vorzeichen** und den **gleichen Betrag**, so ist der Summenwert 0.
- Haben **beide Summanden verschiedenes Vorzeichen**, so hat der Summenwert das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag und man subtrahiert den kleineren Betrag vom größeren Betrag.

Beispiele: 8 + 3 = +(8 + 3) = +11 –8 – 3 = – (8 + 3) = –11
4 – 7 = – (7 – 4) = –3 –4 + 7 = +(7 – 4) = +3

1.3.2.2. Subtraktion zweier ganzer Zahlen:

Statt eine Zahl zu **subtrahieren** addiert man die Gegenzahl

Beispiel: $8 - 13 = 8 + (-13) = -5$

1.3.2.3. Multiplikation zweier ganzer Zahlen:

- Haben **beide Faktoren gleiches Vorzeichen**, ist das Produkt positiv
- Haben **beide Faktoren verschiedene Vorzeichen** ist das Produkt negativ

$$(+a) \bullet (+b) = +ab$$
$$(-a) \bullet (+b) = -ab$$
$$(+a) \bullet (-b) = -ab$$
$$(-a) \bullet (-b) = +ab$$

Beispiele: $8 \cdot 3 = +24 = 24$ $(-8) \cdot (-3) = +24 = 24$
$4 \cdot (-7) = -28$ $(-4) \cdot 7 = -28$

1.3.2.4. Division zweier ganzer Zahlen:

- Haben **Dividend und Divisor gleiches Vorzeichen**, ist der Quotient positiv
- Haben **Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen** ist der Quotient negativ

Beispiele: $12 : 3 = +4 = 4$ $(-12) \cdot (-3) = +4 = 4$
$42 : (-7) = -6$ $(-42) : 7 = -6$

Hinweis:

- In der Menge $\mathbb{Z}$ gelten die selben Rechengesetze wie in der Menge $\mathbb{N}_0$
- Das Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition gilt jetzt auch für die Subtraktion ganzer Zahlen.
  Begründung: Die Subtraktion einer Zahl entspricht der Addition der Gegenzahl.
  Beispiel: $3 - 8 = 3 + (-8) = -(8 - 3) = -5$. Somit gilt auch: $3 - 8 = -8 + 3$.
- **Beachte**: Beim Vertauschen von Zahlen muss das Rechenzeichen vor jeder Zahl als Vorzeichen der Zahl betrachtet werden und daher beim Umstellen mitgenommen werden.

Praktische Beispiele:

1. Gegeben ist der Term:

$$-17-(23+5\cdot 8-8)-63:9=$$

Beim Betrachten des Rechenausdrucks ist zu erkennen:
Es gibt eine Klammer, deshalb wird der Term in der Klammer zuerst berechnet. Dabei kommt die Punktrechnung $5\cdot 8$ vor. Deshalb wird zuerst $5\cdot 8$ berechnet. Im selben Schritt kann man auch die Division 63:9 berechnen. Das Zwischenergebnis ist deshalb:

$$=-17-(23+40-8)-7$$

Nun ist die Klammer aufzulösen, wobei wegen dem Minuszeichen vor der Klammer alle Rechenzeichen in der Klammer zu vertauschen sind. Somit:

$$=-17-23-40-8-7$$

Nun liegen nur noch Additionen bzw. Subtraktionen vor. Das Ergebnis nach dem Zusammenfassen ist:

$$=-79$$

Die gesamte Umformung schaut also so aus:

$$-17-(23+5\cdot 8-8)-63:9=-17-(23+40-8)-7=-17-23-40-8-7=-79$$

2. Bei Potenzen, Produkten und Quotienten sollte stets in folgender Reihenfolge verfahren werden:
Zuerst alle Vorzeichen betrachten und damit das Vorzeichen des Ergebnisses bestimmen, dann die Rechnungen ohne Rücksicht auf die Vorzeichen durchführen.

Beispiel: $-3\cdot(-2)^3=3\cdot 8=24$ Wegen der Hochzahl 3 ist –2 dreimal mit sich selbst zu multiplizieren, damit sind es insgesamt 4 Faktoren mit jeweils dem Vorzeichen Minus. Das Ergebnis hat damit ein positives Vorzeichen. Die weitere Rechnung ohne Berücksichtigung der Vorzeichen liefert 23=8 und somit $3\cdot 8=24$.

1.4. Rechnen in der Menge der rationalen Zahlen

1.4.1. Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen enthält die ganzen Zahlen und alle Brüche.
Diese Zahlen lassen sich nicht mehr als Menge in aufzählender Form darstellen.
Man verwendet daher hier zur Darstellung die Intervallschreibweise.
Man schreibt: $\mathbb{Q} =]-\infty; +\infty[$
Teilmengen von $\mathbb{Q}$ sind u. A. $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}^+_0 = [0; \infty[$; $\mathbb{Q}^+ =]0; \infty[$

Hinweis zur Intervallschreibweise:
Man unterscheidet, ob die Grenzen des Intervalls zum Intervall dazu gehören oder nicht, und spricht daher von einem

- abgeschlossenen Intervall **[a; b]** , wenn a und b dazugehören
- offenem Intervall **]a; b[** wenn a und b nicht dazugehören
- halboffenem Intervall **[a; b[** oder **]a; b]** wenn a oder b dazugehören

Beachte dabei die Verwendung der Klammern [und]. Das Klammersymbol zeigt nach innen, wenn die Grenze zum Intervall dazu gehört.

Hinweis zum Darstellung von Zahlen und Intervallen:
Zahlen und Intervalle lassen sich auf einer Zahlengeraden darstellen.

Beispiele: Auf dieser Zahlengeraden sind die Zahlen –3 und 2,5 sowie die Intervalle [1; 4] und]- ∞; 2] dargestellt.

Hinweis zu den rationalen Zahlen:

- Die rationalen Zahlen werden benötigt, damit Gleichungen wie $7 \cdot x = 3$ lösbar werden, denn die Lösung ist die rationale Zahl $\frac{7}{3}$.
- Eine (positive) Zahl ist eine rationale Zahl, wenn sie sich als Quotient zweier natürlicher Zahlen schreiben lässt.

Also: $\boxed{r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r = {}^{a}/_{b} \text{ mit } a,b \in \mathbb{N}}$

Hinweis zum Rechnen mit rationalen Zahlen:
In der Menge $\mathbb{Q}$ gelten die gleichen Rechengesetze, wie in $\mathbb{Z}$.

1.4.2. Rechnen mit (gewöhnlichen) Brüchen

Ein (gewöhnlicher) Bruch ist von der Form: $\boxed{\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}, \text{kurz } \frac{z}{n}}$ wobei z, n ∈ $\mathbb{N}$.

Ein Bruch lässt sich als das Ergebnis der Division zweier natürlicher Zahlen deuten.

Also: $\boxed{\frac{z}{n} = z : n}$ Beispiele: $2 : 3 = \frac{2}{3}$ $15 : 4 = {}^{15}/_{4} = 3\frac{3}{4}$

Ein Bruch heißt: - **echter Bruch**, wenn z < n, z. B. 32 ,

- **unechter Bruch**, wenn z ≥ n, z. B. 35 ,

- **gemischter Bruch**, wenn er die Form „Ganzzahl + echter Bruch“ hat, z. B. 2 ½ = 2 + ½ ,

- **Kehrbruch**, wenn Zähler und Nenner vertauscht sind, z.B. ist $^3/_2$ der Kehrbruch zu ⅔

1.4.2.1. Erweitern und Kürzen von Brüchen

Erweitern eines Bruches bedeutet, den Zähler und Nenner des Bruches mit der selben Zahl zu multiplizieren.

Beispiel: $$\frac{2}{3} \overset{\cdot 2}{=} \frac{4}{6} \overset{\cdot 5}{=} \frac{20}{30}$$

Kürzen eines Bruches bedeutet, den Zähler und Nenner des Bruches durch die selbe Zahl zu teilen, sofern Zähler und Nenner einen gemeinsamen Teiler besitzen. Sind Zähler und Nenner teilerfremd, so ist der Bruch in der Grundform, d .h. er lässt sich nicht weiter kürzen.

Beispiele: ⅔ ist in der Grundform, da 2 und 3 teilerfremd;
$^{24}/_{36}$ ist kürzbar zu ⅔ , denn 24 und 36 besitzen den größten gemeinsamen Teiler 12, also $\frac{24}{36} \overset{:12}{=} \frac{2}{3}$.

1.4.2.2. Addition (Subtraktion) von Brüchen

Hinweis: Brüche mit gleichem Nenner heißen gleichnamig.

Zwei Brüche werden addiert (subtrahiert), in dem man ihre Nenner gleichnamig macht und dann ihrer Zähler addiert (subtrahiert).

Also: $$\boxed{\frac{a}{n} \pm \frac{a}{n} = \frac{a \pm b}{n}}$$

Beispiele: $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$; $4\frac{2}{9} - 1\frac{2}{3} = 4\frac{2}{9} - 1\frac{6}{9} = 3\frac{11}{9} - 1\frac{6}{9} = 2\frac{11-6}{9} = 2\frac{5}{9}$

Hinweis: Bei jedem Ergebnis wird geprüft, ob der Bruch kürzbar ist.

1.4.2.3. Multiplikation von Brüchen

Zwei Brüche werden multipliziert, in dem man ihre Zähler multipliziert und ihre Nenner multipliziert.

Also: $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$

Hinweis: Gemischte Brüche müssen vor dem multilplizieren in unechte Brüche umgewandelt werden,

Beispiel: $1\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$

Hinweis: Bevor man die Zähler bzw. Nenner ausmultipliziert, sollte geprüft werden, ob sich der Bruch kürzen lässt,

Beispiel: $\frac{15}{22} \cdot \frac{33}{20} = \frac{15 \cdot 33}{22 \cdot 20} \overset{\text{kürze 15 mit 20 und 33 mit 22}}{=} \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$

Hinweis: Ein beliebter Fehler beim Multiplizieren ist, dass Brüche unnötigerweise gleichnamig gemacht werden.

1.4.2.4. Division von Brüchen

Zwei Brüche werden dividiert, in dem man den ersten Bruch mit dem Kehrbruch des zweiten Bruchs multipliziert.

Also: $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$

Beispiel: $\frac{2}{3} : \frac{7}{9} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$

Hinweis: Es gelten die selben Hinweise wie bei der Multiplikation von Brüchen

1.4.3. Rechnen mit Dezimalzahlen

Eine Dezimalzahl (= Dezimalbruch) ist eine Bruchzahl unter Verwendung der Kommaschreibweise.
Beispiele: 0,123; 15,5; -23,001 usw.
Die Stellen nach dem Komma heißen Dezimalen (= Nachkommastellen). Ihre Werte heißen Zehntel z, Hunderstel h, Tausendstel t usw.

Hinweis: Jede Dezimalzahl lässt sich als gewöhnlicher Bruch darstellen und umgekehrt.

Beispiele: $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$

1.4.3.1. Addition (Subtraktion) von Dezimalzahlen

Man addiert (subtrahiert) wie bei natürlichen Zahlen die **Ziffern mit gleichem Stellenwert**

Beispiele:

$$\begin{array}{r} 12{,}354 \\ \underline{+\ \ 1{,}058} \\ 13{,}042 \end{array}$$

0,0125 – 0,00895 = 0,01250 – 0,00895 = 0,00355

1.4.3.2. Multiplikation zweier Dezimalzahlen

Man multipliziert zunächst die beiden Zahlen ohne Rücksicht auf das Komma (⇒ Nebenrechnung!). Das Ergebnis hat dann so viele Nachkommastellen, wie beide Dezimalzahlen zusammen besitzen.

Beispiel: $12{,}45 \cdot 3{,}7 = 46{,}065$ Nebenrechnung: $1245 \cdot 37 = 46065$

1.4.3.3. Division zweier Dezimalzahlen

Man verschiebt bei Dividend und Divisor das Komma um jeweils so viele Stellen nach rechts bis der Divisor eine natürliche Zahl ist. Durch diese natürliche Zahl wird dann dividiert, wobei beim Überschreiten des Kommas des Dividenden auch beim Ergebnis ein Komma gesetzt wird.

Beispiel: 12,45 : 2,5 = 124,5 : 25 = 4,98

Hinweis zu Dezimalzahlen:
Eine Dezimalzahl ist das Ergebnis einer Division zweier natürlicher Zahlen. Bricht diese Division irgendwann ab, so entsteht eine endliche Dezimalzahl. Beispiel: 3 : 4 = 0,75.
Bricht die Division dagegen nicht ab, so werden sich die Reste der Division irgendwann wiederholen und damit auch die Ziffernfolge der Dezimalzahl. Eine solche Dezimalzahl heißt periodische Dezimalzahl. Man unterscheidet reinperiodisch und gemischtperiodisch.

Beispiele: $1 : 3 = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$ gelesen 0,3 Periode ⇒ reinperiodisch
$1 : 7 = 0{,}142857142... = 0{,}\overline{142857}$ ⇒ reinperiodisch
$5 : 6 = 0{,}8333... = 0{,}8\overline{3}$ gelesen Null Komma acht Periode drei ⇒ gemischtperiodisch

1.5. Rechnen in der Menge der rellen Zahlen

1.5.1. Rationale und irrationale Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen enthält die rationalen Zahlen und alle irrationalen Zahlen.

Eine Zahl ist **rational**, wenn sie sich als Bruch darstellen lässt, bei dem Zähler und Nenner ganzzahlig sind.

Ist diese Darstellung nicht möglich, so ist die Zahl **irrational**.

Beispiel: Die Frage „Welche Zahl x ist hat 2 als Quadrat?“ lässt sich kurz als Gleichung $x^2 = 2$ schreiben. Es lässt sich zeigen, dass die Zahl x, deren Quadrat gleich 2 ist, sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben lässt. Damit ist x eine irrationale Zahl.

1.5.2. Rechnen mit Wurzel

Wurzeln als irrationale Zahlen

Die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ schreibt man formal als $\sqrt{2}$. Damit ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. Viele Wurzeln wie $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$ usw. sind irrationale Zahlen. Dagegen ist z.B. $\sqrt{4} = 2$ eine rationale Zahl, da gilt: $(\sqrt{4})^2 = 2^2 = 4$

Definition der Wurzel:
Die Wurzel aus einer Zahl a ist diejenige Zahl, deren Quadrat gleich a ist.

Hinweis: Die Zahl unter der Wurzel heißt Radikant.

Hinweis zur Berechnung von Wurzeln:
Eine Wurzel lässt sich z.B. durch eine Intervallschachtelung berechnen. Dabei wird das Intervall in dem der Wurzelwert liegt immer kleiner gemacht. Die Grenzen des Intervalls sind stets rationale Zahlen. Da man die Intervall-länge beliebig verkleinern kann, ergibt sich, dass eine Wurzel und damit eine irrationale Zahl eine unendliche, nichtperiodischer Dezimalzahl ist.

Beispiel: Welchen Wert hat $\sqrt{2}$? Eine mögliche Intervallschachtelung ist:

$1 < \sqrt{2} < 2$ denn $1^2 < 2 < 2^2$

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ denn $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ denn $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$

usw.

Ergebnis: $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

Hinweis: 1,41 ist nur eine Näherung von $\sqrt{2}$, nicht der exakte Wert.

Für den exakten Wert von Wurzel aus 2 verwendet man das Symbol „$\sqrt{2}$“.

1.5.2.1. Addition (Subtraktion) zweier Wurzeln

Die Summe zweier Wurzeln ist nicht die Wurzel aus der Summe der beiden Zahlen

i. A. gilt: $\boxed{\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}}$

Beispiel: Wegen $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$ und $\sqrt{25} = 5$ ist zu erkennen:
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \neq 5 = \sqrt{25} = \sqrt{9+16}$

Hinweis:
Einen Term wie $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ kann man nicht zusammenfassen, somit beleibt er so stehen!
Dagegen kann man $2\sqrt{2} + \sqrt{2}$ zu $3\sqrt{2}$ zusammenfassen. Diese Zusammenfassung erfolgt aber auf der Grundlage des Distributivgesetzes und nicht der Zusammenfassung von Wurzeln.

1.5.2.2. Multiplikation zweier Wurzeln

Das Produkt zweier Wurzeln ist gleich der Wurzel aus dem Produkt der beiden Zahlen

Es gilt: $\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}}$

Beispiel: Wegen $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 = \sqrt{144} = \sqrt{9 \cdot 16}$

1.5.2.3. Division zweier Wurzeln

Der Quotient zweier Wurzeln ist gleich der Wurzel aus dem Quotienten der beiden Zahlen

Es gilt: $\boxed{\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}}$ oder $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$

Beispiel: Wegen $\sqrt{144} : \sqrt{16} = 12 : 4 = 3 = \sqrt{9} = \sqrt{144 : 16}$

Hinweis zum Rechnen mit Wurzeln:
Aus den obigen Rechengesetzen leiten sich folgende besonderen Umformungsmöglichkeiten für Wurzeln ab:

- Eine Wurzel radizieren bedeutet, den Wurzelwert ohne Wurzelzeichen schreiben zu können. Dies ist immer dann möglich, wenn die zu berechnende Wurzel eine Quadratzahl ist.

  Beispiel: $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, denn $1{,}2^2 = 1{,}44$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

- In den meisten Fällen wird sich eine Wurzel nicht radizieren lassen. Dann ist oft ein teilweises Radizieren möglich. Dabei wird der Radikant soweit als Produkt zweier Faktoren geschrieben, wobei ein Faktor eine Quadratzahl ist.
  Beispiel: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$
- Die Umkehrung des teilweisen Radizierens ist das Ziehen unter die Wurzel.
  Beispiel: $2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$
- Häufig ergeben sich nach Umformungen Brüche bei denen im Nenner ein Wurzelausdruck steht. Das schaut aus mathematischer Sicht nicht schön aus. Deshalb wird man den Nenner rational machen. Dazu wird der Bruch so erweitert, dass der Wurzelausdruck im Nenner verschwindet.

  Beispiel: $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$

Etwas schwieriger ist schon die Tatsache, wenn im Nenner kein Produkt steht, sondern eine Summe. In diesem Fall muss man mit einem Ausdruck, der das entgegengesetzte Rechenzeichen besitzt den Zähler und Nenner erweitern (Begründung: 3. Binomische Formel)

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = -(1+\sqrt{2}) = -1-\sqrt{2}$$

1.5.3. Rechnen mit Potenzen

Ein Rechenausdruck der Form $\boxed{a^n}$ heißt Potenz. a heißt Basis (=Grundzahl) und b Exponent (=Hochzahl).

Es gilt: $\boxed{a^n = \underbrace{a\ a \dots a}_{n-\text{mal}}}$ Dabei ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$; $-0{,}1^4 = 0{,}0001$

Daraus folgt die erste Erweiterung des Potenzbegriffs für **Potenzen mit negativen Exponenten**:

Es gilt: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n-\text{mal}}}$ Dabei ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele: $2^{-3} = \frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{8}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

Hinweise:
In Naturwissenschaften spielen vor allem Zehnerpotenzen eine wichtige Rolle. Es ist:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ 10^{-2} &= 0{,}01 \\ 10^{-1} &= 0{,}1 \\ 10^{0} &= 1 \\ 10^{1} &= 10 \\ 10^{2} &= 100 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Zehnerpotenzen lassen sich Zahlen in der Gleitkommadarstellung $\boxed{a \bullet 10^n}$ schreiben

Beispiele: $42 = 42 \cdot 10^0 = 4{,}2 \cdot 10^1 = 0{,}42 \cdot 10^2 = \ldots$
$42 = 420 \cdot 10^{-1} = 4200 \cdot 10^{-2} = \ldots$

Es ist üblich, dass a eine Stelle vor dem Komma hat. Ein Ergebnis wie 3500 gibt man in Gleitkommadarstellung daher als $3{,}5 \cdot 10^3$ an.

Für gewisse Zehnerpotenzen sind Vorsilben als Abkürzungen gebräuchlich.

Beispiele: 10^3 = k (Kilo), also 2000g = 2kg
10^6 = M (Mega), also 30MByte
10^{-2} = c (Zenti), also 0,02m = 2cm

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende Rechenregeln.
Hinweis: Die Basen können beliebige reelle Zahlen außer 0 und die Exponenten beliebige reelle Zahlen sein.

1.5.3.1. Addition (Subtraktion) zweier Potenzen

Bei der Addition und Subtraktion zweier Potenzen gelten die Regeln **Potenzen vor Punktrechnung** und **Punktrechnung vor Strichrechnung**

Beispiel: $6 \cdot 2^4 + 5 \cdot 3^2 = 6 \cdot 16 + 5 \cdot 9 = 96 + 45 = 141$

Beim Multiplizieren und Dividieren von Potenzen ist zu unterscheiden, ob die Potenzen gleiche Basen oder gleiche Exponenenten besitzen.

1.5.3.2. Multiplikation zweier Potenzen mit gleicher Basis

Bei der **Multiplikation mit gleicher Basis** bleibt die Basis gleich und die Exponenten werden **addiert**.

D. h. es gilt:

Beispiel: $2^3 \bullet 2^2 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

1.5.3.3. Division zweier Potenzen mit gleicher Basis

Bei der **Division mit gleicher Basis** bleibt die Basis gleich und die Exponenten werden **subtrahiert**.

D. h. es gilt: $a^n : a^m = a^{n-m}$ oder $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Beispiel: $2^7 : 2^2 = 2^{7-3} = 2^5 = 32$

1.5.3.4. Multiplikation zweier Potenzen mit gleichem Exponenten

Bei der **Multiplikation zweier Potenzen mit gleichem Exponenten** werden die **Basen multipliziert** und die Exponenten bleiben **gleich**.

D. h. es gilt: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Beispiel: $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$

1.5.3.5. Division zweier Potenzen mit gleichem Exponenten

Bei der **Division zweier Potenzen mit gleichem Exponenten** werden die **Basen dividiert** und die Exponenten bleiben **gleich**.

D. h. es gilt: $a^n : b^n = (a : b)^n$ oder $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Beispiel: $12^3 : 3^3 = (12:3)^3 = 4^3 = 64$

1.5.3.6. Potenzen von Potenzen

Man **potenziert eine Potenz,** indem man die **Basis beibehält** und die **Exponenten multipliziert**

D. h. es gilt: $(a^n)^m = (a)^{n \cdot m}$

Beispiel: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

1.5.3.7. Definition der n-ten Wurzel:

Definition der Wurzel:
Die n–te Wurzel aus einer Zahl a ist diejenige Zahl, deren n–te Potenz gleich a ist.

Also gilt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ wobei $a \in \mathbb{R}^+_0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Die n-te Wurzel aus einer Zahl a ist damit die Lösung der Gleichung $x^n = a$. Ein Sonderfall sind die Quadratwurzeln, d. h.

Beispiele: $\sqrt[3]{64} = 4$, denn $4^3 = 64$;

Die Gleichung $x^3 = 8$ hat die Lösung $x = \sqrt[3]{8} = 2$. Dagegen hat die Gleichung $x^3 = 9$ die Lösung $x = \sqrt[3]{9}$. Das Ergebnis kann nicht weiter vereinfacht werden, da es keine rationale Zahl gibt, deren 3. Potenz 9 ist.

Hinweis:
Vergleiche hierzu das Kapitel über Rechnen mit Wurzeln. Man kann n-te Wurzeln genau so wie Quadratwurzeln radizieren, teilweise radizieren, unter die Wurzel ziehen und Nenner rational machen.

Beispiel: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

1.5.3.8. Potenzen mit rationalen Exponenten:

Daraus folgt die zweite Erweiterung des Potenzbegriffs für **Potenzen mit rationalem Exponenten**:

Man definiert: $\boxed{\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}}$ wobei $a \in \mathbb{R}^+_0$; $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Die Zahl $a^{\frac{p}{q}}$ ist damit die Lösung der Gleichung $x^q = a^p$.

Beispiel: Die Zahl $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$ ist die Lösung der Gleichung $x^4 = 5^3$ und damit von

$x^4 = 125$.

Hinweis:
Durch Betrachtung von Intervallschachtelungen für irrationale Zahlen ist es möglich, den Potenzbegriff auf reelle Exponenten zu erweitern. Damit sind für Exponenten alle beliebigen Zahlen möglich. Die Rechengesetze und Methoden für Potenzen gelten damit für alle Potenzen mit beliebigen Exponenten.

1.6. Grundlegende Rechenregeln

- **für die Addition**

das **Kommutativgesetz** (=Vertauschungsgesetz): $\boxed{a + b = b + a}$

Bedeutung: Bei einer Summe darf man die Summanden vertauschen.
Beispiel: 2 + 3 = 3 + 2

das **Assoziativgesetz** (=Verbindungsgesetz): $\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$

Bedeutung: Bei einer Summe darf man die Reihenfolge der Berechnung ändern.
Beispiel: 23 + 36 + 64 = 23 + (36 + 64) = 23 + 100 = 123

- **für die Multiplikation**

das **Kommutativgesetz** (=Vertauschungsgesetz): $\boxed{a \bullet b = b \bullet a}$

Bedeutung: Bei einer Summe darf man die Faktoren vertauschen.
Beispiel: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

das **Assoziativgesetz** (=Verbindungsgesetz): $\boxed{(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)}$

Bedeutung: Bei einer Summe darf man die Reihenfolge der Berechnung ändern.
Beispiel: $12 \cdot 25 \cdot 40 = 12 \cdot (25 \cdot 40) = 12 \cdot 1000 = 12000$

- **für die Verbindung von Addition und Multiplikation**

das **Distributivgesetz** (=Verteilungsgesetz): $\boxed{(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c}$

Bedeutung: Mit diesem Gesetz können Klammern aufgelöst, aber genauso Klammern gesetzt werden.
Beispiel: $(14 + 21) \cdot 8 = 14 \cdot 8 + 21 \cdot 8 = 112 + 168 = 280$
$23 \cdot 7 + 17 \cdot 7 = (23 + 17) \cdot 7 = 40 \cdot 7 = 280$

- **für die Reihenfolge von Operationen**

1. Klammerregel: was in Klammern steht, wird zuerst berechnet

2. Potenzen vor Punktrechnung: zuerst müssen die Potenzen berechnet, dann die Multiplikationen und Divisionen durchgeführt werden.

3. Punktrechnung vor Strichrechnung: zuerst müssen die Multiplikationen und Divisionen durchgeführt werden, dann die Additionen und Subtraktionen.

Beispiele: $32 + (80 - 3 \cdot 4) = 32 + (80 - 12) = 32 + 68 = 100$
$7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 4 = 7 \cdot 9 - 5 \cdot 4 \cdot\ = 63 - 20 = 43$

- **für das Auflösen von Klammern**

1. Steht vor der Klammer ein Plus (+): so läßt man die Klammer einfach weg

2. Steht vor der Klammer ein Minus (–): so ändert man beim Weglassen der Klammer jedes Plus in der Klammer zu Minus und jedes Minus in der Klammer zu Plus.

$$+(+a) = +a$$

$$+(-a) = -a$$

$$-(+a) = -a$$

$$-(-a) = +a$$

Beispiele: $32 + (80 - 12) = 32 + 80 - 12 = 100$
$133 - (20 - 12 + 15) = 133 - 20 + 12 - 15 = 110$

- **für das Auflösen spezieller Klammern (Binomische Formeln)**

Die Tatsache, dass das Quadrat einer Summe nicht gleich der Summe der beiden Quadrate ist, wirft die Frage auf, wie soll man mit diesen Quadraten rechnen:

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

Das Quadrat einer Summe ist größer als die Summe der beiden Quadrate. Zur Bearbeitung von Quadraten von Summen werden die Binomischen Formeln benutzt. Gleichzeitig existiert auch eine solche Formel, wenn die Werter in einer Klammer einmal mit + und einmal mit – verbunden sind. Binomische Formeln sind nur verkürzte Rechnungen für das Ausmultiplizieren von Klammern. Ihre Gültigkeit kann man deshalb durch direktes Ausmultiplizieren beweisen.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$